CẤU TẠO MẶT BẬC HAI TỪ CÁC TƯƠNG ỨNG XẠ ẢNH

ThS. Nguyễn Thị Kim Hiền
Trường Đại học Thuỷ Lợi

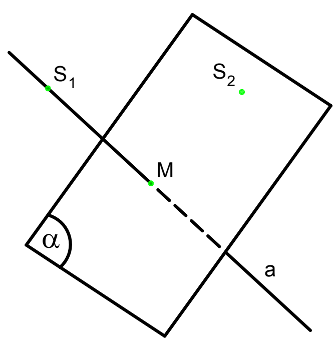
Tóm tắt: *Mặt bậc hai là dạng mặt được ứng dụng nhiều trong thực tiễn, vì vậy đã có nhiều nghiên cứu về mặt bậc hai. Mặt bậc hai có thể được cấu tạo theo những cách khác nhau. Theo các giáo trình hình học xạ ảnh (Nguyễn Cảnh Toàn 1963; четверухин.ф. 1969...),mặt bậc hai tổng quát được xây dựng nhờ tương ứng đối xạ giữa 2 bó đường thẳng và mặt phẳng, mặt kẻ bậc hai và các trường hợp đặc biệt của nó được xây dựng nhờ tương ứng xạ ảnh giữa 2 chùm mặt phẳng.*

Bài báo này nghiên cứu các trường hợp khác nhau của tương ứng đối xạ giữa 2 bó đường thẳng và mặt phẳng để cấu tạo nên các dạng khác nhau của mặt bậc hai. Điều này có nghĩa là ta có một cách xây dựng chung cho các dạng khác nhau của mặt bậc hai.

1. MỆNH ĐỀ: (Hình học xạ ảnh, Nguyễn Cảnh Toàn, 1963)

Quỹ tích các giao điểm của các cặp phần tử tương ứng của hai bó đối xạ là một mặt bậc hai.

Giả sử có hai bó đối xạ : $(S_1)\ \overline{\wedge}\ (S_2)$, a và α' là cặp đường thẳng và mặt phẳng tương ứng thì tập hợp các giao điểm M= a $\cap$ α' là một mặt bậc hai.



Hình 1

2.CÁC TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT CỦA HAI BÓ ĐỐI XẠ.

Dưới đây ta sẽ xét dạng mặt bậc hai được tạo bởi hai bó đối xạ ở các trường hợp đặc biệt:

2.1. Trường hợp tâm hai bó trùng nhau ($S_1 \equiv S_2$):

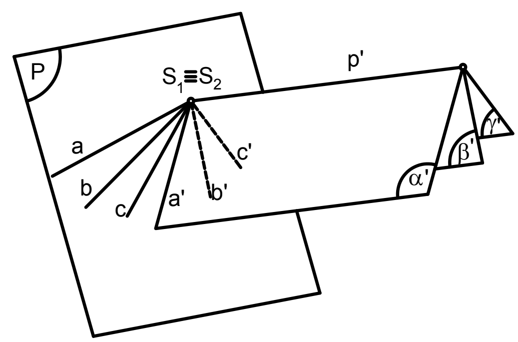
Ta xét mặt phẳng P bất kỳ thuộc bó (S_1) tương ứng với đường thẳng p' thuộc bó (S_2), (Hình 2).

$S_1(P)\ \overline{\wedge}\ S_2\,(p')$ (1)

Ta có chùm đường thẳng S_1(a, b, c,....) thuộc (P) $\overline{\wedge}$ Chùm mặt phẳng S_2 $(\alpha', \beta', \gamma', ..)$ thuộc giá p'. (2)

Gọi a', b', c',.. lần lượt là giao của (P) với α', β', γ',...thì

$S_1(a, b, c,\ldots)\ \overline{\wedge}\ S_2(a', b', c', \ldots)$. (3)



Hình 2

Dễ thấy *tia kép trong tương ứng xạ ảnh giữa hai chùm đường thẳng thuộc quỹ tích tạo nên mặt bậc hai từ hai bó (S_1) và (S_2).*

Như vậy, một mặt phẳng bất kỳ qua $S_1(\equiv S_2)$ cắt mặt bậc hai theo hai đường thẳng

Điều này có nghĩa mặt bậc hai nhận được là ***MẶT NÓN*** có đỉnh là tâm chung của hai bó.

2.2. Trường hợp tia chung của hai bó thuộc các mặt phẳng tương ứng:

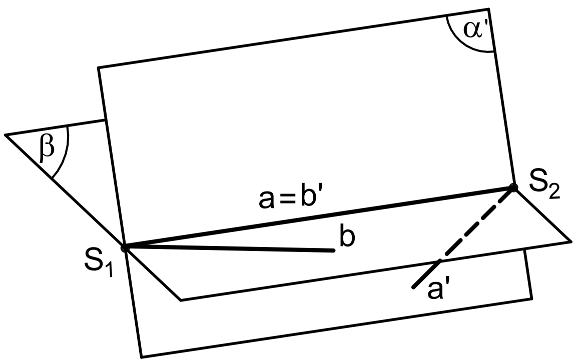
Cho hai bó đối xạ (S_1) và (S_2), ký hiệu tia chung là a$\in$ (S_1) và b'$\in$ (S_2). Các mặt phẳng tương ứng với các tia chung là α'$\in$ (S_2) và β $\in$ (S_1).

Ta xét dạng của mặt bậc hai nếu $a \in \alpha'$ và $b' \in \beta$, (Hình 3)

Như đã chứng minh ở phần trên, đường thẳng S_1S_2 hoàn toàn thuộc quỹ tích cần xét và β, α' là hai mặt phẳng tương ứng với tia chung S_1S_2 nên là các mặt phẳng tiếp xúc với quỹ tích tại hai điểm S_1 và S_2.

Nếu coi mặt phẳng α' thuộc (S_1), vì α' thuộc chùm mặt phẳng giá (a) nên tia tương ứng là a' thuộc α': $S_1(\alpha') \overline{\wedge} S_2(a')$, ở đó $a' \in \alpha'$ nên a' là một đường thẳng thuộc quỹ tích.

Vậy mặt phẳng tiếp xúc với quỹ tích tại S_2 là mặt phẳng α' có giao với quỹ tích là hai đường sinh a' và b'.



Hình 3

Tương tự, mặt phẳng (β) tiếp xúc quỹ tích tại S_1 có giao với quỹ tích là hai đường thẳng a và b.

Ta xét mặt phẳng (P) bất kỳ thuộc chùm mặt phẳng giá (a) thuộc bó (S_1), tương ứng với nó trong bó (S_2) là tia p' thuộc mặt phẳng α'. (Hình 4).

Trong mặt phẳng P:

Chùm đường thẳng tâm $S_1(d, e, f,\ldots) \overline{\wedge}$ Chùm mặt phẳng $p'(\upsilon', \mu', \xi',\ldots)$ (4)

Và ta có: $d' \equiv P \cap (\upsilon')$.

$e' \equiv P \cap (\mu')$.

$f' \equiv P \cap (\xi')$. (5)

Ta nhận được trên mặt phẳng (P) hai chùm đường thẳng xạ ảnh:

$S_1(d, e, f,\ldots) \overline{\wedge} S_2(d', e', f',\ldots)$ (6)

Giao của các cặp tia tương ứng của hai chùm đường thẳng xạ ảnh này là tập hợp các điểm thuộc quỹ tích cần xét nằm trong mặt phẳng (P).

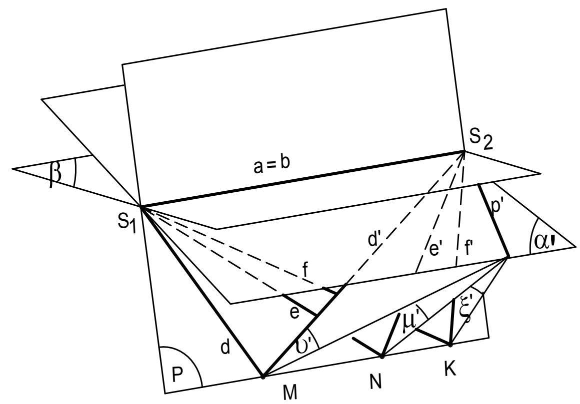
Dễ thấy trong tương ứng này $S_1(a) \overline{\wedge} S_2(b')$; tức đường thẳng nối hai tâm là tia tự ứng.

Vì vậy: $S_1(d, e, f,\ldots) \overset{=}{\wedge} S_2(d', e', f',\ldots)$ (7)

Giao của các cặp tia tương ứng của các tương ứng này thuộc quỹ tích.

Vậy quỹ tích thuộc (P) là hai đường thẳng : S_1S_2 và MN.

Với: $M = d \cap d'$. và $N = e \cap e'$. (8)



Hình 4

Từ những điều trình bày ở trên ta thấy mặt bậc hai nhận được có tính chất:

- *S_1S_2 là đường sinh thuộc mặt bậc hai (a= b').*
- *Một mặt phẳng bất kỳ chứa S_1S_2 cắt mặt bậc hai theo một đường sinh nữa (MN).*
- *Qua hai điểm khác nhau ($S_1 \neq S_2$) của đường sinh S_1S_2, hai mặt phẳng tiếp xúc với mặt bậc hai là khác nhau.*

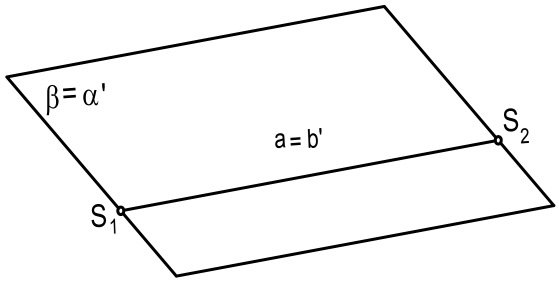
Từ đó ta thấy quỹ tích nhận được là **MẶT KẺ BẬC HAI.**

2.3. Trường hợp các mặt phẳng ứng với tia chung trùng nhau:

Đây là trường hợp đặc biệt của trường hợp 2.2, Khi $\alpha' \equiv \beta$ (Hình 5)

Như vậy, ta nhận được một mặt kẻ, mà qua hai điểm $S_1 \neq S_2$ trên đường sinh S_1S_2 ta có hai mặt phẳng tiếp xúc trùng nhau. Nói cách khác, mặt phẳng tiếp xúc với mặt kẻ bậc hai dọc theo một đường sinh

Vậy quỹ tích có dạng là **nón (hoặc trụ) bậc hai**.



Hình 5

2.4. Trường hợp chùm mặt phẳng (S_1S_2) chiếu chùm đường thẳng tương ứng:

Ta xét trường hợp chùm mặt phẳng S_1S_2 (α, β, γ,..) thuộc bó (S_1) liên hệ phối cảnh với chùm đường thẳng tương ứng tâm S_2 (p', q', r',…) (Hình 6).

Ký hiệu : S_1S_2 (α, β, γ,..) $\overline{\overline{\wedge}}$ S_2(p', q', r',…) (9)

Nếu gọi φ_2 là mặt phẳng tương ứng tia chung S_1S_2 thì rõ ràng α' chứa (p', q', r',…) nên α' thuộc quỹ tích cần tìm.

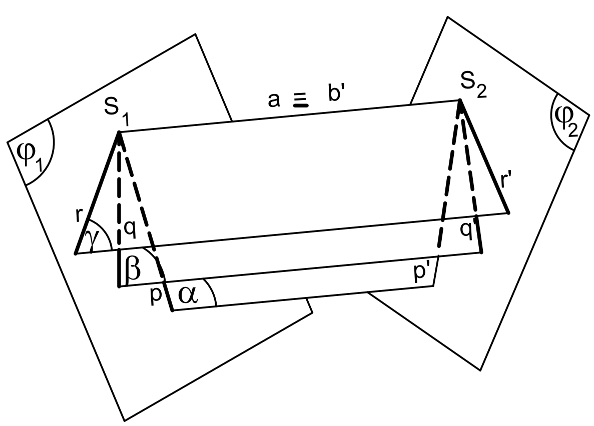
Tương tự, gọi φ_1 là mặt phẳng thuộc bó (S_1), có tia tương ứng thuộc bó (S_2) là b'(S_1S_2).

Xét mặt phẳng α thuộc bó (S_2), α xác định bởi hai tia p' và b'.

Ta có: p' ∈ (S_2) $\overline{\wedge}$ (α) ∈ (S_1). (10)

Vì b' ∈ (S_2) $\overline{\wedge}$ φ_1 ∈ (S_1). (11)

→ α (p'∩ b') $\overline{\wedge}$ p (α ∩ φ_1) (12)



Hình 6

Như vậy:

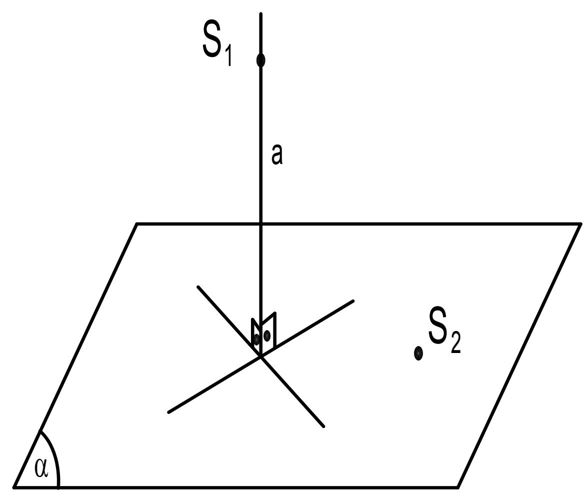
Chùm mặt phẳng S_2S_1 (α, β, γ,..) $\overline{\overline{\wedge}}$ S_1 (p, q, r,…)

Mà (p, q, r,…) thuộc β nên β cũng thuộc quỹ tích.

Vậy với trường hợp vừa xét của hai bó đối xạ, mặt bậc hai có dạng suy biến thành ***HAI MẶT PHẲNG*** (là hai mặt phẳng tương ứng với tia chung S_1S_2).

2.5. Trường hợp các tia và các mặt phẳng tương ứng vuông góc với nhau a ⊥ α'

Với 2 bó đối xạ (S_1) $\overline{\wedge}$ (S_2), a và α' là cặp đường thẳng và mặt phẳng tương ứng, a ⊥ α'. Quỹ tích nhận được là mặt cầu đường kính S_1S_2, (Hình 7).



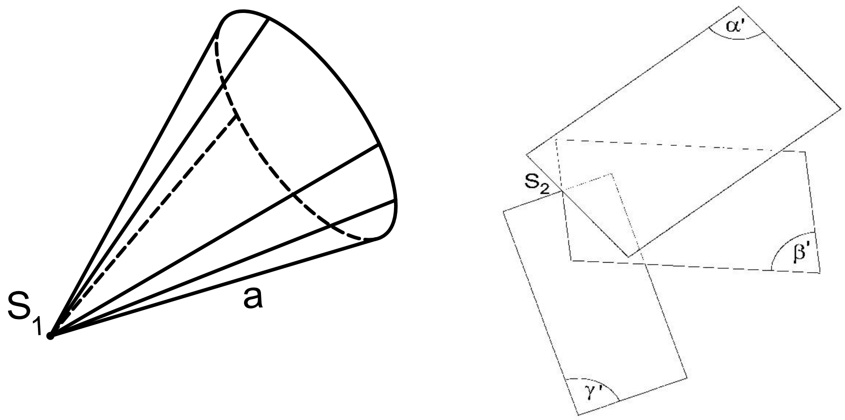
Hình 7

2.6. Trường hợp trong tương ứng có một cặp đường thẳng và mặt phẳng tương ứng song song (a // α'):

Quỹ tích nhận được có 1 điểm vô tận, nên mặt bậc hai có dạng Paraboloid.

2.7. Trường hợp trong tương ứng đã cho tồn tại một nón đường thẳng song song với bó mặt phẳng tương ứng, nón S_1(a) $\overline{\wedge}$ S_2(α'):

Quỹ tích nhận được có chứa một đường cong vô tận, nên mặt bậc hai có dạng là **HYPECBOLOID**. (Hình 8)



Hình 8

2.8. Trường hợp chung, trong tương ứng đã cho không tồn tại cặp đường thẳng và mặt phẳng nào song song nhau

Mặt bậc hai nhận được có dạng là **ELLIPSOID.**

3. KẾT LUẬN:

Trên đây đã trình bày cách tạo các dạng khác nhau của mặt bậc hai từ các tương ứng đối xạ khác nhau giữa 2 bó.

Các tính chất của mặt bậc hai hoàn toàn có thể suy từ tính chất của tương ứng đối xạ giữa 2 bó (trong phạm vi bài báo không trình bày ở đây). Việc nghiên cứu mặt bậc hai từ các tương ứng xạ ảnh sẽ đem lại nhiều ứng dụng trong việc giải các bài toán liên quan và biểu diễn mặt bậc hai, vì các tính chất xạ ảnh bất biến qua các phép chiếu. Vấn đề này sẽ được tiếp tục nghiên cứu và trình bày ở các bài báo sau.

Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Cảnh Toàn (1963), “Hình học xạ ảnh” NXB Giáo dục Hà Nội.
2. ПРОЕКТИВНАЯ ТЕОМЕТРИЯ .(ИЗД. ЧЕТВЕРУХИНН.Ф.,1969)
3. ПРОЕКТИВНАЯ ТЕОМЕТРИЯ (Г.ь. Гурebur, 1960)
4. Вb1СШАЯ ТЕОМЕТРИЯ
(Н.В. ЕФИМОВ, ИЗДАТЕЛьСТВО “НАУКА” 1971)
5. Projektiv Geometria (Dr. Szász Gábor, Budapest, 1977)
6. Geometria Alapjai (Hajós György, Budapest, 1980).

Abstract

ON CONSTRUCTION OF QUADRIC SURFACES FROM THE PROJECTIVE CORRESPONDENCES

Quadric surfaces is surface having many applications in practice, so have many research about it. Have some different ways to construct a Quadric surface. In the book on Projective Geometry (Nguyen Canh Toan, четверухин.ф.1969...), general Quadric surface have constructed basing on the correlation between two bundles of lines and planes, and in the special case it is constructed by the projective correspondences of two bundles of planes.

In this paper, we introduce the different cases of the correlative correspondences between two bundles of lines and planes to obtain the different forms of Quadric surface. And then we have a general construction for different forms of Quadric surface.