NGHIÊN CỨU PHÂN BỐ ỨNG SUẤT TẠI BIÊN NGÀM CỦA VỎ TRỤ FGM CHỊU TẢI TRỌNG TĨNH SỬ DỤNG LÝ THUYẾT BIẾN DẠNG CẮT BẬC CAO QUASI-3D

Trần Văn Hùng¹, Trần Ngọc Đoàn^{2,*}

¹Trường Sĩ quan Tăng - Thiết giáp ²Khoa Hàng không vũ trụ, Trường Đại học Kỹ thuật Lê Quý Đôn

Tóm tắt

Bài báo trình bày kết quả nghiên cứu vỏ trụ kín FGM đối xứng trục với quy luật phân bố thể tích các vật liệu thành phần theo hàm lũy thừa, sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao quasi-3D. Kết quả phân tích trạng thái ứng suất của vỏ trụ tại khu vực biên ngàm, trong trường hợp vỏ chịu tác dụng của một số dạng tải trọng hướng kính, phân bố cục bộ theo các quy luật khác nhau được trình bày. Mô hình tính và chương trình tính bằng phần mềm Maple được so sánh kiểm chứng với một số kết quả đã công bố. Bài báo đã chỉ ra tại biên ngàm có hiện tượng gia tăng mạnh về giá trị của các thành phần ứng suất, đồng thời đã chứng minh sự ảnh hưởng lớn của các tham số tải trọng (quy luật biến đổi, kích thước khu vực đặt tải), chỉ số tỉ lệ thể tích vật liệu đến độ lớn và sự phân bố của các thành phần ứng suất tại khu vực biên.

Từ khóa: Vỏ trụ FGM; lý thuyết biến dạng cắt bậc cao quasi-3D; trạng thái ứng suất; dạng tải trọng khác nhau; khu vực biên ngàm.

1. Mở đầu

Theo quan điểm của cơ học vật rắn, vật liệu composite có cơ tính biến thiên (FGM) là vật liệu composite dị hướng, trong đó tỉ lệ thể tích của các vật liệu thành phần thay đổi liên tục theo một số hướng cụ thể, chẳng hạn như theo chiều dày. Do đó, các đặc tính vĩ mô của vật liệu thể hiện sự thay đổi trơn và liên tục, đáp ứng các yêu cầu khác nhau về hiệu suất làm việc tại các vị trí khác nhau trên kết cấu. Do có nhiều ru điểm vượt trội nên vật liệu FGM được ứng dụng rộng rãi trong nhiều ngành công nghiệp như hàng không vũ trụ, năng lượng nguyên tử, y học, chế tạo máy... [1]. Trong các lý thuyết sử dụng để phân tích kết cấu FGM, lý thuyết biến dạng cắt được sử dụng phổ biến nhất và khẳng định được tính hiệu quả cho mục đích tính toán ứng suất và chuyển vị của tấm [2-4], vỏ dày đối xứng trục [5-8]. Các nghiên cứu đã thực hiện đối với kết cấu tấm, vỏ có dạng hình học khác nhau, điều kiện biến khác nhau, chịu các dạng tải trọng khác nhau... Tổng quan nghiên cứu về tính toán kết cấu tấm, vỏ làm từ

^{*} Email: tranngocdoan@lqdtu.edu.vn

DOI: 10.56651/lqdtu.jst.v19.n01.639

vật liệu FGM được trình bày trong nhiều công trình nghiên cứu, tiêu biểu trong số đó có thể kể đến các nghiên cứu của Dai và cộng sự [9], Gupta và Talha [10]... Các nghiên cứu trên đã chỉ ra sự cần thiết sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao quasi-3D có tính đến ảnh hưởng của biến dạng cắt và ứng suất pháp hướng kính trong nghiên cứu trạng thái ứng suất kết cấu tấm, vỏ FGM có độ dày lớn, hoặc tại các khu vực có sự suy biến về trạng thái ứng suất. Lý thuyết biến dạng cắt bậc cao quasi-3D là lý thuyết mà trong đó mô hình phân tích của trường chuyển vị có chứa các thành phần chuyển vị bậc cao cho phép tính đến ảnh hưởng của biến dạng cắt. Ngoài ra, phương trình cân bằng của lý thuyết đàn hồi ba chiều được sử dụng để chính xác hóa giá trị của các ứng suất cắt và ứng suất pháp hướng kính.

Trong bài báo này, nhóm tác giả sử dụng mô hình lý thuyết biến dạng cắt bậc cao quasi-3D có tính đến ảnh hưởng của biến dạng cắt và ứng suất pháp hướng kính (đã trình bày trong [8, 11]) để khảo sát ứng xử của vỏ trụ FGM chịu tác dụng của các dạng tải trọng hướng kính, phân bố cục bộ dọc theo chiều dài vỏ với các quy luật khác nhau như: phân bố đều, tuyến tính, dạng parabol, hình sin. Tính chất cơ học của vật liệu vỏ tuân theo quy luật lũy thừa theo chiều dày. Như đã chỉ ra trong [8], tại biên ngàm xuất hiện hiện tượng tập trung ứng suất, đây là một hiện tượng phức tạp có nguyên nhân từ các hiệu ứng biên bổ sung. Do đó, để khảo sát chi tiết hơn ảnh hưởng của các điều kiện đặt tải lên phân bố của trạng thái ứng suất ở khu vực có sự tập trung ứng suất, bài báo này tập trung phân tích ảnh hưởng của các tham số tải trọng, chỉ số tỉ lệ thể tích đến trạng thái ứng suất của vỏ trụ FGM tại khu vực biên ngàm. Bài toán được giải theo hướng tiếp cận giải tích, sử dụng phép phân tích chuyển vị và tải trọng theo chuỗi lượng giác đơn và phép biến đổi Laplace, tính toán số trong bài toán cụ thể được thực hiện bằng phần mềm Maple.

2. Cơ sở lý thuyết

Xét vỏ trụ kín FGM có độ dày h với các tham số hình học được trình bày trên hình 1. Giả thiết vỏ trụ FGM chịu tác dụng của tải trọng hướng kính $q(\xi,\theta)$ trên bề mặt ngoài với $\xi = x/R$.

Biến thiên tham số vật liệu theo chiều dày được xác định bởi công thức [12]:

$$P_{FGM}(z) = P_c + (P_{mat} - P_c)V_{mat}$$
⁽¹⁾

trong đó, P_{mat} , P_c - đặc tính cơ lý của vật liệu như mô đun đàn hồi (E), hệ số Poisson (μ), ...; các chỉ số *mat*, c lần lượt là ký hiệu cho kim loại và gốm. Quy luật phân bố tỉ lệ thể tích theo chiều dày vỏ FGM được nghiên cứu ở đây là quy luật lũy thừa: $V_{mat} = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right)^{\eta}$, $V_c = 1 - V_{mat}$, η - chỉ số tỉ lệ thể tích ($0 \le \eta \le \infty$).

79

Trường chuyển vị của vỏ trụ được khai triển theo phương chiều dày như sau [8, 13]:

$$u = \sum_{i=0}^{3} u_i(\xi,\theta) \frac{z^i}{i!}, \quad v = \sum_{i=0}^{3} v_i(\xi,\theta) \frac{z^i}{i!}, \quad w = \sum_{j=0}^{2} w_j(\xi,\theta) \frac{z^j}{j!}.$$
 (2)

trong đó: u - chuyển vị của điểm bất kỳ theo phương dọc trục ξ ($\xi = x/R$), v - chuyển vị theo phương vòng θ , w - chuyển vị theo chiều dày (phương z). Việc phân tích thành phần chuyển vị theo phương chiều dày dưới dạng công thức (2) cho phép nghiên cứu trạng thái ứng suất - biến dạng của vỏ trụ có tính đến ảnh hưởng của biến dạng cắt và ứng suất pháp theo phương z.



Hình 1. Hệ trục tọa độ và tham số hình học của vỏ trụ FGM.

Quan hệ biến dạng-chuyển vị tuyến tính trong hệ tọa độ cong trực giao $O\xi\theta z$ được định nghĩa như sau:

$$\varepsilon_{\xi} = \frac{1}{R} \sum_{i=0}^{3} \varepsilon_{\xi}^{i} \frac{z^{i}}{i!}, \quad \varepsilon_{\theta} = \frac{1}{R+z} \sum_{i=0}^{3} \varepsilon_{\theta}^{i} \frac{z^{i}}{i!}, \quad \gamma_{\xi\theta} = \frac{1}{R} \sum_{i=0}^{3} \gamma_{\xi\theta}^{i} \frac{z^{i}}{i!} + \frac{1}{R+z} \sum_{i=0}^{3} \lambda_{\xi\theta}^{i} \frac{z^{i}}{i!}, \quad \gamma_{\xiz} = \frac{1}{R} \sum_{i=0}^{3} \gamma_{\xiz}^{i} \frac{z^{i}}{i!}, \quad \gamma_{\theta z} = \frac{1}{R+z} \sum_{i=0}^{3} \gamma_{\theta z}^{i} \frac{z^{i}}{i!}, \quad \varepsilon_{z} = \left(\varepsilon_{z}^{0} + \varepsilon_{z}^{1}z\right). \quad (3)$$

trong đó:

$$\begin{split} \varepsilon_{\xi}^{i} &= \frac{\partial u_{i}}{\partial \xi}, \quad \gamma_{\xi\theta}^{i} = \frac{\partial v_{i}}{\partial \xi}, \quad \lambda_{\xi\theta}^{i} = \frac{\partial u_{i}}{\partial \theta}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \\ \varepsilon_{\theta}^{j} &= \frac{\partial v_{j}}{\partial \theta} + w_{j}, \quad \gamma_{\xiz}^{j} = \frac{\partial w_{j}}{\partial \xi} + Ru_{j+1}, \quad \gamma_{\theta z}^{j} = \frac{\partial w_{j}}{\partial \theta} + Rv_{j+1} + (j-1)v_{j}, \quad j = 0, 1, 2, \\ \varepsilon_{\theta}^{3} &= \frac{\partial v_{3}}{\partial \theta}, \quad \gamma_{\xi z}^{3} = 0, \quad \gamma_{\theta z}^{3} = 2v_{3}, \quad \varepsilon_{z}^{0} = w_{1}, \quad \varepsilon_{z}^{1} = w_{2}. \end{split}$$

80

Phương trình định luật Hooke biểu diễn liên hệ giữa biến dạng và ứng suất trong trường hợp vỏ làm từ vật liệu trực hướng có dạng [14]:

$$\begin{cases} \sigma_{\xi} \\ \sigma_{\theta} \\ \sigma_{z} \\ \sigma_{\xi} \\ \tau_{\xi \varepsilon} \\ \tau_{\xi \varepsilon} \\ \tau_{\theta z} \end{cases} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{\xi} \\ \varepsilon_{\theta} \\ \varepsilon_{z} \\ \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\theta z} \end{bmatrix}.$$
(4)

trong đó: $\sigma_{\xi}, \sigma_{\theta}, \sigma_{z}, \tau_{\xi\theta}, \tau_{\xi z}, \tau_{\theta z}$ - các thành phần ứng suất pháp và ứng suất tiếp tương ứng, $C_{ij}(i=1,2,3, j=1,2,3), C_{44}, C_{55}, C_{66}$ - các hằng số độ cứng của vật liệu vỏ trụ:

$$C_{ii} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}, i = 1, 2, 3, C_{jj} = \frac{E}{2(1+\mu)}, j = 4, 5, 6, C_{ij} = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}, i \neq j.$$

Hệ phương trình cân bằng nhận được bằng cách áp dụng nguyên lý công ảo và viết dưới dạng chuyển vị như sau [8]:

$$\sum_{n=0}^{3} \left(H_{1n}^{i} u_{n} + H_{1n,11}^{i} \frac{\partial^{2}}{\partial \xi^{2}} u_{n} + H_{1n,22}^{i} \frac{\partial^{2}}{\partial \theta^{2}} u_{n} \right) + \sum_{n=0}^{3} H_{2n,12}^{i} \frac{\partial^{2}}{\partial \xi \partial \theta} v_{n} + \sum_{n=0}^{2} H_{3n,1}^{i} \frac{\partial}{\partial \xi} w_{n} = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{3} \left(H_{2n}^{i} v_{n} + H_{2n,11}^{i} \frac{\partial^{2}}{\partial \xi^{2}} v_{n} + H_{2n,22}^{i} \frac{\partial^{2}}{\partial \theta^{2}} v_{n} \right) + \sum_{n=0}^{3} H_{1n,12}^{i} \frac{\partial^{2}}{\partial \xi \partial \theta} u_{n} + \sum_{n=0}^{2} H_{3n,2}^{i} \frac{\partial}{\partial \theta} w_{n} = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{2} \left(H_{3n}^{j} w_{n} + H_{3n,11}^{j} \frac{\partial^{2}}{\partial \xi^{2}} w_{n} + H_{3n,22}^{j} \frac{\partial^{2}}{\partial \theta^{2}} w_{n} \right) + \sum_{n=0}^{N_{0}} H_{1n,1}^{j} \frac{\partial}{\partial \xi} u_{n} + \sum_{n=0}^{3} H_{2n,2}^{j} \frac{\partial}{\partial \theta} v_{n} = H_{4}^{j} q$$
(5)

trong đó, các hệ số H^{α}_{β} chỉ phụ thuộc vào các thông số vật liệu và hình học của vỏ trụ FGM.

Đối với vỏ trụ kín, điều kiện biên ngàm và tựa đơn có dạng [8]:

- Biên ngàm tại $\xi = 0, L/R$: $u_i = 0, v_i = 0, w_j = 0, (i = 0, 1, 2, 3, j = 0, 1, 2).$
- Biên tựa đơn tại $\xi = 0, L/R$: $\frac{\partial u_i}{\partial \xi} = 0, v_i = 0, w_j = 0, (i = 0, 1, 2, 3, j = 0, 1, 2).$

Việc giải hệ phương trình vi phân đạo hàm riêng (5) cùng các điều kiện biên tương ứng bằng phân tích theo chuỗi lượng giác đơn kết hợp với phép biến đổi Laplace được trình bày chi tiết trong [8]. Sau khi xác định được các chuyển vị u_i , v_i (i = 0, 1, 2, 3), w_j (j = 0, 1, 2), từ các quan hệ biến dạng-chuyển vị (3), ta tìm được các biến dạng ε_{ξ} , ε_{θ} , ε_z , $\gamma_{\xi\theta}$, $\gamma_{\xi z}$ và $\gamma_{\theta z}$. Tiếp theo, sử dụng ba biểu thức σ_{ξ} , σ_{θ} và

 $\tau_{\xi\theta}$ của (4) để xác định các ứng suất mặt σ_{ξ} , σ_{θ} và $\tau_{\xi\theta}$. Các thành phần ứng suất cắt còn lại được tìm dựa trên phương trình cân bằng của lý thuyết đàn hồi ba chiều:

$$\begin{split} \tau_{\xi z} &= -\frac{1}{R+z} \int_{-h/2}^{z} \left[\left(1 + \frac{z}{R} \right) \frac{\partial \sigma_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{\xi \theta}}{\partial \theta} \right] dz, \\ \tau_{\theta z} &= -\frac{R}{(R+z)^2} \int_{-h/2}^{z} \left[\left(1 + \frac{z}{R} \right) \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + \left(1 + \frac{z}{R} \right)^2 \frac{\partial \tau_{\xi \theta}}{\partial \xi} \right] dz, \\ \sigma_z &= -\frac{1}{R+z} \int_{-h/2}^{z} \left[\left(1 + \frac{z}{R} \right) \frac{\partial \tau_{\xi z}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} - \sigma_{\theta} \right] dz + \frac{R-h/2}{R+h/2} q^{-}. \end{split}$$

3. Tính toán số và thảo luận

3.1. Tính toán kiểm chứng

Kết quả tính toán nhận được trong bài báo này được so sánh, kiểm chứng với lời giải chính xác theo lý thuyết đàn hồi ba chiều do Brischetto thực hiện [15] đối với vỏ trụ FGM tựa đơn trên cả hai đầu. Thông số đầu vào như sau: chiều dài L=1 m, bán kính R=10 m, chiều dày tương đối S=R/h=4 (vỏ dày); bề mặt trong là Aluminum Alloy với $\mu_m = 0.3$, $E_m = 70$ GPa, bề mặt ngoài là gốm Alumina Al₂O₃ với $\mu_c = 0.3$, $E_c = 380$ GPa; vỏ chịu tác dụng của tải phân bố dạng hàm sin trên bề mặt ngoài $q = Q_0 \sin(R\pi\xi/L)\sin(\theta), Q_0 = 1$ Pa.

Bång 1. So sánh kết	quả tính toán ứng	g suất không thứ nguy	vên của vỏ trụ FGM tựa đơn
trê	n cả hai đầu, chịu	tải trọng phân bố dạ	ng hàm sin

	$\bar{\sigma}_{\xi}(L/2R,\pi/2,z)$			$\bar{\sigma}_{\theta}(L/2R,\pi/2,z)$			$\bar{\sigma}_z(L/2R,\pi/2,z)$		
Z	Brischetto [15]	Bài báo	% sai số	Brischetto [15]	Bài báo	% sai số	Brischetto [15]	Bài báo	% sai số
$\eta = 0,5$									
-h/2	-3,050	-3,065	0,5	6,208	6,171	0,6	0,000	0,000	0,0
0	7,633	7,653	0,3	26,31	26,35	0,2	0,402	0,402	0,0
h/2	32,90	32,97	0,2	40,59	40,68	0,2	1,000	1,000	0,0
$\eta = 2$									
-h/2	-5,143	-5,049	1,8	8,263	8,358	1,1	0,000	0,000	0,0
0	4,047	4,020	0,7	21,17	21,20	0,1	0,291	0,291	0,0
h/2	45,59	45,90	0,7	62,28	62,64	0,6	1,000	1,000	0,0

Bảng 1 trình bày nghiên cứu so sánh ứng suất không thứ nguyên nhận được trong bài báo này với các kết quả nhận được trong công trình [15], trong đó chỉ số tỉ lệ thể tích 82 η nhận các giá trị khác nhau. Các ứng suất không thứ nguyên được xác định theo công thức (6):

$$\left\{\bar{\sigma}_{\xi}, \ \bar{\sigma}_{\theta}\right\} = \frac{10^2 \left\{\sigma_{\xi}, \ \sigma_{\theta}\right\}}{Q_0 S^2}, \ \bar{\tau}_{\xi z} = \frac{\tau_{\xi z}}{Q_0 S}, \ \bar{\sigma}_z = \frac{\sigma_z}{Q_0}.$$
(6)

Phân tích số liệu trình bày trong bảng 1 có thể thấy sai số rất nhỏ (không quá 1,8%) giữa kết quả tính toán nhận được trong bài báo này và kết quả nhận được từ lý thuyết đàn hồi ba chiều. Điều này khẳng định độ tin cậy cao của mô hình lý thuyết và chương trình tính toán số sử dụng trong nghiên cứu này.

3.2. Nghiên cứu phân bố ứng suất của vỏ trụ FGM tại khu vực biên ngàm

3.2.1. Khảo sát ảnh hưởng của quy luật biến đổi tải trọng theo chiều dài vỏ

Nghiên cứu vỏ trụ FGM chịu tác dụng của một số dạng tải trọng cục bộ khác nhau như trình bày trên hình 2 và biểu thức (7). Sơ đồ và quy luật biến đổi của các dạng tải trọng cục bộ sử dụng trong nghiên cứu này được trình bày trên hình 3. Các tải trọng nêu trên có tổng hợp lực bằng nhau và bằng $Q_0(\xi_2 - \xi_1)$.



Hình 2. Vị trí đặt tải trọng cục bộ.

Các thông số đầu vào phục vụ tính toán bao gồm: Bán kính vỏ R = 0,1905 m, bề mặt trong là hợp kim Ti-6Al-4V với $\mu_m = 0,298$, $E_m = 105,7$ GPa, bề mặt ngoài là gốm ceramic Alumina (Al₂O₃) với $\mu_c = 0,3$, $E_c = 380$ GPa, chỉ số tỉ lệ thể tích $\eta = 1$, chiều dày tương đối S = R/h = 10. Như đã chỉ ra trong nghiên cứu [8], đối với vỏ FGM có chiều dài tương đối $L \ge 4R$, điều kiện biên tại đầu này hầu như không ảnh hưởng tới kết quả tính toán tại biên kia. Do đó, để đánh giá ảnh hưởng của các dạng tải trọng lên phân bố ứng suất tại khu vực biên một cách rõ ràng, ta chọn vỏ có chiều dài L = 4R. Vỏ ngàm chặt hai đầu và chịu tác dụng của tải trọng cục bộ phân bố ở mặt ngoài, chiều dài khu vực đặt tải $\xi_{uh} = 2$.





a) Tải trọng phân bố theo quy luật không đổi

b) Tải trọng phân bố theo quy luật tuyến tính



c) Tải trọng phân bố theo quy luật hàm sin d) Tải trọng phân bố theo quy luật parabol Hình 3. Quy luật phân bố của một số dạng tải trọng.

Phân bố của các thành phần ứng suất không thứ nguyên dọc theo chiều dài vỏ đối với các trường hợp đặt tải khác nhau được trình bày trên hình 4. Để ngắn gọn hơn khi trình bày các hình, bắt đầu từ hình 4 trở đi sử dụng các từ viết tắt sau trong chú thích đồ thị: "Const" - chú thích của đồ thị tương ứng với trường hợp tải trọng không đổi, "Linear" - tải trọng phân bố theo quy luật tuyến tính, "Parabol" - tải trọng phân bố theo quy luật bàm sin. Các thành phần ứng suất không thứ nguyên được tính theo công thức (8):

$$\left\{\bar{\sigma}_{\xi}, \ \bar{\sigma}_{\theta}, \ \bar{\tau}_{\xi z}, \ \bar{\sigma}_{z}\right\} = \frac{\left\{\sigma_{\xi}, \ \sigma_{\theta}, \ \tau_{\xi z}, \ \sigma_{z}\right\}}{Q_{0}} \tag{8}$$



a) Biến đổi của ứng suất $\bar{\sigma}_{\xi}$ theo chiều dài





10

b) Biến đổi của ứng suất $\overline{\sigma}_{\theta}$ theo chiều dài tại mặt ngoài z = h/2



c) Biến đổi của ứng suất $\overline{\sigma}_z$ theo chiều dài d) Biến đổi của ứng suất $\overline{\tau}_{\xi z}$ theo chiều dài tại mặt trung bình z = 0 tại mặt có tọa độ z = h/4Hình 4. Sự biến đổi của các thành phần ứng suất dọc theo chiều dài vỏ.

Rõ ràng, sự thay đổi các quy luật biến đổi của tải trọng ảnh hưởng trực tiếp đến phân bố của các thành phần ứng suất dọc theo chiều dài vỏ. Tải trọng phân bố kiểu parabol có sự thay đổi lớn về độ lớn nên cũng gây ra sự thay đổi lớn về giá trị ứng suất tại khu vực lân cận điểm tải trọng đạt cực trị. Ngoài ra, tại các vị trí biên ngàm và vị trí bắt đầu, kết thúc đặt tải, giá trị của các thành phần ứng suất có sự thay đổi lớn về độ lớn. Các thành phần ứng suất cắt $\tau_{\xi z}$ và σ_z có giá trị không thể bỏ qua trong tính toán khi so sánh với các giá trị lớn nhất của các ứng suất pháp theo phương dọc trục σ_{ξ} và phương

vòng σ_{θ} . Đây là một điểm lưu ý quan trọng, khẳng định sự cần thiết sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao quasi-3D có tính đến ảnh hưởng của biến dạng cắt và ứng suất pháp hướng kính trong trường hợp tính toán cụ thể.

Kết quả khảo sát, đánh giá ảnh hưởng của các dạng tải trọng tới trạng thái ứng suất của vỏ trụ tại khu vực biên được trình bày trên hình 5. Vị trí khảo sát bao gồm vị trí biên phải và vị trí cách biên một khoảng h.

Phân tích kết quả nhận được, có thể đưa ra một số nhận xét về phân bố và độ lớn của các thành phần ứng suất tại khu vực biên như sau:



a) Biến đổi của ứng suất $\overline{\sigma}_{\xi}$ theo chiều dày tại vị trí biên phải



c) Biến đổi của ứng suất $\overline{\sigma}_{\theta}$ theo chiều dày tại vị trí biên phải



b) Biến đổi của ứng suất $\overline{\sigma}_{\xi}$ theo chiều dày tại vị trí cách biên phải một khoảng h



d) Biến đổi của ứng suất $\overline{\sigma}_{\theta}$ theo chiều dày tại vị trí cách biên phải một khoảng h



0.4 0.4 0.2 0.4 0.2 0.2 -0.2 -0.4 0 0.005 0.010 0.015 0.020 $\overline{\sigma}_z$ $\overline{\Box}$ Const - - Linear - Parabol - - Sin

e) Biến đổi của ứng suất $\overline{\sigma}_z$ theo chiều dày tại vị trí biên phải



f) Biến đổi của ứng suất $\overline{\sigma}_z$ theo chiều dày tại vị trí cách biên phải một khoảng h



g) Biến đổi của ứng suất $\overline{\tau}_{\xi_z}$ theo chiều dày h) Biến đổi của ứng suất $\overline{\tau}_{\xi_z}$ theo chiều dày tại vị trí biên phải tại vị trí cách biên phải một khoảng h Hình 5. Sự biến đổi của các thành phần ứng suất theo chiều dày vỏ tại khu vực biên.

- Về quy luật biến đổi: Các thành phần ứng suất có sự thay đổi đáng kể về quy luật phân bố theo chiều dày vỏ tại vị trí biên và vị trí khác biên. Như vậy, quy luật biến đổi của tải trọng ngoài theo chiều dài vỏ không chỉ ảnh hưởng lớn tới sự phân bố của các thành phần ứng suất theo chiều dài, mà còn ảnh hưởng lớn tới quy luật phân bố của ứng suất theo chiều dày vỏ. - Về giá trị giữa ứng suất tại vị trí biên và vị trí cách biên một khoảng *h*: Thành phần ứng suất pháp theo phương dọc trục $\overline{\sigma}_{\xi}$ khi chịu tác dụng của tải trọng phân bố đều và tải trọng dạng hàm sin hầu như không đổi, nhưng khi chịu tác dụng của tải trọng biến đổi tuyến tính ứng suất $\overline{\sigma}_{\xi}$ tại vị trí cách biên một khoảng *h* giảm 88,7%, còn khi chịu tác dụng của tải trọng parabol ứng suất $\overline{\sigma}_{\xi}$ giảm 83,6%. Các thành phần ứng suất còn lại $\overline{\sigma}_{\theta}$, $\overline{\tau}_{\xi z}$, $\overline{\sigma}_{z}$ đều giảm mạnh khi cách biên một khoảng *h*, đặc biệt là thành phần ứng suất $\overline{\sigma}_{z}$. Điều này chứng tỏ tại biên ngàm có sự gia tăng mạnh về mặt giá trị của các thành phần ứng suất. Quy luật này cũng có thể quan sát rõ trên hình 4, khi tại khu vực biên đồ thị biến đổi của các thành phần ứng suất theo chiều dài có độ dốc rất lớn. Trong hầu hết các trường hợp đã khảo sát, khi vỏ chịu tác dụng của tải trọng biến đổi theo quy luật parabol, các thành phần ứng suất đều có giá trị lớn nhất.

3.2.2. Khảo sát ảnh hưởng của chiều dài khu vực đặt tải

Trong mục này, thực hiện khảo sát trong trường hợp vỏ có thông số hình học và vật liệu như tại mục 3.2.1. Vỏ chịu tác dụng của tải trọng phân bố theo quy luật không đổi (Hình 3a), chiều dài tương đối của khu vực đặt tải $\xi_{tải}$ (Hình 2) có giá trị thay đổi như sau: $\xi_{tải} = 1/2$, 1, 1.5, 2, 3. Các thành phần ứng suất không thứ nguyên được tính theo công thức (9). Kết quả tính toán các thành phần ứng suất vỏ tại biên ngàm được trình bày trên bảng 2 và hình 6.

$$\left\{\bar{\sigma}_{\xi}, \ \bar{\sigma}_{\theta}, \ \bar{\tau}_{\xi z}, \ \bar{\sigma}_{z}\right\} = \left\{\sigma_{\xi}, \ \sigma_{\theta}, \ \tau_{\xi z}, \ \sigma_{z}\right\} / \left(Q_{0}\xi_{t d i}\right).$$

$$\tag{9}$$

Bảng 2. Giá trị lớn nhất của các thành phần ứng suất không thứ nguyên tại biên ngàm đối với các giá trị khác nhau của chiều dài khu vực đặt tải

$\xi_{t d i}$	$ar{\sigma}_{\xi}\left(\xi_{0},0,z ight)_{\max}$	$\bar{\sigma}_{ heta}(\xi_0,0,z)_{\max}$	$\bar{\sigma}_{z}(\xi_{0},0,z)_{\max}$	$\overline{\tau}_{\xi z}\left(\xi_{0},0,z\right)_{\max}$
1/2	1,079	0,462	0,679	0,340
	(tại z/h = -0,5)	(tại z/h = -0,5)	(tại z/h = -0,024)	(tại z/h = 0,242)
1	1,078	0,462	0,678	0,339
	(tại z/h = -0,5)	(tại z/h = -0,5)	(tại z/h = -0,023)	(tại z/h = 0,243)
1,5	0,987	0,423	0,680	0,345
	(tại z/h = -0,5)	(tại z/h = -0,5)	(tại z/h = -0,003)	(tại z/h = 0,251)
2	0,983	0,417	0,701	0,372
	(tại z/h = 0,5)	(tại z/h = 0,5)	(tại z/h = 0,029)	(tại z/h = 0,265)
3	1,447	0,620	0,736	0,365
	(tại z/h = -0,5)	(tại z/h = -0,5)	(tại z/h = -0,111)	(tại z/h = 0,185)



Hình 6. Sự biến đổi của các thành phần ứng suất không thứ nguyên theo chiều dày vỏ tại biên ngàm khi thay đổi chiều dài khu vực đặt tải.

Phân tích các kết quả tính toán nhận được, có thể rút ra một số nhận xét về ảnh hưởng của chiều dài khu vực đặt tải tới các thành phần ứng suất không thứ nguyên (9) như sau:

- Đối với khu vực đặt tải có chiều dài nhỏ $\xi_{t ai} \leq 1$ (nhỏ hơn 1/4 chiều dài vỏ), kích thước khu vực đặt tải hầu như không ảnh hưởng tới các thành phần ứng suất không thứ nguyên (9) tại biên ngàm.

- Đối với khu vực đặt tải có chiều dài $\xi_{tdi} > 1$ (lớn hơn 1/4 chiều dài vỏ), kích thước khu vực đặt tải không chỉ ảnh hưởng tới độ lớn của các thành phần ứng suất không thứ nguyên (9), mà còn ảnh hưởng lớn tới quy luật biến đổi của chúng theo chiều dày. Trong tất cả các trường hợp, giá trị lớn nhất của thành phần ứng suất cắt theo phương pháp tuyến $\overline{\sigma}_z$ luôn lớn hơn 50% so với giá trị lớn nhất của thành phần ứng suất pháp $\overline{\sigma}_z$.

3.2.3. Khảo sát ảnh hưởng của chỉ số tỉ lệ thể tích vật liệu

Trong mục này, để khảo sát ảnh hưởng của chỉ số tỉ lệ thể tích η , ta xét vỏ trụ FGM với các thông số như sau: Chiều dày tương đối S = R/h = 20; chỉ số tỉ lệ thể tích η nhận các giá trị 0,2, 1 và 5; tải trọng phân bố cục bộ theo quy luật không đổi và quy luật parabol; các thông số còn lại lấy như trong mục 3.2.1. Các thành phần ứng suất không thứ nguyên được tính theo công thức (8). Kết quả tính toán các thành phần ứng suất vỏ tại biên ngàm được trình bày trên hình 7.



theo chiều dày tại biên

theo chiều dày tại biên



theo chiều dày tại biên

) Biên đôi của ứng suất τ_{ξ.} theo chiều dày tai biên

Hình 7. Sự biến đổi của các thành phần ứng suất không thứ nguyên theo chiều dày vỏ tại biên ngàm khi thay đổi giá trị chỉ số tỉ lệ thể tích.

Phân tích các kết quả tính toán nhận được, có thể rút ra một số nhận xét về ảnh hưởng của chỉ số tỉ lệ thể tích đến sự phân bố của các thành phần ứng suất không thứ nguyên trong trường hợp vỏ tương đối mỏng (S = 20), chịu tác dụng của các dạng tải trọng khác nhau như sau:

- Giá trị của chỉ số tỉ lệ thể tích vật liệu có ảnh hưởng rõ rệt đến sự phân bố của các thành phần ứng suất tại biên. Khi tăng giá trị chỉ số tỉ lệ thể tích, giá trị lớn nhất của các ứng suất pháp theo phương dọc trục $\overline{\sigma}_{\xi}$ và phương vòng $\overline{\sigma}_{\theta}$ giảm, trong khi đó giá trị của các ứng suất pháp theo phương hướng kính $\overline{\sigma}_{z}$ lại tăng. Tuy nhiên, giá trị lớn nhất của $\overline{\sigma}_{z}$ khi $\eta = 0, 2$ và $\eta = 1$ không có sự khác biệt lớn. Trong các trường hợp khảo sát, ứng suất cắt $\overline{\tau}_{\xi z}$ đạt giá trị lớn nhất khi chỉ số tỉ lệ thể tích $\eta = 5$ và đạt giá trị nhỏ nhất khi $\eta = 1$.

- Đối với vỏ mỏng hơn (S = 20 so với S = 10), các quy luật phân bố của tải trọng cục bộ cũng có ảnh hưởng tới giá trị của các ứng suất tại biên, tuy nhiên sự khác biệt là không lớn và chủ yếu ở tại các vị trí gần mặt trong và mặt ngoài vỏ.

4. Kết luận

Bài báo đã trình bày cơ sở lý thuyết và phân tích số trong tính toán vỏ tru FGM chiu tác dung của một số dang tải trong phân bố cục bộ khác nhau, sử dung lý thuyết biến dang cắt bậc cao quasi-3D theo hướng tiếp cân giải tích. Thông qua khảo sát số, bài báo đã phân tích ảnh hưởng của các quy luật phân bố tải trọng (phân bố đều, tuyến tính, parabol, hình sin), kích thước khu vực đặt tải, chỉ số tỉ lê thể tích vật liêu đến phân bố của các thành phần ứng suất tai vi trí biên ngàm. Kết quả nghiên cứu cho thấy, đối với vỏ dày (S = 10) quy luât phân bố tải trong, kích thước khu vực đặt tải không chỉ ảnh hưởng lớn đến độ lớn của ứng suất, mà còn ảnh hưởng lớn đến quy luật phân bố của các thành phần ứng suất theo cả chiều dài và chiều dày vỏ, theo đó quy luât phân bố tải trong kiểu parabol và khu vực đặt tải có chiều dài lớn hơn ¼ chiều dài vỏ có ảnh hưởng lớn nhất đến phân bố ứng suất tại biên. Trong trường hợp vỏ tương đối mỏng (S = 20), các quy luật phân bố tải trong không ảnh hưởng rõ rêt tới quy luật phân bố và giá tri lớn nhất của các ứng suất tại biên ngàm. Nghiên cứu cũng chỉ ra sư ảnh hưởng lớn của chỉ số tỉ lê thể tích đến sư phân bố theo chiều dày và giá tri lớn nhất của các thành phần ứng suất tai biên. Ngoài ra, tai khu vực biên ngàm có hiện tượng tăng mạnh về giá trị của các thành phần ứng suất, đặc biệt là đối với các thành phần ứng suất cắt (bi bỏ qua trong lý thuyết cổ điển và bâc nhất), điều này khẳng định sự cần thiết sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao quasi-3D trong phân tích ứng suất vỏ tại biên.

Tài liệu tham khảo

- Y. Miyamoto, W. A. Kaysser, B. H. Rabin, A. Kawasaki, and R. G. Ford (Eds.). *Functionally graded materials: Design, processing and applications*, Springer Science & Business Media, 2013.
- [2] J. L. Mantari, A. S. Oktem, C. G. Soares, "A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates", *Compos Part B-Eng*, Vol. 43, pp. 1489-99, 2012.
- [3] H. T. Thai, D. H. Choi, "A refined shear deformation theory for free vibration of functionally graded plates on elastic foundation", *Compos Part B-Eng*, Vol. 43, pp. 2335-47, 2012.
- [4] N. D. Tran, V. V. Firsanov, "Stress-strain state of the rectangular plates on the basis of refined theory", *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, Vol. 14 (1), pp. 23-32, 2018. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-1-23-32
- [5] A. J. M. Ferreira, E. Carrera, M. Cinefra, C. M. C. Roque, O. Polit, "Analysis of laminated shells by a sinusoidal shear deformation theory and radial basis functions collocation, accounting for through-the-thickness deformations", *Compos Part B-Eng*, Vol. 42, pp. 1276-84, 2011.
- [6] H. R. Eipakchi, G. H. Rahimi, S. E. Khadem, "Closed form solution for displacements of thick cylinders with varying thickness subjected to nonuniform internal pressure", *Struct Eng Mech*, Vol. 16, pp. 731-48, 2003.

- [7] M. Ghannad, M. Z. Nejad, "Elastic analysis of pressurized thick hollow cylindrical shells with clamped-clamped ends", *Mechanika*, Vol. 85, 11-8, 2010.
- [8] T. N. Doan, A. Tuan Nguyen, P. Van Binh, T. Van Hung, V. Quoc Tru, and D. Trac Luat, "Static analysis of FGM cylindrical shells and the effect of stress concentration using quasi-3D type higher-order shear deformation theory", *Composite Structures*, Vol. 262, 2020, 113357.
- [9] H. L. Dai, Y. N. Rao, and T. Dai, "A review of recent researches on FGM cylindrical structures under coupled physical interactions, 2000-2015", *Composite Structures*, Vol. 152, pp. 199-225, 2016.
- [10] A. Gupta and M. Talha, "Recent development in modeling and analysis of functionally graded materials and structures", *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 79, pp. 1-14, 2015.
- [11] Tran Van Hung, Tran Ngoc Doan, Vu Quoc Tru, Nguyen Anh Tuan, Vu Xuan Duc, "Static analysis of FGM cylindrical shells under local load using quasi-3D higher-order shear deformation theory", *Journal of Science and Technique*, No. 209 (7-2020), pp. 96-106, 2020.
- [12] H. S. Shen, Functionally Graded Materials: Nonlinear Analysis of Plates and Shells, CRC Press, 2009.
- [13] V. V. Vasiliev and S. A. Lur'ye, "To a problem of improvement of theory of shallow shells", *Mechanics of Solids*, Vol. 6, pp. 139-146 (in Russian), 1990.
- [14] J. N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis*, CRC Press, New York, 2004.
- [15] S. Brischetto, "A general exact elastic shell solution for bending analysis of functionally graded structures", *Composite Structures*, Vol. 175(1), pp. 70-85, 2017.

INVESTIGATING THE STRESS DISTRIBUTION ON THE CLAMPED BOUNDARY OF FGM CYLINDRICAL SHELLS SUBJECTED TO STATIC LOADS USING THE QUASI-3D HIGHER-ORDER SHEAR DEFORMATION THEORY

Abstract: This article presents the results of investigating FGM closed cylindrical shells using quasi-3D higher-order shear deformation theory. The law of volume distribution of materials according to the power function. In this article, the results of the analysis of the stress state at the clamped boundary area of the FGM cylindrical shell subjected to radial local loads distributed according to different laws. The mathematical model and the calculation program in Maple are compared and verified with the published results. The article has shown that at the clamped boundary edge, the values of stress components increase sharply, and at the same time, the strong influence of the load parameters (the variation law, the size of the load area), the power-law index on the values and distribution of stress components in the boundary area is demonstrated.

Keywords: Cylindrical shell; quasi-3D higher-order shear deformation theory; stress state; different local loads; clamped boundary area.

Nhận bài: 12/05/2023; Hoàn thiện sau phản biện: 06/12/2023; Chấp nhận đăng: 05/04/2024