

CÁC TÍNH CHẤT NHIỆT ĐỘNG CỦA HỔ ĐEN REISSNER-NORDSTRÖM

Lê Viêt Hòa¹, Nguyễn Tuấn Anh² và Đinh Thanh Tâm³

¹*Khoa Vật lý, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội*

²*Khoa Công Nghệ Năng Lượng, Trường Đại Học Điện Lực*

³*Khoa Toán-Lí-Tin, Trường Đại Học Tây Bắc, Sơn La*

Tóm tắt. Dựa vào metric của hố đen (HĐ) Reissner-Nordström (RN) mang điện đã rút ra các biểu thức giải tích cho nhiệt độ, áp suất và thể tích của HĐ. Kết quả tính số chứng tỏ rằng tại các nhiệt độ nhỏ hơn nhiệt độ tới hạn T_c , vật chất bên ngoài HĐ có tính chất giống như khí thực Van der Waals ở chỗ nó có thể tồn tại ở pha khí hoặc lỏng và có thể xảy ra chuyển pha khí-lỏng khi thể tích (hoặc bán kính của đường chân trời) HĐ thay đổi. Ngược lại, khi nhiệt độ lớn hơn T_c , vật chất chỉ có thể ở pha khí. Kết quả này phù hợp với kết quả đã biết.

Từ khóa: tính chất nhiệt động, hố đen, khí-lỏng, chuyển pha.

1. Mở đầu

Một trong những hệ quả quan trọng của thuyết tương đối rộng là tiên đoán về sự tồn tại của các HĐ-miền không gian mà ở đó lực hấp dẫn mạnh tới mức ánh sáng cũng không thể thoát ra được. Việc chụp được ảnh của HĐ vào tháng tư năm 2019 đã gia tăng mạnh mẽ các nghiên cứu về chúng. Xét theo quan điểm của nhiệt động lực học thì HĐ có tính chất giống như một hệ thống kê thông thường [1]. Khi đó để mô tả các tính chất vĩ mô của HĐ chúng ta không cần phải quan tâm đến vị trí và xung lượng của từng phân tử mà chỉ cần một vài thông số vĩ mô như nhiệt độ, áp suất... Các tính chất nhiệt động của các HĐ đã được nghiên cứu trong nhiều công trình [2, 3, 4]. Người ta nhận thấy rằng so với các hệ nhiệt động thông thường thì cấu trúc pha và các hiện tượng tới hạn ở các HĐ phong phú hơn nhiều [5, 6, 7]. Mặc dù vậy, các HĐ vẫn được coi là một trong những bí ẩn lớn nhất của vũ trụ hiện nay vì còn rất nhiều điều chưa được làm rõ như cấu trúc nội tại bên trong HĐ, bản chất các quá trình chuyển pha, tính chất của không thời gian quanh HĐ... Trong bài báo này chúng tôi tập trung nghiên cứu các tính chất nhiệt động của vật chất bên ngoài HĐ mang điện RN, làm cơ sở cho các nghiên cứu về các hiện tượng tới hạn sau này.

Bài báo này được trình bày như sau. Phần II là nội dung chính, trong đó giới thiệu các bước tính để rút ra những biểu thức cho các đại lượng nhiệt động cơ bản của HĐ như nhiệt độ, áp suất, thể tích. Việc tính số và các nhận xét cũng được đưa ra trong phần này. Phần III giành cho các kết luận và nhận xét chung.

Ngày nhận bài: 10/3/2020. Ngày sửa bài: 18/3/2020. Ngày nhận đăng: 24/3/2020.

Tác giả liên hệ: Lê Viêt Hòa. Địa chỉ e-mail: hoalv@hnue.edu.vn

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Phương trình trạng thái

Chúng tôi xét mật độ Lagrangien $\mathcal{L}$ xác định bởi

$$16\pi G_N \mathcal{L} = R - \frac{12}{L^2} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - |\partial_\mu \psi - iQ A_\mu \psi|^2 - m^2 |\psi|^2, \quad (2.1)$$

trong đó G_N là hằng số hấp dẫn trong lý thuyết Newton; R là vô hướng Ricci; A_μ và ψ tương ứng là trường Gauge và trường vật chất; m là khối lượng của trường ψ ; $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ là tenxơ cường độ trường điện từ; L là bán kính AdS_4 (liên hệ với hằng số vũ trụ Λ : $\Lambda = -3/L^2$).

Tác dụng tương ứng với (2.1) có dạng

$$S = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R - \frac{12}{L^2} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - |\partial_\mu \psi - iQ A_\mu \psi|^2 - m^2 |\psi|^2 \right). \quad (2.2)$$

Khi $\psi = 0$ tác dụng (2.2) sinh ra HĐ trong không-thời gian Anti de Sitter bốn chiều (AdS_4) mà metric của nó là (công thức 2.30 của [1]):

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_2^2, \quad (2.3)$$

trong đó t và r tương ứng là thời gian và khoảng cách không gian 3 chiều tính từ gốc tọa độ (coi là tâm của hố đen).

Đối với HĐ mang điện Reissner-Nordström (RN) mà ta xét ở đây thì [2]:

$$f(r) = k - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{r^2}{L^2} \quad (2.4)$$

ở bên ngoài HĐ. Trong đó M và Q tương ứng là khối lượng và điện tích của HĐ; k là độ cong không gian của HĐ. Còn $d\Omega_2^2$ là metric của đa tạp (manifold) hai chiều với độ cong không đổi bằng $2k$. Khi $k = 0$ thì $d\Omega_2^2$ là phần tử chiều dài của mặt phẳng, khi $k > 0$ thì $d\Omega_2^2$ là metric của hình cầu hai chiều S^2 với bán kính $1/\sqrt{k}$ và khi $k < 0$ thì $d\Omega_2^2$ là metric của hypecboit với bán kính cong $1/\sqrt{-k}$. Trong bài báo này chúng tôi sẽ chỉ xét trường hợp $k > 0$. Cũng cần nhấn mạnh rằng ở đây chúng ta chỉ xét các tính chất nhiệt động của vật chất bên ngoài HĐ vì chúng ta hoàn toàn chưa biết gì về tính chất của vật chất bên trong hố đen (do thiếu thông tin) và nhiều tính chất bên ngoài HĐ còn chưa được làm rõ như đã nói ở phần mở đầu.

Để viết biểu thức tường minh cho metric (2.3) chúng tôi tính metric $d\Omega_2^2$ như sau. Phương trình của mặt cầu S^2 xác định bởi

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2, a = 1/\sqrt{k}. \quad (2.5)$$

Với cách đặt

$$x_1 = a \cos \alpha \cos \beta; \quad x_2 = a \sin \alpha \cos \beta; \quad x_3 = a \sin \beta, \quad (2.6)$$

thì

$$d\Omega_2^2 = \sum_{i=1}^2 dx_i^2 = \frac{\cos^2 \beta d\alpha^2 + \sin^2 \beta d\beta^2}{k}. \quad (2.7)$$

Thay (2.7) vào (2.3) sẽ nhận được

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + \frac{r^2 \cos^2 \beta}{k} d\alpha^2 + \frac{r^2 \sin^2 \beta}{k} d\beta^2 \quad (2.8)$$

Có thể viết lại

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu; \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \quad (2.9)$$

trong đó

$$dx^0 = dt, \quad dx^1 = \alpha, \quad dx^2 = \beta, \quad dx^3 = dr, \quad (2.10)$$

Đồng nhất các số hạng của (2.8) với các số hạng tương ứng của (2.9) chúng tôi tìm được các thành phần của tenxơ metric $g_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -f(r), \quad g_{\alpha\alpha} = \frac{r^2 \cos^2 \beta}{k}, \quad g_{\beta\beta} = \frac{r^2 \sin^2 \beta}{k}, \quad g_{rr} = 1/f(r), \\ g^{tt} &= -1/f(r), \quad g^{\alpha\alpha} = \frac{k}{r^2 \cos^2 \beta}, \quad g^{\beta\beta} = \frac{k}{r^2 \sin^2 \beta}, \quad g^{rr} = f(r), \\ g_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} = 0 \text{ khi } \mu \neq \nu. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Do đó định thức của tenxơ metric sẽ là

$$g = \det |g_{\mu\nu}| = -\frac{r^4 \cos^2 \beta \sin^2 \beta}{k^2} \rightarrow \sqrt{-g} = \frac{r^2 \cos \beta \sin \beta}{k}. \quad (2.12)$$

Theo định nghĩa, chân trời của HĐ là miền giới hạn không gian mà trong đó ngay cả ánh sáng cũng không thoát được ra ngoài. Đối với HĐ trong không thời gian 4 chiều mà ta xét, bán kính của chân trời r_+ là nghiệm của phương trình $f(r_+) = 0$ (xem trang 15 của [1]). Nên

$$f(r_+) = k - \frac{2M}{r_+} + \frac{Q^2}{r_+^2} + \frac{r_+^2}{L^2} = 0, \quad (2.13)$$

Từ đó nhận được

$$M = \frac{r_+}{2} \left[k + \frac{Q^2}{r_+^2} + \frac{r_+^2}{L^2} \right]. \quad (2.14)$$

Bằng cách thay (2.14) vào (2.4) sẽ có

$$f(r) = k \left(1 - \frac{r_+}{r} \right) + \frac{Q^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_+}{r} \right) + \frac{r^2}{L^2} \left(1 - \frac{r_+^3}{r^3} \right). \quad (2.15)$$

Như đã biết, nhiệt độ Hawking của HĐ xác định bởi (công thức 3.26 trong [1]):

$$T = \frac{f'(r_+)}{4\pi}. \quad (2.16)$$

Kết hợp (2.4), (2.14) và (2.16) sẽ xác định được biểu thức cho nhiệt độ:

$$T = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{Q^2}{r_+^3} + \frac{M}{r_+^2} + \frac{r_+}{L^2} \right) = \frac{1}{4\pi r_+} \left(k - \frac{Q^2}{r_+^2} + \frac{3r_+^2}{L^2} \right). \quad (2.17)$$

Áp suất được xác định qua hằng số vũ trụ [5] theo biểu thức:

$$P = -\frac{\Lambda}{8\pi} = \frac{3}{8\pi} \frac{1}{L^2}, \quad (2.18)$$

và thể tích của HD được xác định qua bán kính của chân trời:

$$V = \frac{4}{3} \pi r_+^3, \quad (2.19)$$

Các phương trình (2.17), (2.18) và (2.19) tạo thành hệ phương trình trạng thái chi phối mọi quá trình nhiệt động của HD.

2.2. Các tính chất nhiệt động

Trong phần này chúng tôi thực hiện tính số để làm rõ các tính chất nhiệt động của HD. Để cho tiện, trong các tính toán dưới đây chúng tôi chuyển sang dùng các đại lượng không thứ nguyên.

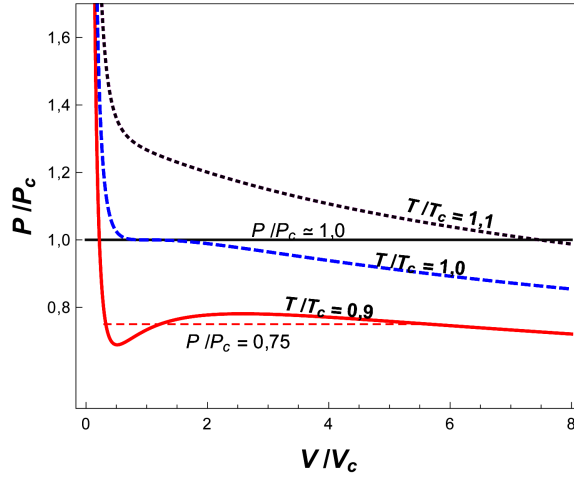
Trước hết, chúng tôi xét phương trình trạng thái $P(V, T)$. Bằng cách kết hợp các phương trình (2.17), (2.18) và (2.19) sẽ viết được

$$P/P_c = \frac{1 - 6(V/V_c)^{2/3} + 8(T/T_c)(V/V_c)}{3(V/V_c)^{4/3}}, \quad (2.20)$$

trong đó chúng tôi đã đưa vào các đại lượng tới hạn (mà ý nghĩa của chúng sẽ thấy rõ trong phần tính số dưới đây):

$$P_c = \frac{k^2}{96\pi Q^2}; \quad V_c = \frac{8\sqrt{6}\pi Q^3}{k^{3/2}}; \quad \text{and} \quad T_c = \frac{k^{3/2}}{3\sqrt{6}\pi Q}. \quad (2.21)$$

Dựa vào (2.21) chúng tôi vẽ được sự phụ thuộc của áp suất vào thể tích khi nhiệt độ không đổi. Để thấy rõ vai trò của nhiệt độ, chúng tôi chọn các giá trị T/T_c lớn hơn 1, bằng 1 và nhỏ hơn 1 tương ứng với các nhiệt độ lớn hơn, bằng và nhỏ hơn nhiệt độ tới hạn T_c . Hình 1 biểu diễn dạng của một vài đường đẳng nhiệt trong mặt phẳng $P - V$. Để thấy rằng chúng có dáng điệu giống như các đường đẳng nhiệt của khí thực Van der Waals. Ngoài ra, với các nhiệt độ $T < T_c$ đường đẳng nhiệt có cực tiểu tại một giá trị xác định của thể tích. Điều này chứng tỏ rằng khi $T < T_c$ vật chất có thể tồn tại ở pha khí hoặc lỏng và khi thể tích thay đổi sẽ xảy ra chuyển pha kiểu khí-lỏng như khí thực Van der Waals. Ngược lại, với $T > T_c$ sẽ không có sự chuyển pha và vật chất chỉ tồn tại ở pha khí. Tại $T = T_c$ đường đẳng nhiệt chỉ có điểm uốn, do đó $T = T_c$ chính là nhiệt độ tới hạn. Cần nhấn mạnh rằng việc sử dụng các thuật ngữ "khí" và "lỏng" ở đây chỉ là do sự tương tự với khí Van der Waals.



Hình 1. Sự phụ thuộc của áp suất P vào thể tích V tại $T/T_c = 0,9; 1,0; 1,1$

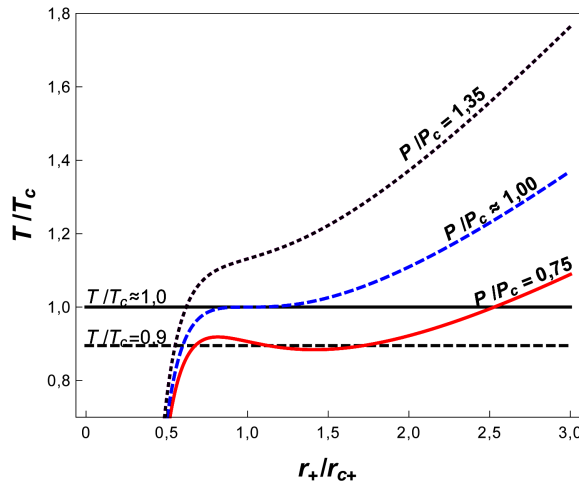
Tiếp theo, chúng tôi khảo sát sự phụ thuộc của nhiệt độ Hawking vào bán kính chân trời (cũng tức là vào thể tích của hố đen). Dựa vào (2.17) và (2.18) sẽ viết lại được

$$T/T_c = \frac{-1 + 6(r_+/r_{c+})^2 + 3(P/P_c)(r_+/r_{c+})^4}{8(r_+/r_{c+})^3}, \quad (2.22)$$

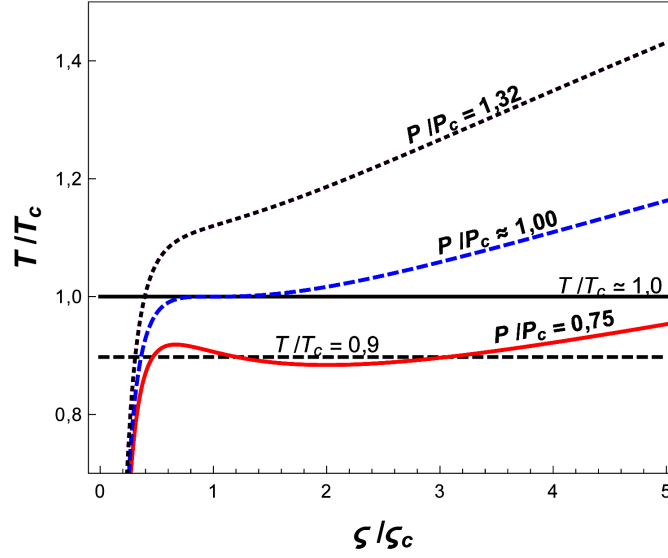
trong đó

$$r_{c+} = \frac{Q\sqrt{6}}{k^{1/2}}, \quad (2.23)$$

là bán kính tới hạn của chân trời. Các kết quả tính số được cho trên Hình 3. Trong đó, việc chọn các giá trị của tỷ số P/P_c cũng với mục đích làm rõ vai trò của áp suất quanh giá trị tới hạn P_c như đã chọn T/T_c nói trên.



Hình 2. Sự phụ thuộc của nhiệt độ T vào bán kính chân trời r_+ tại $P/P_c = 0,75; 1,00; 1,35$



Hình 3. Sự phụ thuộc của nhiệt độ T vào entropy ζ tại $P/P_c = 0,75; 1,00; 1,32$

Bằng cách sử dụng biểu thức của entropy $\zeta = \pi r_+^2$ cũng viết được (2.22) dưới dạng:

$$T/T_c = \frac{-1 + 6(\zeta/\zeta_c) + 3(P/P_c)(\zeta/\zeta_c)^2}{8(\zeta/\zeta_c)^{3/2}}, \quad (2.24)$$

trong đó entropy tối hạn ζ được xác định bởi:

$$\zeta_c = \frac{6\pi Q^2}{k}. \quad (2.25)$$

Sử dụng (2.24) chúng tôi vẽ được sự phụ thuộc của nhiệt độ vào entropy. Hình 3 thể hiện dạng của đường cong $T(\zeta)$ tại một vài giá trị xác định của áp suất.

Các Hình 2 và 3 biểu diễn các đường đẳng áp trong mặt phẳng $T - r_+$ và $T - \zeta$ tương ứng. Như thấy rõ từ các đồ thị, các đường $T(r_+)$ hoặc $T(\zeta)$ đều có cực trị khi $P < P_c$. Điều này một lần nữa cho thấy một cách rõ ràng có sự chuyển pha khí-lỏng như đã nhận xét trên đây.

3. Kết luận

Dựa vào metric của HĐ mang điện Reissner-Nordström RN chúng tôi đã tìm được các biểu thức giải tích cho nhiệt độ, áp suất và thể tích của HĐ. Sau đó chúng tôi sử dụng các biểu thức thu được để tính số và thu được các kết quả sau:

Tại các nhiệt độ nhỏ hơn nhiệt độ tối hạn T_c , vật chất bên ngoài HĐ có thể tồn tại ở pha khí hoặc lỏng. Ngược lại, khi nhiệt độ lớn hơn T_c , vật chất chỉ có thể ở pha khí.

Với các nhiệt độ nhỏ hơn nhiệt độ T_c có thể xảy ra chuyển pha khí-lỏng khi thể tích (hoặc bán kính của đường chân trời) HĐ thay đổi. Kết quả này phù hợp với các nhận xét đã được đưa ra trong [5].

Để kết luận, chúng tôi nhấn mạnh rằng những kết quả thu được ở đây là chỉ ứng với trường hợp $k > 0$. Để có một kết luận đầy đủ hơn thì cần phải xét các trường hợp $k < 0$ và $k = 0$. Đó là vấn đề nghiên cứu tiếp theo mà chúng tôi sẽ thực hiện.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Makoto Natsuume, AdS/CFT Duality User Guide, Volume 903, Springer.
- [2] Steven S. Gubser, 2008. Phase transitions near black hole horizons, hep-th/0505189 PUPT-2163.
- [3] Debabrata Ghorai, Sunandan Gangopadhyay, 2016. Higher dimensional holographic superconductors in Born-Infeld electrodynamics with back-reaction, *Eur. Phys. J. C*, 76:146.
- [4] Debabrata Ghorai, Sunandan Gangopadhyay, Holographic free energy and thermodynamic geometry, Arxiv: 1607.05187v1.
- [5] David Kubizňák, Robert B. Mann, 2012. P-V criticality of charged AdS black holes, arXiv:1205.0559v2.
- [6] Shan-Quan Lan, Gu-Qiang Li, Jie-Xiong Mo, and Xiao-Bao Xu, 2019. *New Phase Transition Related to the Black Hole's Topological Charge*, arXiv:1804.06652v2.
- [7] Debabrata Ghorai, Sunandan Gangopadhyay, 2016. *Holographic free energy and thermodynamic geometry*, arXiv:1607.05187v1.

ABSTRACT

Thermal properties of black hole Reissner-Nordström

Le Viet Hoa¹, Nguyen Tuan Anh² and Dinh Thanh Tam³

¹*Faculty of Physics, Hanoi National University of Education*

¹*Faculty of Energy Technology, University of Electricity*

¹*Department of Mathematics-Physics-Informatics, Tay Bac University*

Based on the metric of the Reissner-Nordström charged black hole was found analytic expressions for the temperature, pressure and volume of the black hole. The numerical results prove that at temperatures less than the critical temperature T_c , the matter outside black hole is similar to Van der Waals real gas in that it can exist in gas or liquid phase and a gas-liquid phase transition may occur when the volume (or radius of the horizon) of black hole changes. Opposite, when the temperature is greater than T_c , the matter can only be in the gas phase. This result is consistent with the known result.

Keywords: thermodynamic properties, black hole, gas-liquid, phase transition.