HNUE JOURNAL OF SCIENCE DOI: 10.18173/2354-1059.2023-0001
Natural Sciences, 2023, Volume 68, Issue 1, pp. 3-12
This paper is available online at http://stdb.hnue.edu.vn

TÍNH CHẤT NGHIỆM CHO MỘT LỚP CÁC BẤT ĐẲNG THỨC HEMI-BIẾN PHÂN KIỂU PARABOLIC

Nguyễn Thị Nhung
Trường Phổ thông Thực hành Sư phạm Tràng An, Trường Đại học Hoa Lư

Tóm tắt. Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu về tính giải được duy nhất và tính chất nghiệm của bất đẳng thức Hemi-biến phân được cho như sau:

$$\langle u'(t), v\rangle + \langle A(u(t)), v\rangle + J^0(t, Mu(t); Mv) \geq \langle g(t, u(t)), v\rangle, \tag{0.1}$$

$$u(0) = u_0, \tag{0.2}$$

với hầu khắp $t \in I := [0, T]$ và với mọi $v \in U$, trong đó U là không gian Banach phản xạ và lồi chặt. Dựa trên lí thuyết toán tử đơn điệu, bổ đề toàn ánh và một số ước lượng, chúng tôi đưa ra các điều kiện đủ cho tính giải được và sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào dữ kiện ban đầu đối với (0.1)-(0.2).
Từ khóa: bất đẳng thức Hemi-biến phân, bổ đề toàn ánh, tính đơn điệu, tính giả đơn điệu, dưới vi phân suy rộng Clarke.

1. Mở đầu

Các bất đẳng thức biến phân là lớp bài toán có ý nghĩa quan trọng xuất phát từ nhiều bài toán trong thực tế, trong khoa học kĩ thuật, trong cơ học và vật lí. Những thập kỉ gần đây, các bài toán bất đẳng thức chứa các yếu tố vi phân và biến phân, cùng những mở rộng của nó, đóng vai trò rất quan trọng trong toán học không chỉ về mặt lí thuyết mà còn bao hàm tính ứng dụng sâu sắc. Một cách cụ thể, các bất đẳng thức biến phân cho phép chúng ta quan sát nhiều lớp bài toán thực tiễn như: các mô hình cơ học cấu trúc [1], bài toán tối ưu [2], bài toán tiếp xúc [3] và đàn hồi [4].

Bài toán bất đẳng thức biến phân tổng quát có thể đưa về một bao hàm thức vi phân chứa toán tử đa trị là dưới vi phân của một hàm lồi, chính thường và nửa liên tục trên. Mở rộng lớp bài toán này, cụ thể khi hàm cho trước không còn thỏa mãn tính chất lồi, thay vào đó là tính Lipschitz địa phương, ta được lớp các bất đẳng thức Hemi-biến phân. Lớp các bất đẳng thức Hemi-biến phân được Panagiotopoulos giới thiệu lần đầu tiên vào

Ngày nhận bài: 6/3/2023. Ngày sửa bài: 23/3/2023. Ngày nhận đăng: 30/3/2023.
Tác giả liên hệ: Nguyễn Thị Nhung. Địa chỉ e-mail: nguyennhunghnue277@gmail.com

những năm 80 của thế kỉ trước [5, 6, 7], nhằm giải quyết các bài toán trong kĩ thuật chứa các yếu tố không đơn điệu (một đòi hỏi ngặt khi nghiên cứu các bất đẳng thức biến phân) (xem [8]). Nghiên cứu các bất đẳng thức Hemi-biến phân giữ một vai trò quan trọng và ngày càng nhận được sự quan tâm của nhiều nhà toán học trong nước và quốc tế (độc giả có thể xem trong [9, 10, 11] và các tài liệu tham khảo trong đó).

Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra một lớp các bất đẳng thức Hemi-biến phân trừu tượng dạng parabolic trên các không gian vô hạn chiều. Cho U là một không gian Banach phản xạ, lồi chặt với chuẩn $\|\cdot\|_U$ và có đối ngẫu U^*. Tích vô hướng của cặp đối ngẫu (U^*, U) được kí hiệu bởi $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Gọi H là không gian Hilbert với chuẩn $|\cdot|_H$ và bộ ba $U \subset H \subset U^*$ là bộ ba tiến hóa (tức là, phép nhúng $U \subset H$ là liên tục và compact, phép nhúng $H \subset U^*$ là liên tục). Giả sử X là một không gian Banach nào đó. Xét bài toán sau: Tìm hàm $u \in C([0,T];U)$ sao cho bất đẳng thức Hemi-biến phân tiến hóa

$$\langle u'(t), v\rangle + \langle A(u(t)), v\rangle + J^0(t, Mu(t); Mv) \geq \langle g(t, u(t)), v\rangle, \tag{1.1}$$

thỏa mãn với mọi $v \in U$, với hầu khắp $t \in I$ và thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$u(0) = u_0, \tag{1.2}$$

trong đó các toán tử cho trước $M : H \to X$, $A : U \to U^*$, $g : I \times H \to H$ được xác định ở những phần sau. Ngoài ra, với mỗi $t \in I$, ta kí hiệu $J^0(t, \cdot\ ;\ \cdot)$ để chỉ đạo hàm theo hướng suy rộng theo nghĩa Clarke của hàm vô hướng liên tục Lipschitz địa phương $J : I \times X \to \mathbb{R}$.

Ngoài phần mở đầu, chúng tôi đưa ra một số vấn đề cơ sở ở mục 2., các điều kiện đặt lên các hàm cho trước được chỉ ra ở mục 3.. Trong mục 4., chúng tôi chứng minh tính giải được của nghiệm và tính chất phụ thuộc liên tục của nghiệm vào dữ kiện ban đầu.

2. Một số vấn đề cơ sở

Trước hết ta đưa ra một số khái niệm và tính chất liên quan đến dưới vi phân suy rộng (xem [12]). Đây là lớp đạo hàm tổng quát hơn lớp đạo hàm cổ điển. Lớp các dưới vi phân này cho phép ta có thể mở rộng khái niệm dưới vi phân cổ điển đối với các hàm không có tính khả vi và thậm chí là không có tính lồi. Chi tiết hơn, các dưới vi phân suy rộng kiểu Clarke cho phép ta khái quát các dưới vi phân của hàm lồi theo nghĩa thông thường.

Giả sử E là một không gian Banach với không gian đối ngẫu E^*, một hàm vô hướng $J : E \to \mathbb{R}$ được gọi là Lipschitz địa phương trên E, nếu với mỗi $u \in E$, tồn tại lân cận $N(u)$ của u trong E và hằng số $L_u > 0$ sao cho

$$|J(u_1) - J(u_2)| \leq L_u \|u_1 - u_2\|_E, \quad \forall u_1, u_2 \in N(u).$$

Kí hiệu $J^0(u; v)$ là đạo hàm suy rộng theo nghĩa Clarke của hàm J theo hướng $v \in E$ tại điểm $u \in E$ và được xác định bởi

$$J^0(u; v) = \limsup_{\lambda \to 0^+,\, z \to u} \frac{J(z + \lambda v) - J(z)}{\lambda}.$$

Khi đó, dưới vi phân suy rộng (theo nghĩa Clarke) của $J : E \to \mathbb{R}$ tại điểm $u \in E$, kí hiệu $\partial J(u)$, là một tập con của E^* được cho như sau

$$\partial J(u) = \{\gamma \in E^* |\ J^0(u; v) \geqslant \langle \gamma, v\rangle,\ \forall v \in E\}.$$

Ta có mệnh đề sau.

Mệnh đề 2.1. *Giả sử $J : E \to \mathbb{R}$ là một hàm Lipschitz địa phương. Khi đó ta có các khẳng định sau:*

(i) với mỗi $u \in E$, hàm $E \ni v \mapsto J^0(u; v) \in \mathbb{R}$ là thuần nhất dương, dưới cộng tính và ta có:

$$|J^0(u; v)| \leq L_u \|v\|_E,\ \forall v \in E,$$

trong đó L_u là hằng số Lipschitz của J tại u;

(ii) hàm $E \times E \ni (u, v) \mapsto J^0(u; v) \in \mathbb{R}$ là nửa liên tục trên;

(iii) với mọi $v \in E$, ta có: $J^0(u; v) = max\{\langle u^*, v\rangle | u^* \in \partial J(u)\}$.

Giả sử U là một không gian Banach. Ta đưa ra các khái niệm về tính đơn điệu của toán tử bởi định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 2.1. *Toán tử $B : U \to U^*$ được gọi là:*

(i) đơn điệu nếu

$$\langle Bu - Bv, u - v\rangle \geq 0,$$

với mọi $u, v \in U$,

(ii) đơn điệu mạnh nếu tồn tại hằng số $M_B > 0$ sao cho

$$\langle Bu - Bv, u - v\rangle \geq M_B \|u - v\|^2,$$

thỏa mãn với mọi $u, v \in U$,

(iii) giả đơn điệu nếu B là bị chặn; và mọi dãy $\{u_n\} \subset U$ sao cho nếu u_n hội tụ yếu đến u trong U và $\limsup\langle Bu_n, u_n - v\rangle \leq 0, \forall v \in U$, thì

$$\langle Bu, u - v\rangle \leq \liminf\langle Bu_n, u_n - v\rangle.$$

(iv) demi-liên tục, nếu ánh xạ $u \mapsto \langle Bu, v\rangle$ liên tục với mọi $v \in U$, nghĩa là, B liên tục từ U vào U^* với tô pô yếu trong U^*.

Định nghĩa 2.2. *Ánh xạ đa trị $B : U \to \mathcal{P}(U^*)$ được gọi là giả đơn điệu suy rộng tương ứng với $D(\mathcal{L})$ (hoặc gọi là $\mathcal{L}$-giả đơn điệu suy rộng), ở đó $\mathcal{L}$: $D(\mathcal{L}) \subset U \to U^*$ là toán tử tuyến tính đóng, xác định trù mật và đơn điệu cực đại, nếu* *(i) với mỗi $u \in U$, tập Bu là khác rỗng, đóng, lồi và bị chặn trong E^*;*

(ii) toán tử B là nửa liên tục trên từ bất kì không gian con hữu hạn chiều nào của U vào U^* với tô pô yếu trong U^*;

(iii) với mọi dãy $\{u_n\} \subset D(\mathcal{L})$ và $\{u_n^*\} \subset U^*$ thỏa mãn

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \text{ trong } U, \\ \mathcal{L}u_n \rightharpoonup \mathcal{L}u \text{ trong } U^*, \\ u_n^* \in Bu_n \text{ với mọi } n \text{ thuộc } \mathbb{N}, \\ u_n^* \rightharpoonup u^* \text{ trong } U^*, \\ \limsup_{n\to\infty} \langle u_n^*, u_n - u\rangle \le 0, \end{cases}$$

thì ta có: $u^* \in Bu$ và $\lim\limits_{n\to\infty} \langle u_n^*, u_n\rangle = \langle u^*, u\rangle$.

Dưới đây ta đưa ra bổ đề toàn ánh (xem [13, Corollary 1, trang 610]) được sử dụng trong chứng minh cho sự tồn tại nghiệm của bài toán (1.1)-(1.2):

Bổ đề 2.1. *Giả sử U là không gian Banach phản xạ và lồi chặt, $L : D(L) \subset U \to U^*$ là toán tử tuyến tính đơn điệu cực đại và $T : U \to 2^{U^*}$ là bị chặn, có tính chất cưỡng và L-giả đơn điệu suy rộng, thì khi đó*

$$Range(L + T) = U^*.$$

3. Các điều kiện của bài toán

Ta đưa ra các điều kiện sau cho các hàm cho trước của bài toán (1.1)-(1.2).

$H(A)$ Toán tử $A : U \to U^*$ thỏa mãn

[(1)]A là giả đơn điệu và demi-liên tục; tồn tại hằng số $\eta_A > 0$, $\alpha_A > 0$ sao cho

$$\|A(v)\|_{U^*} \le \eta_A + \alpha_A \|v\|_U, \quad \text{với mọi } t \in [0,T] \text{ và } v \in U;$$

A đơn điệu mạnh, tức là tồn tại hằng số $\beta_A > 0$ sao cho

$$\langle A(u) - A(v), u - v\rangle \ge \beta_A \|u - v\|_U^2,$$

với mọi $u \in U$.

$H(J)$ $J : I \times X \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

(1) $J(\cdot, v)$ đo được với mọi $v \in X$ và $J(t, \cdot)$ liên tục trên X với hầu khắp $t \in I$;

(2) $J(t, \cdot)$ là liên tục Lipschitz địa phương với mọi $t \in I$;

(3) tồn tại hằng số không âm $\alpha_J > 0$ và hàm $\eta_J \in L^2(0,T;\mathbb{R}_+)$ sao cho

$$\|\partial J(t,v)\|_{X^*} \leq \eta_J(t) + \alpha_J \|v\|_X,$$

với mọi $(t,v) \in I \times X$.

(4) tồn tại hằng số $\beta_J \geq 0$ sao cho

$$\langle \xi_1 - \xi_2, v_1 - v_2 \rangle \geq -\beta_J \|v_1 - v_2\|_X^2,$$

với mọi $\xi_1 \in \partial J(t,v_1), \xi_2 \in \partial J(t,v_2), v_1, v_2 \in X$.

$H(M)$ M là toán tử tuyến tính bị chặn từ H đến X ($M \in \mathcal{L}(H,X)$), chú ý ta sẽ sử dụng $\|M\|, \|M^*\|$ là chuẩn của M và toán tử đối ngẫu M^* tương ứng.

$H(g)$ $g : I \times H \to H$ đo được theo biến thứ nhất, liên tục theo biến thứ hai. Hơn nữa, tồn tại α_g sao cho

$$|g(t,x_1,v_1) - g(t,x_2,v_2)|_H \leq \alpha_g |v_1 - v_2|_H,$$

với mọi v_i trong $H(i = 1,2)$, và $\|g(\cdot, 0_U)\|_H := \gamma_g(\cdot) \in L^2(0,T;\mathbb{R}_+)$, ở đó 0_U là các phần tử không trong U.

$H(0)$ $\beta_A > \|M^*\|\alpha_J$; $\alpha_A > \max\{(\alpha_J \|M\|^2_{\mathcal{L}(H,X)} + \alpha_g)\ell^2, (\beta_J \|M\|^2_{\mathcal{L}(H,X)} + \alpha_g)\ell^2\}$, ở đó ℓ là hằng số của phép nhúng từ U lên H.

4. Tính giải được và tính chất nghiệm

Định lí 4.1. *Giả sử các giả thiết* $H(A), H(J), H(M), H(g)$ *và* $H(0)$ *được thỏa mãn. Khi đó bài toán* (1.1)–(1.2) *có đúng một nghiệm. Hơn nữa, ta có ước lượng sau:*

$$|u_1(t) - u_2(t)|_H \leq e^{-\beta t} |u_{10} - u_{20}|_H \,, \tag{4.1}$$

ở đó $\beta = \beta_B - (\beta_J \|M\|^2 + \alpha_g)\ell^2$ *và* u_1, u_2 *là các nghiệm duy nhất của* (1.1)–(1.2) *tương ứng với các điều kiện ban đầu* u_{10} *và* u_{20}.

Proof. Ta chia chứng minh thành các bước như sau.

Bước 1: Sự tồn tại nghiệm của bài toán.

Ta sẽ sử dụng bổ đề toàn ánh được cho bởi Bổ đề 2.1. Ta giới thiệu các không gian hàm sau:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &:= L^2(0,T;U), \\ \mathcal{H} &:= L^2(0,T;H) = \mathcal{H}^*, \\ \mathcal{U}^* &:= L^2(0,T;U^*), \\ \mathcal{W} &:= \{w \in \mathcal{U} | w' \in \mathcal{U}^*\}, \end{aligned}$$

khi đó ta thu được các bao hàm thức như sau:

$$\mathcal{W} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{H} = \mathcal{H}^* \subset \mathcal{U}^*$$

Cho $\mathcal{A} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}^*$ xác định bởi

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u)(\cdot) &= A(u(\cdot) + u_0) - g(\cdot, u(\cdot) + u_0), \\ \langle \mathcal{A}(u)(t), v \rangle &= \langle A(u(t) + u_0) - g(t, u(t) + u_0); v \rangle, \end{aligned}$$

Hàm $\mathcal{J}$ được cho như sau:

$$\begin{aligned} &\mathcal{J} : \mathcal{U} \to 2^{\mathcal{U}^*}, \\ &\mathcal{J}(u) = \{v \in \mathcal{H} : v(t) \in M^* \partial J(t, Mu(t) + Mu_0)\}. \end{aligned}$$

Đặt

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &: \mathcal{U} \to 2^{\mathcal{U}^*} \\ \mathcal{T}(u) &= \mathcal{A}u + \mathcal{J}u, \\ \mathcal{L} : D(\mathcal{L}) &\subset \mathcal{U} \to \mathcal{U}^*, \\ \mathcal{L}u &= u', \\ D(\mathcal{L}) &= \{u \in \mathcal{U} : u' \in \mathcal{U}^* \quad \text{và} \quad u(0) = 0\} \subset \mathcal{W}, \end{aligned}$$

Từ các thiết lập như trên, bài toán (1.1)–(1.2) được viết ở dạng bao hàm thức như sau:

$$\mathcal{L}u + \mathcal{T}u \ni 0.$$

Ta có các tính chất của toán tử $\mathcal{T}$ dưới đây:

i) Toán tử $\mathcal{T}$ là bị chặn;
Thật vậy do tính bị chặn của $\mathcal{A}$ và tính bị chặn của $\mathfrak{J}$ từ $\mathcal{U}$ đến $2^{\mathcal{U}^*}$.

ii) $\mathcal{T}$ có tính chất cưỡng;
Lấy $u \in \mathcal{U}$ và $u^* \in \mathfrak{J}(u)$, ta có:

$$\begin{aligned} -\langle u^*, u \rangle_{\mathcal{U}^*, \mathcal{U}} &\leq \mathcal{J}^\circ(u; -u) \\ &\leq \max\{\langle w, -u \rangle_{\mathcal{U}^*, \mathcal{U}} | w \in \partial \mathfrak{J}(v)\} \\ &\leq \max \left\{ \int_0^b \langle w(t), -u(t) \rangle_{\mathcal{U}^*, \mathcal{U}} dt | w \in \partial \mathfrak{J}(u) \right\} \\ &\leq \int_0^b \|u(t)\|_U \|M^*\| (n_J(t) + \alpha_J \|u(t)\|_U) dt \\ &\leq \|M^*\| \alpha_J \|u\|_{\mathcal{U}}^2 + \|M^*\| \|n_J\|_{L^2(0,T)} \|u\|_{\mathcal{U}}. \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện H(A) và giả thiết $\beta_A > \|M^*\| \alpha_J$, ta suy ra $\mathcal{A} + \mathcal{J}$ là cưỡng.

iii) $\mathcal{T}$ là $\mathcal{L}$-giả đơn điệu suy rộng.
Vì $\mathcal{J}$ có giá trị khác rỗng, lồi, compact yếu của $\mathcal{U}^*$, nên $\mathcal{T}u$ cũng là ánh xạ có giá trị khác rỗng, lồi, compact yếu trong $\mathcal{U}^*$ với mỗi $u \in \mathcal{U}$.

Ngoaài ra, ánh xạ $\mathcal{J}$ có đồ thị đóng theo dãy trong $\mathcal{U}$ với tô pô yếu của $\mathcal{U}$. Theo [14, Lemma 7.10], $\mathcal{J}$ là compact tương đối yếu địa phương. Vì vậy ta suy ra $\mathcal{J}$ là nửa liên tục trên với tô pô này. Từ điều kiện $H(J)$ ta suy ra $\mathcal{T}$ là nửa liên tục trên yếu từ mọi không gian hữu hạn chiều của $\mathcal{U}$ lên $\mathcal{U}^*$ với tô pô yếu.

Lấy $y, y_n \subset D(\mathcal{L})$ sao cho

$$\begin{aligned} y_n &\rightharpoonup y \text{ trong } \mathcal{U}, \\ \mathcal{L}(y_n) &\rightharpoonup \mathcal{L}(y) \text{ trong } \mathcal{U}^*, \\ y_n^* &\in \mathcal{A}y_n + \mathcal{J}(y_n) \\ y_n^* &\rightharpoonup y^* \text{ trong } \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Ta giả sử $\limsup_n \langle\langle y_n^*, y_n \rangle\rangle \le \langle\langle y^*, y \rangle\rangle$. Thế thì,

$$y_n^* = u_n^* + w_n^* \text{ với } u_n^* = \mathcal{A}y_n, w_n^* \in \mathcal{J}(y_n),$$

Do phép nhúng $\mathcal{U} \subset \mathcal{H}$ là compact, nên $y_n \to y$ trong $\mathcal{U}$. Hơn nữa, từ tính bị chặn của toán tử $\mathcal{J}$, ta có thể chuyển qua giới hạn dãy con hội tụ, không giảm tổng quát ta vẫn giả sử có $w^* \in \mathcal{U}^*$ sao cho

$$w_n^* \rightharpoonup w^* \quad \text{trong} \quad \mathcal{U}^*.$$

Vì $\mathcal{J}$ có đồ thị đóng theo dãy, nên tồn tại $w^* \in \mathcal{J}(y)$ sao cho

$$\begin{aligned} &\limsup_n \langle\langle u_n^*, y_n \rangle\rangle + \langle\langle w^*, y \rangle\rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}^*} \\ &\qquad = \limsup_n \langle\langle u_n^*, y_n \rangle\rangle + \lim_n \langle\langle w_n^*, y_n \rangle\rangle_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}^*} \\ &\qquad = \limsup_n \langle\langle u_n^* + w_n^*, y_n \rangle\rangle \le \langle\langle y^*, y \rangle\rangle, \end{aligned}$$

Vậy ta có:

$$\limsup_n \langle\langle u_n^*, y_n \rangle\rangle \le \langle\langle u^*, y \rangle\rangle,$$

$u^* = y^* - w^*$. Hơn nữa, ta có:

$$u_n^* = y_n^* - w_n^* \rightharpoonup y^* - w^* = u^* \text{ trong } \mathcal{U}^*.$$

Từ giả thiết $H(A)$, $\mathcal{A}$ là $\mathcal{L}$-giả đơn điệu suy rộng, $u^* = \mathcal{A}y$ ta thu được

$$\begin{aligned} \langle\langle y_n^*, y_n \rangle\rangle &= \langle\langle u_n^*, y_n \rangle\rangle + \langle\langle u_n^*, y_n \rangle\rangle_{\mathcal{H}^*,\mathcal{H}} \\ &\to \langle\langle u^*, y \rangle\rangle + \langle\langle u^*, y \rangle\rangle_{\mathcal{H}^*,\mathcal{H}} = \langle\langle y^*, y \rangle\rangle. \end{aligned}$$

Vậy, $\mathcal{T}$ là giả đơn điệu suy rộng tương ứng với $D(\mathcal{L})$.

Mặt khác, $\mathcal{L}$ là tuyến tính và đơn điệu cực đại theo [15, Proposition 32.10], nên áp dụng Bổ đề 2.1, tồn tại $u \in \mathcal{W}$ sao cho

$$\mathcal{L}u + \mathcal{T}u \ni 0,$$

là nghiệm của bài toán (1.1)–(1.2).

Bước 2: Tính duy nhất của nghiệm.
Lấy $u_i (i = 1, 2)$ là các nghiệm của bài toán (1.1)–(1.2) với điều kiện ban đầu $u_i(0) = u_0$. Khi đó ta có:

$$u_i'(t) + A(u_i(t)) + M^*\xi_i(t) = g(t, u_i(t)),$$

ở đó $\xi_i(t) \in \partial J(t, Mu_i(t))$. Với $t \in [0, T]$, trừ từng vế hai đẳng thức trên, sau đó nhân vô hướng với $u_1(t) - u_2(t)$ ta được:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|u_1(t) - u_2(t)|_H^2 &+ \int_0^t \langle A(u_1(s)) - A(u_2(s)), u_1(s) - u_2(s)\rangle ds \\ &+ \int_0^t \langle M^*\xi_1(s) - M^*\xi_2(s), u_1(s) - u_2(s)\rangle ds \\ &= \int_0^t \langle g(s, u_1(s)) - g(s, u_2(s)), u_1(s) - u_2(s)\rangle ds.\end{aligned}$$

Do tính đơn điệu của A và do giả thiết H(g), ta có:

$$\frac{1}{2}|u_1(t) - u_2(t)|_H^2 - \beta_J \int_0^t \|Mu_1(s)) - Mu_2(s)\|_H^2 ds \le \alpha_g \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_H^2\, ds,$$

từ đó

$$|u_1(t) - u_2(t)|_H^2 \le 2(\beta_J\|M\|^2 + \alpha_g) \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_H^2\, ds.$$

Áp dụng bất đẳng thức Gronwall-Bellman ta được $u_1(t) = u_2(t)$ trên $[0, T]$.

Bước 3: Sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào dữ kiện ban đầu.
Gọi $u_i(\cdot), i = 1, 2$ là các nghiệm duy nhất của (1.1) tương ứng với các điều kiện ban đầu u_{10} và u_{20} cho trước. Khi đó ta có:

$$\begin{aligned}u_1'(t) + A(u_1(t)) + M^*\xi_1(t) = g(t, u_1(t)), \xi_1(t) \in \partial J(t, Mu_1(t)),\\ u_2'(t) + A(u_2(t)) + M^*\xi_2(t) = g(t, u_2(t)), \xi_2(t) \in \partial J(t, Mu_2(t)),\end{aligned}$$

Trừ từng vế hai phương trình, sau đó nhân kết quả nhận được với $u_1(t) - u_2(t)$ ta có:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u_1(t) - u_2(t)\right|_H^2 + \frac{\beta_A}{\ell^2}\left|u_1(t) - u_2(t)\right|_H^2 \\
&\quad - \beta_J\|M\|^2\left|u_1(t) - u_2(t)\right|_H^2\left|u_1(t) - u_2(t)\right|_H \\
&\quad \leq \langle u_1'(t) - u_2'(t), u_1(t) - u_2(t)\rangle + \langle A(u_1(t)) - A(u_2(t)), u_1(t) - u_2(t)\rangle \\
&\quad + (M^*\xi_1(t) - M^*\xi_2(t), u_1(t) - u_2(t)) \\
&\quad = (g(t, u_1(t)) - g(t, u_2(t)), u_1(t) - u_2(t)) \\
&\quad \leq \alpha_g\left|u_1(t) - u_2(t)\right|_H^2,
\end{aligned}$$

từ đó ta có:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u_1(t) - u_2(t)\right|_H^2 \leq -\beta\left|u_1(t) - u_2(t)\right|_H^2 + \rho\|x_1(t) - x_2(t)\|_E\left|u_1(t) - u_2(t)\right|_H,$$

ở đó

$$\beta = \frac{\beta_B}{\ell^2} - (\beta_J\|M\|^2 + \alpha_g) > 0.$$

Ta suy ra

$$\frac{d}{dt}(e^{2\beta t}\left|u_1(t) - u_2(t)\right|_H^2) = 2\beta e^{2\beta t}\left|u(t)\right|_H^2 + e^{2\beta t}\frac{d}{dt}\left|u(t)\right|_H^2 \leq 0.$$

Lấy tích phân hai vế từ 0 đến t, ta được

$$e^{2\beta t}\left|u_1(t) - u_2(t)\right|_H^2 - \left|u_{10} - u_{20}\right|_H^2 \leq 0.$$

Từ đó dẫn đến: $e^{\beta t}\left|u_1(t) - u_2(t)\right|_H \leq \left|u_{10} - u_{20}\right|_H$,
hay $\left|u_1(t) - u_2(t)\right|_H \leq e^{-\beta t}\left|u_{10} - u_{20}\right|_H$.

Định lí được chứng minh. □

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Alexander S. Kravchuk, Pekka J. Neittaanmäki, 2007. Variational and Quasi-Variational Inequalities in Mechanics, Solid Mechanics and Its Applications, SMIA, Vol. 147.

[2] Bergounioux, M., 1996. Optimal control of variational inequalities: a mathematical programming approach. (English summary) Modelling and optimization of distributed parameter systems (Warsaw, 1995), 123–130, Chapman&Hall, New York.

[3] Chen, Tao; Huang, Nan-Jing; Sofonea, Mircea, 2022. A differential variational inequality in the study of contact problems with wear. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 67, No. 103619, 19 pp.

[4] Cleja-Ţigoiu, S.; Stoicuţa, N. E., 2019. Variational inequality in classical plasticity. Applications to Armstrong-Frederick elasto-plastic model. *Comput. Math. Appl.*, 77, No. 11, pp. 2953–2970.

[5] Panagiotopoulos P D., 1983. Nonconvex energy functions, hemivariational inequalities and substationary principles. *Acta Mech.*, 42, pp. 160–83.

[6] Panagiotopoulos P D., 1985. Nonconvex problems of semipermeable media and related topics Z. Angew. *Math. Mech.*, 65, pp. 29–36.

[7] Panagiotopoulos P D., 1985. Inequality Problems in Mechanics and Applications. Convex and Nonconvex Energy Functions (Basel: Birkhäuser).

[8] Naniewicz Z and Panagiotopoulos P D, 1995. Mathematical Theory of Hemivariational Inequalities and Applications, (New York: Marcel Dekker, Inc.).

[9] Tam, Vo Minh; Van Hung, Nguyen; Liu, Zhenhai; Yao, Jen Chih, 2022. Levitin-Polyak well-posedness by perturbations for the split hemivariational inequality problem on Hadamard manifolds. *J. Optim. Theory Appl.*, 195, No. 2, pp. 684–706.

[10] Hung, Nguyen Van; Tam, Vo Minh; Pitea, Ariana, 2020. Global error bounds for mixed quasi-hemivariational inequality problems on Hadamard manifolds. Optimization 69, No. 9, pp. 2033–2052.

[11] Faiz, Zakaria; Baiz, Othmane; Benaissa, Hicham; El Moutawakil, Driss, 2023. Analysis and approximation of hemivariational inequality for a frictional thermo-electro-visco-elastic contact problem with damage. *Taiwanese J. Math.*, 27, No. 1, pp. 81–111.

[12] F. Clarke, 1983. Optimization and nonsmooth analysis, Wiley/Interscience, (Reprinted: SIAM Publications, Classics in *Applied Mathematics* 5, 1990).

[13] B.A. Ton, 1971. Nonlinear evolution equations in Banach spaces, *J. Di1erential Equations*, 9, pp. 608–618.

[14] R.R. Phelps, 1989. Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1364, Springer, Berlin.

[15] E. Zeidler, 1990. Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, *IIA and IIB, Springer, New York.*

ABSTRACT

Properties of solutions for a class of parabolic hemivariational inequalities

Nguyen Thi Nhung

Trang An Pedagogical Practice High School, Hoa Lu University

In this paper, we study a class of parabolic hemivariational inequalities in infinite dimensional spaces. We prove the solvability and the continuous dependence on initial conditions for this problem based on surjective lemma, monotone theory and estimates.

Keywords: Hemivariational inequality, surjectivity lemma, monotone and pseudomonotone operator theory, generalized gradient.