DẠNG TIỆM CẬN CỦA SÓNG TRUYỀN TRONG MÔI TRƯỜNG ĐÀN HỒI PHÂN LỚP TUẦN HOÀN KHI XẤP XỈ SÓNG DÀI

Nguyễn Thị Khánh Linh[1], **Trần Thị Trâm**[2]

Tóm tắt: *Bài báo trình bày bài toán truyền sóng trong môi trường đàn hồi, phân lớp tuần hoàn trong trường hợp xấp xỉ sóng dài, hay khi các lớp đều mỏng. Các lớp vật liệu được giả thiết là không nén được và có biến dạng trước. Để giải quyết bài toán, phương pháp khai triển tiệm cận đã được sử dụng. Các biểu diễn tiệm cận của chuyển dịch, ứng suất đã được thiết lập. Vận tốc sóng được biểu diễn thành chuỗi luỹ thừa của tham số bé* $\varepsilon = k\tilde{h}$*, trong đó* k *là số sóng,* $\tilde{h}$ *(được xác định trong công thức (3)) là độ dày một chu kỳ. Ba hệ số đầu tiên của chuỗi được xác định một cách trực tiếp. Các công thức truy hồi đã được thiết lập để xác định các hệ số tiệm cận bậc cao còn lại.*

Từ khóa: Truyền sóng, môi trường phân lớp tuần hoàn, dạng tiệm cận.

1. MỞ ĐẦU

Các bài toán truyền sóng trong môi trường đàn hồi (J. D. Achenback, 1973, A. H. Nayfeh, 1995, J. M. Carione, 2001) có ứng dụng to lớn trong nhiều lĩnh vực khác nhau của khoa học và kỹ thuật như Âm học, Địa chấn học, Địa vật lý, Khoa học vật liệu, Khoa học đánh giá không hư hỏng, Chẩn đoán y học bằng hình ảnh, Công nghệ viễn thông,... Vì các cấu trúc mỏng xuất hiện nhiều trong thực tế, nên sự truyền sóng trong các cấu trúc này là đề tài thu hút sự quan tâm nghiên cứu của nhiều tác giả, chẳng hạn (H. F. Tiersten, 1973,..., G. A. Rogerson, 1999).

Đối với các bài toán truyền sóng, mục tiêu cơ bản là tìm ra phương trình tán sắc, có dạng: $c = \omega/k = F(p1, p2,...)$ trong đó ω là tần số sóng, k là số sóng, c là vận tốc sóng, p_i là các tham số vật liệu. Sau khi xác định vận tốc sóng từ phương trình tán sắc, các đại lượng khác như chuyển dịch, ứng suất,... mới được xác định. Mặt khác, phương trình tán sắc của sóng là công cụ quan trọng để giải bài toán ngược: xác định các đặc trưng của vật liệu từ các giá trị đo được của vận tốc sóng.

Khi các lớp vật liệu đều mỏng, hay khi xấp xỉ sóng dài, ta có:

$$0 < \varepsilon = k.\tilde{h} << 1 \tag{1}$$

trong đó $\tilde{h}$ là độ dài đặc trưng của cấu trúc (chẳng hạn, $\tilde{h}$ là độ dầy của một chu kỳ của một cấu trúc phân lớp tuần hoàn). Với giả thiết (1), phương trình tán sắc có dạng tiệm cận như sau:

$$c^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \Omega_1 + \varepsilon\Omega_2 + \varepsilon^2\Omega_3 + ... = \sum_{m=0}^{\infty}\Omega_{m+1}\varepsilon^m \tag{2}$$

trong đó Ω_m là các đại lượng cần xác định.

Norris và Santosa (A. Norris, et al, 1992) đã nghiên cứu sự truyền sóng SH (shear wave), sóng một thành phần (phương dao động của sóng vuông góc với phương truyền sóng), trong môi trường đàn hồi phân lớp tuần hoàn không có biến dạng trước. Các tác giả đã tìm ra các công thức xác định Ω_1, Ω_3 và chứng minh được rằng $\Omega_2 = 0$. Gần đây, bài toán truyền sóng "Lamb" (sóng hai thành phần: là sóng dạng tấm hay là một dạng dao động trong các tấm mỏng có độ dày vật liệu nhỏ hơn bước sóng và dạng sóng này truyền trong toàn bộ tiết diện của môi trường), trong môi trường đàn hồi phân lớp tuần hoàn, nén được, có biến dạng trước, được nghiên cứu trong (Bui Thanh Tu, et al, 2009). Các tác giả đã chứng minh được rằng $\Omega_{2m} = 0$, $\forall m \geq 1$, và tìm ra các công thức tính Ω_1, Ω_3, công thức truy hồi để xác định Ω_{2m+1}, $\forall m \geq 2$.

Bài bào này là sự tiếp tục của nghiên cứu (Bui Thanh Tu, et al, 2009) cho trường hợp môi

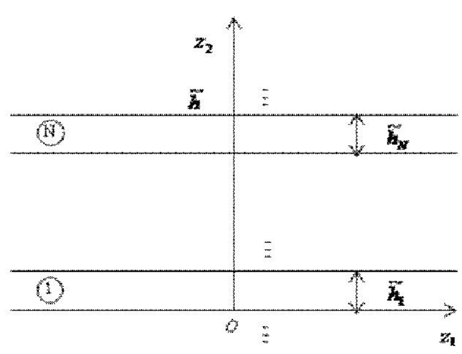
[1] *Bộ môn Cơ học kỹ thuật, Khoa Cơ khí, Trường Đại học Thủy Lợi.*
[2] *Bộ môn lý thuyết, Khoa Đại học Đại cương, Trường Đại học Mỏ - Địa chất.*

trường là không nén được tức là *nghiên cứu sóng Lamb (sóng hai thành phần) trong môi trường đàn hồi, không nén được và có biến dạng trước)*. Đối với môi trường không nén được, sự xuất hiện thêm một ẩn hàm (là nhân tử Lagrange hay áp lực thủy tĩnh) làm cho bài toán trở nên phức tạp hơn. Để vượt qua trở ngại này, các tác giả đã tìm cách đưa ẩn hàm này ra khỏi các phương trình cơ bản, và kết quả là nhận được một hệ bốn phương trình đối với biên độ của hai thành phần chuyển dịch và hai thành phần ứng suất, có dạng tương tự như đối với trường hợp nén được. Áp dụng các kỹ thuật được trình bầy trong (Bui Thanh Tu, et al, 2009), các công tính Ω_1, Ω_3, công thức truy hồi để xác định Ω_{2m+1} ($m \geq 2$) đã được tìm ra, và các đẳng thức Ω_{2m}, $\forall m \geq 2$ đã được chứng minh.

2. ĐẶT BÀI TOÁN

Xét sự truyền của sóng Lamb (sóng hai thành phần) trong môi trường vô hạn, phân lớp tuần hoàn, mỗi chu kỳ gồm *N* lớp vật liệu khác nhau (N ≥ 2). Giả sử các lớp vật liệu là đàn hồi, không nén được và có biến dạng ban đầu thuần nhất (M. A. Dowaikh, et al, 1990, G. A. Rogerson, 1999). Tại trạng thái biến dạng ban đầu ta sử dụng hệ tọa độ Đề-các vuông góc $Oz_1z_2z_3$ chung cho cả môi trường, trong đó mặt phẳng Oz_1z_3 trùng với mặt đáy của lớp đầu tiên của một chu kỳ nào đó (xem hình vẽ 1). Ký hiệu $\tilde{h}$ và $\tilde{h}$ là độ dày lớp thứ *i* và độ dày một chu kỳ tại trạng thái ban đầu, khi đó ta có:

$$\tilde{h} = \tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 + \cdots + \tilde{h}_N. \quad (3)$$



Hình 1

Bỏ qua lực khối, xét trường hợp biến dạng phẳng:

$$u_1 = u_1(z_1, z_2, \tau), u_2 = u_2(z_1, z_2, \tau),\ u_3 \equiv 0$$

phương trình chuyển động đối với nhiễu chuyển dịch có dạng (M. A. Dowaikh, et al, 1990, G. A. Rogerson, 1999)

$$\begin{cases} s_{11,1} + s_{21,2} = \rho \ddot{u}_1 \\ s_{12,1} + s_{22,2} = \rho \ddot{u}_2 \end{cases} \quad (4)$$

trong đó dấu "," chỉ đạo hàm theo các biến không gian z_i, dấu "˙" biểu thị đạo hàm theo thời gian τ, ρ: khối lượng riêng của vật liệu

$$s_{11} = B^*_{1111} u_{1,1} + B_{1122} u_{2,2} - p^* \quad (5)$$

$$s_{22} = B_{1122} u_{1,1} + B^*_{2222} u_{2,2} - p^* \quad (6)$$

$$s_{21} = B_{2121} u_{1,2} + B^*_{2112} u_{2,1} \quad (7)$$

$$s_{12} = B_{1212} u_{2,1} + B^*_{1221} u_{1,2} \quad (8)$$

p^* là nhiễu áp lực thủy tĩnh

$$B^*_{ijkl} = B_{ijkl} + p \quad (9)$$

trong đó *p* là áp lực thủy tĩnh tại trạng thái ban đầu, B_{ijkl} được xác định bởi các công thức sau (M. A. Dowaikh, et al, 1990, G. A. Rogerson, 1999):

$$B_{iijj} = \lambda_i \lambda_j \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j}$$

$$B_{ijij} = \begin{cases} \left(\lambda_i \dfrac{\partial W}{\partial \lambda_i} - \lambda_j \dfrac{\partial W}{\partial \lambda_j}\right) \dfrac{\lambda_i^2}{\lambda_i^2 - \lambda_j^2}, \\ (i \neq j, \lambda_i \neq \lambda_j) \\ \dfrac{1}{2}\left(B_{iiii} - B_{iijj} + \lambda_i \dfrac{\partial W}{\partial \lambda_i}\right) \\ (i \neq j, \lambda_i = \lambda_j) \end{cases}$$

$$B_{ijji} = B_{jiij} = B_{ijij} - \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i}\ (i \neq j) \quad (10)$$

λ_i là các độ dãn chính của biến dạng (M. A. Dowaikh, et al, 1990, G. A. Rogerson, 1999), và $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$ (điều kiện không nén được ở trạng thái ban đầu), $W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ là thế năng đàn hồi. Chú ý rằng λ_i là hằng số đối với từng lớp vật liệu, và có giá trị khác nhau đối với các lớp vật liệu khác nhau.

Điều kiện không nén được đối với nhiễu chuyển dịch là

$$u_{1,1} + u_{2,2} = 0 \tag{11}$$

Từ (7) ta suy ra

$$u_{1,2} = \frac{1}{B_{2121}} s_{21} - \frac{B^*_{2112}}{B_{2121}} u_{2,1} \tag{12}$$

Từ điều kiện không nén được (11)

$$u_{2,2} = -u_{1,1} \tag{13}$$

Từ (6), (13) suy ra

$$p^* = -s_{22} + (B_{2211} - B^*_{2222}) u_{1,1} \tag{14}$$

Từ (14), (5) và phương trình thứ nhất của (4), ta có

$$s_{21,2} = \rho \ddot{u}_1 - 2\beta u_{1,11} - s_{22,1} \tag{15}$$

trong đó $2\beta = B^*_{1111} + B^*_{2222} - 2B_{1122}$

Tương tự, từ (8) và phương trình thứ hai của (4), ta được

$$s_{22,2} = \rho \ddot{u}_2 - \delta u_{2,11} - \frac{B^*_{1221}}{B_{2121}} s_{21,1} \tag{16}$$

ở đây $\delta = B_{1212} - \dfrac{B^{*2}_{1221}}{B_{2121}}$.

Dưới dạng ma trận (toán tử) bốn phương trình (12), (13), (15), (16) được viết như sau

$$\frac{\partial \xi}{\partial z_2} = M\xi \tag{17}$$

trong đó

$$\xi = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}^T; \qquad M = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{B^*_{2112}}{B_{2121}}\partial_1 & \dfrac{1}{B_{2121}} & 0 \\ -\partial_1 & 0 & 0 & 0 \\ \rho\partial_t^2 - 2\beta\partial_1^2 & 0 & 0 & -\partial_1 \\ 0 & \rho\partial_t^2 - 2\beta\partial_1^2 & -\dfrac{B^*_{2112}}{B_{2121}}\partial_1 & 0 \end{bmatrix}$$

trong đó $\partial_1 = \dfrac{\partial}{\partial z_1}$, $\partial_1^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial z_1^2}$, $\partial_t^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial \tau^2}$.

Giả sử sóng truyền theo hướng Oz_1 với vận tốc c, số sóng k. Khi đó ta tìm nghiệm của (17) dưới dạng sau:

$$u_1 = U_1(z)e^{ik(z_1 - ct)},\ u_2 = U_2 e^{ik(z_1 - ct)},$$
$$s_{21} = kT_1(z)e^{ik(z_1 - ct)},\ s_{22} = kT_2(z)e^{ik(z_1 - ct)}. \tag{18}$$

trong đó $z = kz_2$. Thay (18) vào (12), (13), (15), và (16) ta thu được

$$U_1' = \frac{1}{B_{2121}} T_1 - i\frac{B^*_{2112}}{B_{2121}} U_2; \quad U_2' = -iU_1$$
$$T_1' = (2\beta - \rho c^2)U_1 - iT_2,$$
$$T_2' = (\delta - \rho c^2)U_2 - i\frac{B^*_{1221}}{B_{2121}} T_1. \tag{19}$$

dấu phẩy trong (19) chỉ đạo hàm theo biến z. Dưới dạng ma trận (19) được viết dưới như sau

$$\frac{dY(z)}{dz} = B(z)Y(z), \tag{20}$$

trong đó

$$Y(z) = \begin{bmatrix} U_1(z) & U_2(z) & T_1(z) & T_2(z) \end{bmatrix}^T,$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -i\dfrac{B^*_{2112}}{B_{2121}} & \dfrac{1}{B_{2121}} & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 2\beta - \rho c^2 & 0 & 0 & -i \\ 0 & \delta - \rho c^2 & -i\dfrac{B^*_{1221}}{B_{2121}} & 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

Do $B(z)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ $k\tilde{h}$, theo định lý Floquet ta có

$$Y(0) = Y(k\tilde{h}) \tag{22}$$

Nhân cả hai vế của (20) với $\tilde{h}$ và chú ý $z = kz_2$ ta có:

$$\frac{dY}{d(z_2/\tilde{h})} = k\tilde{h}BY. \tag{23}$$

Đưa vào biến mới $y_3 = z_2/\tilde{h}$, khi đó (23) có dạng:

$$\frac{dY(y_3)}{dy_3} = \varepsilon B(y_3)Y(y_3) \quad (24)$$

Từ điều kiện (22) suy ra nghiệm của (24) thỏa mãn điều kiện tuần hoàn

$$Y(1) = Y(0) \quad (25)$$

Như vậy bài toán đưa về tìm nghiệm của (24) trên đoạn [0, 1] với điều kiện (25).

3. PHƯƠNG TRÌNH TÁN SẮC

Như đã biết phương trình tán sắc được biểu diễn bởi (2), trong đó $\Omega_m \ (m \geq 1)$ là các đại lượng cần tìm. Thay (2) vào (21) ta được:

$$B = B_0 + \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + ... \quad (26)$$

trong đó:

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 & -i\dfrac{B^*_{2112}}{B_{2121}} & \dfrac{1}{B_{2121}} & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 2\beta - \rho\Omega_1 & 0 & 0 & -i \\ 0 & \delta - \rho\Omega_1 & -i\dfrac{B^*_{1221}}{B_{2121}} & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_j = -\rho\Omega_{j+1}L, \forall j = 1,2,3,...,$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.1. Biểu diễn nghiệm Y

Để giải (24) ta khai triển ***Y*** dưới dạng:

$$\boldsymbol{Y} = Y_0 + \varepsilon^1 Y_1 + \varepsilon^2 Y_2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n Y_n. \quad (26)$$

Tiến hành tương tư như trong (Bui Thanh Tu, et al, 2009), ta có

$$Y_j(y_3) = R_{j-1}(y_3)Y(0),\ j = 0,1,2...., \quad (27)$$

trong đó $R_{-1} = I$ (ma trận đơn vị),

$$R_n(y_3) = T_n(y_3) + \int^{y_3} B_n, \quad \forall n \geq 1, \quad (28)$$

$$T_n(y_3) = \sum_{m=1}^{n} \int^{y_3} B_{n-m}R_{m-1} = \int^{y_3} B_{n-1}R_0 + \int^{y_3} B_{n-2}R_1 + \cdots + \int^{y_3} B_0 R_{n-1}, \quad (\forall n = 1,2,\ldots) \quad (29)$$

$$R_0 = T_0 = \int^{y_3} B_0, \quad \int^{y_3} \Gamma = \int_0^{y_3} \Gamma(x)dx. \quad (30)$$

Thay (27) vào (26), ta được:

$$\mathbf{Y(y_3)} = \left[I + \varepsilon^1 R_0(y_3) + \varepsilon^2 R_1(y_3) + \cdots\right]Y(0) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n R_{n-1}(y_3)\right]Y(0). \quad (31)$$

Thay (31) vào (25) ta có:

$$\left[S_0 + \varepsilon^1 S_1 + \varepsilon^2 S_2 + \cdots\right]Y(0) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n S_n\right]Y(0) = 0 \quad (32)$$

trong đó

$$S_n = R_n(1), \qquad n = 0,1,2\ldots. \quad (33)$$

Để (32) có nghiệm khác không thì định thức của hệ phải bằng không, tức là:

$$\det\left[\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n S_n\right] = \det\left[S_0 + \varepsilon^1 S_1 + \varepsilon^2 S_2 + \cdots + \varepsilon^j S_j + \cdots\right] = 0. \quad (34)$$

Ký hiệu A^j, B^j, C^j, D^j lần lượt là các ma trận cột thứ 1, thứ 2, thứ 3, thứ 4 của ma trận $S_j,\ j = 0,1,2,\ldots$, khi đó phương trình (34) có dạng:

$$\begin{aligned} \det\Big[\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i A^i, \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j B^j, \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k C^k, \sum_{h=0}^{\infty} \varepsilon^h D^h\Big] = \det\big[&A^0 + \varepsilon A^1 + \varepsilon^2 A^2 + \cdots + \varepsilon^j A^j + \cdots, \\ &B^0 + \varepsilon B^1 + \varepsilon^2 B^2 + \cdots + \varepsilon^j B^j + \cdots, \\ &C^0 + \varepsilon C^1 + \varepsilon^2 C^2 + \cdots + \varepsilon^j C^j + \cdots, \\ &D^0 + \varepsilon D^1 + \varepsilon^2 D^2 + \cdots + \varepsilon^j D^j + \cdots\big] = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

Từ (35), suy ra

$$\sum_{0\le i,j,k,h\le m}^{i+j+k+h=m} \det[A^i B^j C^k D^h] = 0, \qquad (m = 0, 1, 2, ...). \tag{36}$$

3.2 Xác định Ω_1

Tư tượng như trong (Bui Thanh Tu, et al, 2009), sử dụng (28), (34) và (36) với $m = 0, 1, 2$ dẫn đến

$$\Omega_1 = \frac{\langle \delta \rangle - \left\langle \dfrac{B^*_{2112}}{B_{2121}} \right\rangle^2 \left\langle B^{-1}_{2121} \right\rangle^{-1}}{\langle \rho \rangle} \tag{37}$$

$$\Omega_2 = 0$$

$$\Omega_3 = -\left(\langle \rho \rangle s^0_{13}\right)^{-1} \times \left[s^2_{12} s^0_{43} - s^2_{13} s^0_{42} + s^2_{43} s^0_{12} - t^2_{42}(1) s^0_{13} - M \right]. \tag{39}$$

trong đó: $s^0_{ij}, s^2_{ij}, t^2_{42}$ là các phần tử trong các ma trận S_0, S_2, T_2 và

$$M = \det[A^1 B^1 C^0 D^0] + \det[A^1 B^0 C^1 D^0] + \det[A^0 B^1 C^0 D^1] + \det[A^0 B^0 C^1 D^1]. \tag{40}$$

với $A^0, B^0, C^0, D^0, A^1, B^1, C^1, D^1$ là các ma trận cột xấp xỉ bậc 0 và bậc 1 của các ma trận A^j, B^j, C^j, D^j.

Ký hiệu $\langle f \rangle := \int_0^1 f(y_3)dy_3$ là giá trị trung bình của hàm f trên đoạn [0, 1].

Tiến hành tương tự như trong bài báo (Bui Thanh Tu, et al, 2009), ta thu được kết quả sau đây

$$\Omega_{2n} = 0, \qquad \forall n = 1, 2, 3, \dots \tag{41}$$

$$\Omega_{2n+1} = -\left(\langle \rho \rangle s^0_{42}\right)^{-1} \times \begin{bmatrix} s^{2n}_{12} s^0_{43} - s^{2n}_{13} s^0_{42} + s^{2n}_{43} s^0_{12} - t^{2n}_{42}(1) s^0_{13} \\ -\sum\limits_{0\le u,v,s,t<2n}^{u+v+s+t=2n} \det[A^u B^v C^s D^t] \end{bmatrix}, \tag{42}$$

$$\forall n \ge 1$$

trong đó: $s^0_{ij}, s^{2n}_{ij}, t^{2n}_{42}$ là các phần tử trong các ma trận S_0, S_{2n}, T_{2n} và $\sum\limits_{0\le u,v,s,t<2n}^{u+v+s+t=2n} \det[A^u B^v C^s D^t]$ được xác định từ (35).

Công thức (42) chính là công thức truy hồi cần tìm để tính $\Omega_{2n+1}, n \ge 1$.

4. KẾT LUẬN

Bài báo nghiên cứu bài toán truyền sóng Lamb (sóng hai thành phần) trong môi trường đàn hồi phân lớp tuần hoàn, không nén được, có biến dạng trước. Với giả thiết các lớp vật liệu đều mỏng, hay khi xấp xỉ sóng dài, trường sóng, cũng như vận tốc sóng được biểu diễn thành chuỗi lũy thừa của tham số bé ε. Kết quả chính của bài báo là xác định được các hệ số trong khai triển tiệm cận của vận tốc sóng. Cụ thể:

Tìm ra các công tính W_1, W_3, công thức truy hồi để xác định W_{2m+1}, "m ³ 2. Chứng minh được rằng $W_{2m} = 0$, "m ³ 1.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

J. D. Achenbach, (1973), *Wave propagation in Elastic Solids*, North-Holland, Amsterdam 1973.

A. H. Nayfeh, (1995), *Wave propagation in layered anisotropic media with applications to composites*, Elsevier.

J. M. Carcione, (2001), *Wave fields in real media: wave propagation in anisotropic anelastic and porous media*, Pergamon.

H. F. Tiersten, (1969), *Elastic surface waves guided by thin films*, J. Appl. Phys., Vol. 40, pp. 770-789.

A. H. Nayfeh, (1974), *Time-harmonic waves propagating normal to the layers of multilayered periodic media*, J. Appl. Mech, Vol. 41, pp. 92-96.,

A. Norris and F. Santosa, (1992) *Shear wave propagation in a periodically layered medium – an asymptotic theory*, Wave Motion, Vol. 16, pp. 33-55

Pham Chi Vinh, (1994), *Propagation of the floquet wave along to layers of multilayered periodic media with homogenenous initial deformations*, Proc. NSCT of Vietnam, Vol. 6, No. 2, pp. 21-31.

Bui Thanh Tu, Pham Chi Vinh, Nguyen Thi Khanh Linh, (2009), *Asymptotic expansion of the dispersion equation of lamb waves in periodically layered elastic media*, Vietnam Journal of Mechanics, Vol. 31, pp. 31-46.

M. A. Dowaikh and R. W. Ogden, (1990), *On Surface Waves and Deformations in a Pre-stressed Incompressible Elastic Solid*, IMA Journal of Applied Mathematics, Vol. 44, pp. 261-284

G.A. Rogerson, K.J. Sandiford, (1999), *Harmonic wave propagation along a non-principal direction in a pre-stressed elastic plate*, International Journal of Engineering Science, Vol. 37, pp. 1663 ± 1691.

Abstract:

ASYMPTOTIC EXPANSION OF THE DISPERSION EQUATION OF TWO-COMPONENT WAVE IN PERIODICALLY LAYERED ELASTIC MEDIA WITH INITIAL DEFORMATIONS

The present paper deals with the problem on two-component wave propagation in periodically layered, in the case of long wavelength approximation or the layers are thin. The mediums assumed are incompressible elastic media with initial deformations. This problem is solved by applying asymptotic expansion method. The asymptotic expressions of the displacement, the stress has been established. Wave velocity is a series of powers of small parameter $\varepsilon = k\tilde{h}$, *where k is the wave number, h is the thickness of one periodicity cell. The first three coefficients of the series are determined directly. The recurrent formulas are constructed to determine coefficients of higher power.*

Keywords: propagation, periodically layered elastic media, asymptotic expansion.

BBT nhận bài: 17/6/2015

Phản biện xong: 03/12/2015