KHẢO SÁT DAO ĐỘNG CỦA HỆ HAI BẬC TỰ DO CÓ CẢN

NCS. NGUYỄN ĐẮC HƯNG

Tóm tắt: *Việc khảo sát dao động của hệ hai bậc tự do có cản là thiết lập và giải hệ phương trình vi phân cấp hai không thuần nhất. Đây là vấn đề khá phức tạp, nên người ta chỉ tìm nghiệm riêng mà chưa tìm được nghiệm tổng quát. Trong công trình này, tác giả trình bày cách thiết lập và giải bài toán nói trên và tìm nghiệm tổng quát của bài toán dưới dạng giải tích. Kết quả này là cơ sở nghiên cứu bài toán hạ chìm kết cấu là vật rắn tuyệt đối vào đất bằng cách ghép hai máy rung.*

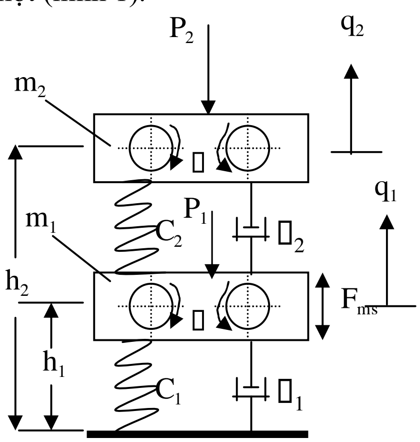
Đặt vấn đề

Trong các tài liệu [1], [2], [3], [4] đã có một số tác giả nghiên cứu bài toán dao động của hệ có hai bậc tự do và ứng dụng của nó vào bài toán hạ chìm kết cấu được coi là vật rắn tuyệt đối vào đất bằng cách ghép. Nhưng các tác giả chưa tìm được nghiệm tổng quát của bài toán dưới dạng giải tích tường minh. Trong công trình này, chúng tôi tiếp tục khảo sát bài toán dao động của hệ có hai bậc tự do và tìm nghiệm tổng quát dưới dạng giải tích tường minh.

Thiết lập bài toán

1. Mô tả bài toán

Hệ dao động gồm hai máy rung khối lượng m_1, m_2 đặt trên hệ lò xo có đó cứng là C_1, C_2 và bộ giảm chấn có hệ số là α_1, α_2, chịu lực cưỡng bức P_1, P_2. Vận tốc góc của 2 máy rung là ω. Toạ độ của máy một và máy hai tại vị trí cân bằng là h_1, h_2. F_{ms} là ma sát nhớt ở mặt bên của máy một (hình 1).



2. Thiết lập và giải phương trình vi phân chuyển động

2.1. Thiết lập phương trình vi phân chuyển động

Áp dụng phương trình Lagrange loại II, ta có:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad i=1,2 \qquad (1)$$

T: động năng của hệ:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 \qquad (2)$$

Q_i (i=1,2) là các lực suy rộng gồm lực có thế, lực cản, lực kích động.

$$Q_i = -\frac{\partial \pi}{\partial q_i} - \frac{\partial \phi}{\partial \dot{q}_i} + Q_i^p \qquad (3)$$

π : thế năng của hệ.

$$\pi = \frac{1}{2}C_1 q_1^2 + \frac{1}{2}C_2(q_2 - q_1)^2 \qquad (4)$$

ϕ : hàm hao tán của hệ.

$$\phi = \frac{1}{2}\alpha_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^2 + \frac{1}{2}k\dot{q}_1^2 \qquad (5)$$

Q_i^p (i=1,2) là các lực cưỡng bức suy rộng:

$Q_1^p = P_1\cos\omega t + P_2\cos\omega t$;

$Q_2^p = P_2\cos\omega t$ (6)

Đạo hàm T, π và ϕ theo toạ độ và vận tốc suy rộng, sau đó thay vào (1) ta có:

$$\begin{cases} m_1\ddot{q}_1 + (\alpha_1 + k)\dot{q}_1 - \alpha_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) + \\ + C_1 q_1 - C_2(q_2 - q_1) = (P_1 + P_2)\cos\omega t \\ m_2\ddot{q}_2 + \alpha_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) + C_2(q_2 - q_1) = P_2\cos\omega t \end{cases} \qquad (7)$$

2.2. Giải hệ phương trình vi phân chuyển động (7)

Điều kiện đầu : $q_1(0) = h_1$; $q_2(0) = h_2$;

$\dot{q}_1(0)=0; \dot{q}_2(0)=0$

Các hệ số m, m_2, α_1, α_2, C_1, C_2, P_1, P_2, k, ω, h_1, h_2 là các hằng số không âm.

Biến đổi hệ (7) về dạng sau:

$$\begin{cases} m_1\ddot{q}_1+m_2\ddot{q}_2+(\alpha_1+k)\dot{q}_1+C_1q_1=(P_1+2P_2)\cos\omega t \\ m_2\ddot{q}_2+\alpha_2(\dot{q}_2-\dot{q}_1)+C_2(q_2-q_1)=P_2\cos\omega t \end{cases} \quad (7')$$

Hệ (7') viết dưới dạng phương trình ma trận là:

$$A\ddot{Q}+B\dot{Q}+CQ=F \quad (8)$$

Trong đó:

$$A=\begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} \alpha_1+k & 0 \\ -\alpha_2 & \alpha_2 \end{pmatrix};$$

$$C=\begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ -c_2 & c_2 \end{pmatrix};\ Q=\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

$$F=\begin{pmatrix} (P_1+2P_2)\cos\omega t \\ P_2\cos\omega t \end{pmatrix}$$

2.2.1. Tìm nghiệm tổng quát của hệ thuần nhất tương ứng

Hệ thuần nhất tương ứng của (8) là:

$$A\ddot{Q}+B\dot{Q}+CQ=0 \quad (9)$$

Tìm $Q = Ze^{\lambda t}$ với $Z=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\neq 0$.

Đạo hàm $\dot{Q},\ddot{Q}$ thay vào (9) và chia hai vế cho $e^{\lambda t}$, ta được:

$(\lambda^2A + \lambda B + C)Z = 0$ (10)

Vì $Z \neq 0$ nên từ (9) suy ra:

$\det(\lambda^2A + \lambda B + C) = 0$ (11)

Suy ra

$$\lambda^2A+\lambda B+C=$$

$$=\begin{pmatrix} \lambda^2m_1+\lambda(\alpha_1+k)+c_1 & \lambda^2m_2 \\ -\lambda\alpha_2-c_2 & \lambda^2m_2+\lambda\alpha_2+c_2 \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \lambda^4+a\lambda^3+b\lambda^2+c\lambda+d=0 \quad (12)$$

Trong đó:

$$a=\frac{m_1\alpha_2+m_2\alpha_1+m_2k+m_2\alpha_2}{m.m_2};$$

$$b=\frac{m_1c_2+\alpha_2\alpha_1+\alpha_2k+m_2c_1+m_2c_2}{m_1.m_2};$$

$$c=\frac{c_2\alpha_1+c_2k+c_1\alpha_2}{m_1.m_2};$$

$$d=\frac{c_1c_2}{m_1.m_2}; \quad (13)$$

Giải (12) theo phương pháp Ferrary để tìm λ

Lập phương trình phụ trợ:

$y^3 - by^2 + (ac - 4d)y + (4bd - a^2d - c^2) = 0$ (14)

Áp dụng công thức Cardano để tìm một nghiệm của (14) ta được:

$$y_0=\frac{b}{3}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+ +\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \quad (15)$$

Trong đó:

$$p=ac-4d-\frac{b^2}{3};$$

$$q=\frac{abc+8bd}{3}-\frac{2b^3}{27}-a^2d-c^2$$

Theo Ferrary từ (12) suy ra:

$$\begin{cases} \lambda^2+(\frac{a}{2}-\xi)\lambda+(\frac{y_0}{2}-\eta)=0 \\ \lambda^2+(\frac{a}{2}+\xi)\lambda+(\frac{y_0}{2}+\eta)=0 \end{cases}$$

với

$$\xi=\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+y_0};\ \eta=\frac{ay_0-2c}{4\xi} \quad (16)$$

Bốn nghiệm của (16) cũng là nghiệm của (12) và có các trường hợp như sau:

a. Trường hợp λ là một nghiệm thực, đơn của phương trình đặc trưng.

$$Q_1=\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda^2m_1+\lambda\alpha_2+c_2 \\ \lambda\alpha_2+c_2 \end{pmatrix}e^{\lambda t} \quad (17)$$

b. Trường hợp λ là một nghiệm thực, kép của phương trình đặc trưng.

Khi đó Q_1 như (17), nghiệm $Q_2=\begin{pmatrix} q_{21} \\ q_{22} \end{pmatrix}=Q_1u(t)$, với u(t) là ma trận hàm cần tìm. $u(t)=\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$.

Đạo hàm Q_2 theo t và thay $Q_2, \dot{Q}_2, \ddot{Q}_2$ vào (9) ta có:

$$AQ_1\ddot{u} + (2A\dot{Q}_1 + BQ_1)\dot{u} = 0 \qquad (18) \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{u}_1 + G_1\dot{u}_1 = 0 & (a) \\ \ddot{u}_2 + G_2\dot{u}_2 = 0 & (b) \end{cases}$$

$$\text{với } \begin{cases} G_1 = 2\lambda + \dfrac{(\alpha_1 + k)z_1}{m_1 z_1 + m_2 z_2} \\ G_2 = 2\lambda + \dfrac{\alpha_2(z_2 - z_1)}{m_2 z_2} \end{cases} \qquad (19)$$

Giải phương trình (a), (b). ta được:

$$u_1 = \int e^{-G_1 t}dt = \frac{e^{-G_1 t}}{-G_1};\ u_2 = \frac{e^{-G_2 t}}{-G_2} \quad \Rightarrow Q_2 = \begin{pmatrix} -\dfrac{z_1}{G_1}e^{(\lambda - G_1)t} \\ -\dfrac{z_2}{G_2}e^{(\lambda - G_2)t} \end{pmatrix} \qquad (20)$$

c. Trường hợp λ là cặp nghiệm phức của phương trình đặc trưng $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

$$\text{Thì } \begin{cases} Q_1 = \begin{pmatrix} (m_2\alpha^2 - m_2\beta^2 + \alpha_2\alpha + c_2) + i(2m_2\alpha\beta + \alpha_2\beta) \\ (\alpha_2\alpha + c_2) + i(\alpha_2\beta) \end{pmatrix} e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t) \\ Q_2 = \begin{pmatrix} (m_2\alpha^2 - m_2\beta^2 + \alpha_2\alpha + c_2) - i(2m_2\alpha\beta + \alpha_2\beta) \\ (\alpha_2\alpha + c_2) - i(\alpha_2\beta) \end{pmatrix} e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t) \end{cases}$$

Đặt $H = m_2\alpha^2 - m_2\beta^2 + \alpha_2\alpha + c_2$; $\quad L = 2m_2\alpha\beta + \alpha_2\beta$ (21)

$M = \alpha_2\alpha + c_2$; $\quad N = \alpha_2\beta$

Thì $Q_1 = \begin{pmatrix} H + iL \\ M + iN \end{pmatrix} e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t);\ Q_2 = \begin{pmatrix} H - iL \\ M - iN \end{pmatrix} e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t);$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{12} \end{pmatrix}; \begin{cases} q_{11} = e^{\alpha t}(H\cos\beta t - L\sin\beta t) \\ q_{12} = e^{\alpha t}(M\cos\beta t - N\sin\beta t) \end{cases} \qquad (22)$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} q_{21} \\ q_{22} \end{pmatrix}; \begin{cases} q_{21} = e^{\alpha t}(L\cos\beta t + H\sin\beta t) \\ q_{22} = e^{\alpha t}(N\cos\beta t + M\sin\beta t) \end{cases}$$

NGHIỆM TỔNG QUÁT CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH (9)

$Q = C_1Q_1 + C_2Q_2 + C_3Q_3 + C_4Q_4$

Với C_1, C_2, C_3, C_4 là các hằng số được xác định từ điều kiện đầu của bài toán.

2.2.2 Tìm nghiệm riêng của hệ không thuần nhất

$$\begin{cases} m_1\ddot{q}_1 + m_2\ddot{q}_2 + (\alpha_1 + k)\dot{q}_1 + C_1q_1 = (P_1 + 2P_2)\cos\omega t \\ m_2\ddot{q}_2 + \alpha_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) + C_2(q_2 - q_1) = P_2\cos\omega t \end{cases} \qquad (7')$$

Tìm nghiệm riêng dưới dạng: $\overline{Q} = \begin{pmatrix} \overline{q_1} \\ \overline{q_2} \end{pmatrix}; \begin{cases} \overline{q_1} = a_1\cos\omega t + b_1\sin\omega t \\ \overline{q_2} = a_2\cos\omega t + b_2\sin\omega t \end{cases}$

Với a_1, a_2, b_1, b_2 được xác định nhờ ma trận sau đây:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} c_1 - m_1\omega^2 & -m_2\omega^2 & \omega(\alpha_1 + k) & 0 & p_1 + p_2 \\ -\omega(\alpha_1 + k) & 0 & c_1 - m_1\omega^2 & -m_2\omega^2 & 0 \\ -c_2 & c_2 - m_2\omega^2 & -\alpha_2\omega & \alpha_2\omega & p_2 \\ \alpha_2\omega & -\alpha_2\omega & -c_2 & c_2 - m_2\omega^2 & 0 \end{array}\right) \tag{23}$$

Đặt A$_1$= $xuv - c_2uz - v(x^2 + z^2)$ A$_2$ = $uvz + c_2ux - y(x^2 + z^2)$

B$_1$ = $yuz - u^2v + xuv$ B$_2$ = $xyu - uvz - c_2u^2$ (24)

C$_1$= $p_2uz + (uv - vu)(p_1 + 2p_2)$ C$_2$= $(c_2u - xy)(p_1 + 2p_2)$

D = A$_1$B$_2$ – A$_2$B$_1$; D$_1$ = B$_2$C$_1$ – B$_1$C$_2$; D$_2$ = A$_1$C$_2$ – A$_2$C$_1$; (25)

$$a_1 = \frac{D_1}{D}; \qquad b_1 = \frac{Dp_1 + 2Dp_2 - xD_1 + uD_2}{Dz};$$

$$a_2 = \frac{D_2}{D}; \qquad b_2 = \frac{D(p_1 + 2p_2)x - (x^2 + z^2)D_1 + xuD_2}{Duz}; \tag{26}$$

3. Nghiệm của bài toán

$$Q = C_1Q_1 + C_2Q_2 + C_3Q_3 + C_4Q_4 + \overline{Q}$$

Trong đó: C$_1$, C$_2$, C$_3$, C$_4$ là các hằng số. Q$_1$, Q$_2$, Q$_3$, Q$_4$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất. $\overline{Q} = \left(\frac{q_1}{q_2}\right)$ là nghiệm riêng được xác định ở trên.

Các trường hợp nghiệm của bài toán phụ thuộc vào Δ$_1$, Δ$_2$ (trong đó Δ$_1$, Δ$_2$ là biệt thức của phương trình thứ nhất và thứ hai của (16).

3.1. Trường hợp thứ nhất: Δ$_1$, Δ$_2$>0

Phương trình đặc trưng có 4 nghiệm đơn, thực λ$_1$, λ$_2$, λ$_3$, λ$_4$

$$\begin{cases} q_1 = C_1k_1e^{\lambda_1 t} + C_2k_2e^{\lambda_2 t} + C_3k_3e^{\lambda_3 t} + C_4k_4e^{\lambda_4 t} + a_1\cos\omega t + b_1\sin\omega t \\ q_2 = C_1l_1e^{\lambda_1 t} + C_2l_2e^{\lambda_2 t} + C_3l_3e^{\lambda_3 t} + C_4l_4e^{\lambda_4 t} + a_2\cos\omega t + b_2\sin\omega t \end{cases} \tag{27}$$

Trong đó: $\begin{matrix} k_i = \lambda_i^2 m_2 + \lambda_i\alpha_2 + c_2 \\ l_i = \lambda_i\alpha_2 + c_2 \end{matrix}$ (i = 1,2,3,4) (28)

C$_1$, C$_2$, C$_3$, C$_4$ được xác định nhờ ma trận hệ số là:

$$\left(\begin{array}{ccccc} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & h_1 - a_1 \\ l_1 & l_2 & l_3 & l_4 & h_2 - a_2 \\ \lambda_1k_1 & \lambda_2k_2 & \lambda_3k_3 & \lambda_4k_4 & -b_1\omega \\ \lambda_1l_1 & \lambda_2l_2 & \lambda_3l_3 & \lambda_4l_4 & -b_2\omega \end{array}\right) \Bigg| \tag{29}$$

3.2. Trường hợp thứ hai: Δ$_1$>0, Δ$_2$= 0

Phương trình đặc trưng có 2 nghiệm đơn λ$_1$, λ$_2$ và một nghiệm kép λ$_3$ = λ$_4$

$$\begin{cases} q_1 = C_1k_1e^{\lambda_1 t} + C_2k_2e^{\lambda_2 t} + C_3k_3e^{\lambda_3 t} + C_4\left(-\frac{k_3}{G_{31}}\right)e^{(\lambda_3 - G_{31})t} + a_1\cos\omega t + b_1\sin\omega t \\ q_2 = C_1l_1e^{\lambda_1 t} + C_2l_2e^{\lambda_2 t} + C_3l_3e^{\lambda_3 t} + C_4\left(-\frac{l_3}{G_{32}}\right)e^{(\lambda_3 - G_{32})t} + a_2\cos\omega t + b_2\sin\omega t \end{cases} \tag{30}$$

Trong đó: $$G_{31} = 2\lambda_3 + \frac{(\alpha_1 + k)k_3}{m_1 k_3 + m_2 l_3} \qquad G_{32} = 2\lambda_3 + \frac{\alpha_2 (l_3 - k_3)}{m_2 l_3} \tag{31}$$

C_1, C_2, C_3, C_4 được xác định nhờ ma trận hệ số là:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} k_1 & k_2 & k_3 & -\dfrac{k_3}{G_{31}} & h_1 - a_1 \\ l_1 & l_2 & l_3 & -\dfrac{l_3}{G_{32}} & h_2 - a_2 \\ \lambda_1 k_1 & \lambda_2 k_2 & \lambda_3 k_3 & -\dfrac{k_3}{G_{31}}(\lambda_3 - G_{31}) & -b_1\omega \\ \lambda_1 l_1 & \lambda_2 l_2 & \lambda_3 l_3 & -\dfrac{l_3}{G_{32}}(\lambda_3 - G_{32}) & -b_2\omega \end{array}\right) \tag{32}$$

3.3. Trường hợp thứ ba: $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$

Phương trình đặc trưng có 2 nghiệm kép $\lambda_1 = \lambda_2$ và $\lambda_3 = \lambda_4$

$$\begin{cases} q_1 = C_1 k_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\left(-\dfrac{k_1}{G_{11}}\right)e^{(\lambda_1 - G_{11})t} + C_3 k_3 e^{\lambda_3 t} + C_4\left(-\dfrac{k_3}{G_{31}}\right)e^{(\lambda_3 - G_{31})t} + a_1\cos\omega t + b_1 \sin\omega t \\ q_2 = C_1 l_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\left(-\dfrac{l_1}{G_{12}}\right)e^{(\lambda_1 - G_{12})t} + C_3 l_3 e^{\lambda_3 t} + C_4\left(-\dfrac{l_3}{G_{32}}\right)e^{(\lambda_3 - G_{32})t} + a_2\cos\omega t + b_2 \sin\omega t \end{cases} \tag{33}$$

Trong đó: $$G_{11} = 2\lambda_1 + \frac{(\alpha_1 + k)k_1}{mk_1 + m_2 l_1} \qquad G_{12} = 2\lambda_1 + \frac{\alpha_2 (l_1 - k_1)}{m_2 l_1} \tag{34}$$

C_1, C_2, C_3, C_4 được xác định nhờ ma trận hệ số là:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} k_1 & -\dfrac{k_1}{G_{11}} & k_3 & -\dfrac{k_3}{G_{31}} & h_1 - a_1 \\ l_1 & \dfrac{l_1}{G_{12}} & l_3 & -\dfrac{l_3}{G_{32}} & h_2 - a_2 \\ \lambda_1 k_1 & -\dfrac{k_1}{G_{11}}(\lambda_1 - G_{11}) & \lambda_3 k_3 & -\dfrac{k_3}{G_{31}}(\lambda_3 - G_{31}) & -b_1\omega \\ \lambda_1 l_1 & \dfrac{l_1}{G_{12}}(\lambda_1 - G_{12}) & \lambda_3 l_3 & -\dfrac{l_3}{G_{32}}(\lambda_3 - G_{32}) & -b_2\omega \end{array}\right) \tag{35}$$

3.4. Trường hợp thứ tư: $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 < 0$

Phương trình đặc trưng có 2 nghiệm thực đơn λ_1, λ_2 và cặp nghiệp phức $\alpha \pm i\beta$

$$\begin{cases} q_1 = C_1 k_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 k_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\alpha t}(H\cos\beta t - L\sin\beta t) \\ + C_4 e^{\alpha t}(L\cos\beta t + H\sin\beta t) + a_1\cos\omega t + b_1\sin\omega t \\ q_2 = C_1 l_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 l_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\alpha t}(M\cos\beta t - N\sin\beta t) \\ + C_4 e^{\alpha t}(N\cos\beta t + M\sin\beta t) + a_2\cos\omega t + b_2\sin\omega t \end{cases} \tag{36}$$

Trong đó: $H = m_2\alpha^2 - m_2\beta^2 + \alpha_2\alpha + c_2$; $L = 2m_2\alpha\beta + \alpha_2\beta$

$$M = \alpha_2\alpha + c_2 ; N = \alpha_2\beta \tag{37}$$

C_1, C_2, C_3, C_4 được xác định nhờ ma trận hệ số là:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} k_1 & k_2 & H & L & h_1 - a_1 \\ l_1 & l_2 & M & N & h_2 - a_2 \\ \lambda_1 k_1 & \lambda_2 k_2 & \alpha H - \beta L & \alpha L + \beta H & -b_1\omega \\ \lambda_1 l_1 & \lambda_2 l_2 & \alpha M - \beta N & \alpha N + \beta M & -b_2\omega \end{array}\right) \tag{38}$$

3.5. Trường hợp thứ năm: $\Delta_1=0$, $\Delta_2<0$

Phương trình đặc trưng có nghiệm thực kép $\lambda_1=\lambda_2$ và cặp nghiệm phức $\alpha \pm i\beta$

$$\begin{cases} q_1 = C_1 k_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\left(-\dfrac{k_1}{G_{11}}\right)e^{(\lambda_1 - G_{11})t} + C_3 e^{\alpha t}(H\cos\beta t - L\sin\beta t) \\ + C_4 e^{\alpha t}(L\cos\beta t + H\sin\beta t) + a_1\cos\omega t + b_1\sin\omega t \\ q_2 = C_1 l_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\left(-\dfrac{l_1}{G_{12}}\right)e^{(\lambda_1 - G_{12})t} + C_3 e^{\alpha t}(M\cos\beta t - N\sin\beta t) \\ + C_4 e^{\alpha t}(N\cos\beta t + M\sin\beta t) + a_2\cos\omega t + b_2\sin\omega t \end{cases} \tag{39}$$

C_1, C_2, C_3, C_4 được xác định nhờ ma trận hệ số là:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} k_1 & -\dfrac{k_1}{G_{11}} & H & L & h_1 - a_1 \\ l_1 & -\dfrac{l_1}{G_{12}} & M & N & h_2 - a_2 \\ \lambda_1 k_1 & -\dfrac{k_1}{G_{11}}(\lambda_1 - G_{11}) & \alpha H - \beta L & \alpha L + \beta H & -b_1\omega \\ \lambda_1 l_1 & -\dfrac{l_1}{G_{12}}(\lambda_1 - G_{12}) & \alpha M - \beta N & \alpha N + \beta M & -b_2\omega \end{array}\right) \tag{40}$$

3.6. Trường hợp thứ sáu: $\Delta_1<0$, $\Delta_2<0$

Phương trình đặc trưng có 2 cặp nghiệm phức $\alpha \pm i\beta$ và $\alpha^* \pm i\beta^*$

$$\begin{cases} q_1 = C_1 e^{\alpha t}(H\cos\beta t - L\sin\beta t) + C_2 e^{\alpha t}(L\cos\beta t + H\sin\beta t) \\ + C_3 e^{\alpha t}(H^*\cos\beta t - L^*\sin\beta t) + C_4 e^{\alpha t}(L^*\cos\beta t + H^*\sin\beta t) + a_1\cos\omega t + b_1\sin\omega t \\ q_2 = C_1 e^{\alpha t}(M\cos\beta t - N\sin\beta t) + C_2 e^{\alpha t}(N\cos\beta t + M\sin\beta t) + \\ C_3 e^{\alpha t}(M^*\cos\beta t - N^*\sin\beta t) + C_4 e^{\alpha t}(N^*\cos\beta t + M^*\sin\beta t) + a_2\cos\omega t + b_2\sin\omega t \end{cases} \tag{41}$$

Trong đó: $H^* = m_2\alpha^{*2} - m_2\beta^{*2} + \alpha_2\alpha^* + c_2$; $L^* = 2m_2\alpha^*\beta^* + \alpha_2\beta^*$

$M^* = \alpha_2\alpha^* + c_2$;

C_1, C_2, C_3, C_4 được xác định nhờ ma trận hệ số là:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} H & L & H^* & L^* & h_1 - a_1 \\ M & N & M^* & N^* & h_2 - a_2 \\ \alpha H - \beta L & \alpha L + \beta H & \alpha^* H^* - \beta^* L^* & \alpha^* L^* + \beta^* H^* & -b_1\omega \\ \alpha M - \beta N & \alpha N + \beta M & \alpha^* M^* - \beta^* N^* & \alpha^* N^* + \beta^* M^* & -b_2\omega \end{array}\right) \quad (43)$$

KẾT LUẬN

Các hệ số $m_1, m_2, \alpha_1, \alpha_2, C_1, C_2, P_1, P_2, k, \omega, h_1, h_2$ là hằng số dương, nên nghiệm λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 có giá trị âm. Do đó thành phần dao động tự do của $q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2$ sẽ tiến dần tới 0, khi đó hệ làm việc trong chế độ bình ổn.

Mô hình của bài toán trong bài báo này phức tạp hơn các bài toán trong [1], [2] [3], [4]. Phương pháp giải bài toán cũng có sự thay đổi bằng cách đưa hệ phương trình vi phân cấp hai thuần nhất dạng tổng quát về phương trình bậc 4 tổng quát và sử dụng phương pháp Ferrary để tìm nghiệm tổng quát của bài toán dưới dạng giải tích tường minh và xét tới caá trường hợp của nghiệm có thể xảy ra mà trước đó chưa có công trình nào nghiên cứu.

Kết quả nghiên cứu này là cơ sở cho việc khảo loại bài toán hạ chìm kết cấu vào đất bằng cách ghép hai máy rung.

Tài liệu tham khảo:

A. Sách tiếng Việt:

[1]. Nguyễn Văn Khang (2001), *Dao động kỹ thuật,* NXB Khoa học và kĩ thuật, Hà Nội.

[2]. Nguyễn Đình Chiều, Nguyễn Trọng, Nguyễn Anh Tuấn (2004)- *Cơ sở lý thuyết kỹ thuật rung trong xây dựng,* NXB Khoa học và kỹ thuật, Hà Nội.

B. Sách tiếng Nga

[3]. Barcan D.D (1959) – *Phương pháp rung trong xây dựng*, NXB Khoa học Ma - xcơ – va.

[4]. Babacôp I.M (1965) - *Lý thuyết dao động*, NXB Khoa học Ma - xcơ – va.

Abstract

STUDY ON VIBRATION OF TWO FREEDOM BLOCKED SYSTEM

NGUYEN DAC HUNG

Studying vibration of the two freedom blocked system is setting up and solving unhomogeneous differential equation system. This problem is rather complex, so only specific solution is found but not general one. In this article, the author explains the way to set up and solve the above mentioned task and find out the general analytic solution. This result is a foundation for studying task to lower absolute solid structure into the earth by combining two vibrators.

Người phản biện: PGS.TS. Khổng Doãn Điền