MỘT SỐ KẾT QUẢ VỀ MẶT KIỂU ĐỒ THỊ VÀ SLICE TRONG CÁC KHÔNG GIAN TÍCH CONG VỚI MẬT ĐỘ $(\mathbb{R}^+ \times_f \mathbb{R}^2, e^{-\varphi(\mathsf{x})})$ VÀ $\mathbb{R}^+ \times_f \mathbb{G}^2$

NGUYỄN THỊ MỸ DUYÊN
Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế
Email: nguyenthimyduyen@dhsphue.edu.vn

Tóm tắt: Trong bài báo này, chúng tôi xét mặt kiểu đồ thị của một hàm u, thiết lập công thức tính độ cong trung bình H của mặt và xây dựng mối quan hệ giữa $\operatorname{div}\dfrac{Du}{f\sqrt{f^2+Du^2}}$ và H. Đặc biệt, chúng tôi thu được các tính chất cực tiểu diện tích địa phương và toàn phần của các slice trong các không gian tích cong với mật độ $(\mathbb{R}^+ \times_f \mathbb{R}^2, e^{-\varphi(\mathsf{x})})$ và $\mathbb{R}^+ \times_f \mathbb{G}^2$.
Từ khóa: Đa tạp với mật độ, không gian tích cong, mặt kiểu đồ thị, tính cực tiểu diện tích.

1 GIỚI THIỆU

Đa tạp với mật độ là một đa tạp Riemann M cùng với một hàm trơn dương, $e^{-\varphi}$, gọi là hàm mật độ, được dùng làm trọng số cho cả phần tử thể tích và chu vi. Diện tích với mật độ của một siêu phẳng Σ và thể tích với mật độ của một miền Ω trong một đa tạp với mật độ $(n+1)$-chiều lần lượt là $\mathrm{Area}_\varphi(\Sigma) = \int_\Sigma e^{-\varphi}\, dA$ và $\mathrm{Vol}_\varphi(\Omega) = \int_\Omega e^{-\varphi}\, dV$, trong đó dA, dV tương ứng là phần tử diện tích Riemann n-chiều và phần tử thể tích Riemann $(n+1)$-chiều.

Một ví dụ quan trọng của đa tạp với mật độ là không gian Gauss $\mathbb{G}^{n+1}$, đó là $\mathbb{R}^{n+1}$ với mật độ Gauss $(2\pi)^{-\frac{n+1}{2}} e^{-\frac{r^2}{2}}$. Siêu mặt Σ trong $\mathbb{R}^{n+1}$ được gọi là cực tiểu với mật độ hay φ-cực tiểu nếu độ cong trung bình với mật độ của Σ,

$$H_\varphi(\Sigma) := H(\Sigma) + \frac{1}{n}\langle \nabla\varphi, \mathbf{N}\rangle = 0,$$

trong đó $H(\Sigma)$ và $\mathbf{N}$ lần lượt là độ cong trung bình và vectơ pháp đơn vị của Σ.

Gần đây, việc nghiên cứu các đa tạp con cực tiểu với mật độ và đặc biệt là các siêu mặt cực tiểu với mật độ đã và đang thu hút nhiều nhà Toán học (xem [1], [2], [3], [6]).

Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế
ISSN 1859-1612, Số 3(55)/2020: tr.5-15
Ngày nhận bài: 05/11/2020; Hoàn thành phản biện: 27/11/2020; Ngày nhận đăng: 30/11/2020

Ngoài ra, một số vấn đề được tiếp cận một cách rộng rãi trong những năm lại đây đó là các vấn đề liên quan đến các siêu mặt trong các đa tạp tích cong dạng $\mathbb{R}^+ \times_f M$, trong đó $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, (M, g) là một đa tạp Riemann n-chiều và f là một hàm trơn dương xác định trên $\mathbb{R}^+$. Chú ý rằng đa tạp tích cong $\mathbb{R}^+ \times_f M$ chính là đa tạp tích $\mathbb{R}^+ \times M$ cùng với metric $\bar{g} = \pi^*_{\mathbb{R}^+}(dt^2) + (f \circ \pi_{\mathbb{R}^+})^2 \sigma^*_M(g)$, trong đó $\pi_{\mathbb{R}^+}$ và σ_M tương ứng là các phép chiếu lên $\mathbb{R}^+$ và M.

Trong $\mathbb{R}^n$, gọi P là một phần của một slice (siêu phẳng có phương trình $x_n = \text{const.}$), xem như là đồ thị trên một miền D và Σ cũng là đồ thị của một hàm u trên D. Khi đó, rõ ràng ta có đánh giá

$$\text{Area}(\Sigma) = \int_D \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\, dA \geq \int_D dA = \text{Area}(P).$$

Tuy nhiên, một cách tổng quát, bất đẳng thức trên không đúng trong không gian với mật độ. Chẳng hạn, xét $\mathbb{R}^2$ với mật độ e^y. Gọi $P = \{(x, -\ln\cos\frac{\pi}{3}) \in \mathbb{R}^2,\ -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}\}$ và Σ là đồ thị của hàm $y = -\ln\cos x,\ x \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$. Dễ dàng kiểm tra được $L_\varphi(P) \geq L_\varphi(\Sigma)$.

Do đó, tính cực tiểu diện tích của các slice trong đa tạp với mật nói chung và đa tạp tích cong với mật độ nói riêng không phải là một vấn đề tầm thường. Trong bài báo này, với điều kiện cân bằng thể tích, chúng tôi sẽ chứng minh rằng nếu $(\log f)''(t) \leq 0$, thì slice là cực tiểu diện tích với mật độ một cách địa phương trong không gian tích cong $\mathbb{R}^+ \times_f \mathbb{R}^2$ với mật độ $e^{-\varphi}$, trong đó $\varphi(t, \mathsf{x}) = \varphi(\mathsf{x})$ và slice là cực tiểu diện tích toàn phần trong không gian tích cong với mật độ $\mathbb{R}^+ \times_f \mathbb{G}^2$.

2 KHÔNG GIAN TÍCH CONG $\mathbb{R} \times_f \mathbb{R}^2$. MẶT KIỂU ĐỒ THỊ TRONG KHÔNG GIAN TÍCH CONG $\mathbb{R} \times_f \mathbb{R}^2$

Cho f là một hàm trơn, dương trên $\mathbb{R}$. Không gian tích cong $\mathbb{R} \times_f \mathbb{R}^2$ là không gian tích $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ cùng với *tích vô hướng* được xác định như sau:

$$\langle x, y \rangle = x_1.y_1 + f^2(p)\left(x_2.y_2 + x_3.y_3\right),\ \ \forall x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in T_{(p,q)}\mathbb{R} \times_f \mathbb{R}^2.$$

Metric tương ứng:

$$g(X, X) = dx^2 + f^2(p).(dy^2 + dz^2),\ \ \forall X = (x, y, z) \in T_{(p,q)}\mathbb{R} \times_f \mathbb{R}^2.$$

Trong không gian tích cong $\mathbb{R} \times_f \mathbb{R}^2$ cho vectơ $x = (x_1, x_2, x_3)$ và $y = (y_1, y_2, y_3)$ cùng đặt tại điểm (p, q). Khi đó, *tích trong* của x và y được tính bằng định thức hình thức sau:

$$x \wedge y := \begin{vmatrix} f^2(p).e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Xét mặt Σ có dạng đồ thị $\{(u(y,z),y,z) : (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$ với tham số hóa $X(y,z) = (u(y,z),y,z)$ ta có:

$$X_y = (u_y,1,0); \quad X_z = (u_z,0,1);$$

$$X_{yy} = (u_{yy},0,0); \quad X_{yz} = (u_{yz},0,0); \quad X_{zz} = (u_{zz},0,0).$$

$$X_y \wedge X_z = \begin{vmatrix} f^2(p).e_1 & e_2 & e_3 \\ u_y & 1 & 0 \\ u_z & 0 & 1 \end{vmatrix} = (f^2,-u_y,-u_z).$$

Suy ra

$$N = \frac{X_y \wedge X_z}{|X_y \wedge X_z|} = \frac{(f^2,-u_y,-u_z)}{\sqrt{f^4 + f^2(u_y^2+u_z^2)}}.$$

2.1 Độ cong trung bình của mặt

Ta có phương trình *Euler-Lagrange* (xem [5]):

$$\frac{(2f'f^2 - f(u_{yy}+u_{zz}))(f^2+u_y^2+u_z^2) + f'f^2(u_y^2+u_z^2) + f(u_y^2u_{yy}+u_z^2u_{zz}) + 2fu_yu_zu_{yz}}{(\sqrt{f^2+u_y^2+u_z^2})^3} = 0.$$

Hay

$$\frac{-fu_{yy}(f^2+u_z^2) + 2fu_yu_zu_{yz} - fu_{zz}(f^2+u_y^2) + 3f'f^2(u_y^2+u_z^2) + 2f'f^4}{(\sqrt{f^2+u_y^2+u_z^2})^3} = 0.$$

Đặt

$$H = \frac{1}{2}\frac{fu_{yy}(f^2+u_z^2) - 2fu_yu_zu_{yz} + fu_{zz}(f^2+u_y^2) - 3f'f^2(u_y^2+u_z^2) - 2f'f^4}{f^2(\sqrt{f^2+u_y^2+u_z^2})^3}.$$

Khi đó, H được gọi là *độ cong trung bình* của mặt.

2.2 Mối quan hệ giữa div$\dfrac{Du}{f\sqrt{f^2+Du^2}}$ và H

Ta có

$$\operatorname{div}\frac{Du}{f\sqrt{f^2+\mid Du\mid^2}}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_y}{\sqrt{f^4+f^2(u_y^2+u_z^2)}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u_z}{\sqrt{f^4+f^2(u_y^2+u_z^2)}}\right),$$

với

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_y}{\sqrt{f^4+f^2(u_y^2+u_z^2)}}\right)=\frac{u_{yy}\sqrt{f^4+f^2(u_y^2+u_z^2)}-u_y\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{f^4+f^2(u_y^2+u_z^2)}\right)}{\left(\sqrt{f^4+f^2(u_y^2+u_z^2)}\right)^2}$$
$$=\frac{u_{yy}\left(\sqrt{f^4+f^2(u_y^2+u_z^2)}\right)^2-u_y(2f^3f'u_y+ff'u_y^3+f^2u_yu_{yy}+ff'u_yu_z^2+f^2u_zu_{yz})}{\left(\sqrt{f^4+f^2(u_y^2+u_z^2)}\right)^3}$$
$$=\frac{f^4u_{yy}+f^2u_z^2u_{yy}-2f^3f'u_y^2-ff'u_y^4-ff'u_y^2u_z^2-f^2u_yu_zu_{yz}}{\left(\sqrt{f^4+f^2(u_y^2+u_z^2)}\right)^3}$$
$$=\frac{1}{f\left(\sqrt{f^2+\mid Du\mid^2}\right)^3}[f^2u_{yy}+u_z^2u_{yy}-u_yu_zu_{yz}]-\frac{f'}{f^2\left(\sqrt{f^2+\mid Du\mid^2}\right)^3}(2f^2+\mid Du\mid^2)u_y^2.$$

Tương tự ta có

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u_z}{\sqrt{f^4+f^2(u_y^2+u_z^2)}}\right)$$
$$=\frac{1}{f\left(\sqrt{f^2+\mid Du\mid^2}\right)^3}[f^2u_{zz}+u_y^2u_{zz}-u_yu_zu_{yz}]-\frac{f'}{f^2\left(\sqrt{f^2+\mid Du\mid^2}\right)^3}(2f^2+\mid Du\mid^2)u_z^2.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}\frac{Du}{f\sqrt{f^2+Du^2}} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_y}{\sqrt{f^4+f^2(u_y^2+u_z^2)}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u_z}{\sqrt{f^4+f^2(u_y^2+u_z^2)}}\right)\\
&= \frac{1}{f^2\left(\sqrt{f^2+|Du|^2}\right)^3}\left[fu_{yy}(f^2+u_z^2) - 2fu_yu_zu_{yz} + fu_{zz}(f^2+u_y^2) - 2f'f^2|Du|^2 - f'|Du|^4\right]\\
&= 2H + \frac{3f'f^2|Du|^2 + 2f'f^4 - 2f'f^2|Du|^2 - f'|Du|^4}{f^2\left(\sqrt{f^2+|Du|^2}\right)^3}\\
&= 2H + \frac{f'f^2|Du|^2 + 2f'f^4 - f'|Du|^4}{f^2\left(\sqrt{f^2+|Du|^2}\right)^3}\\
&= 2H + \frac{f'}{\sqrt{f^2+|Du|^2}}\frac{2f^4 + 2f^2|Du|^2 - f^2|Du|^2 - |Du|^4}{f^2(f^2+|Du|^2)}\\
&= 2H + \frac{f'}{\sqrt{f^2+|Du|^2}}\left[2 - \frac{|Du|^2}{f^2}\right]
\end{aligned}$$

Vậy

$$\operatorname{div}\frac{Du}{f\sqrt{f^2+Du^2}} = 2H + \frac{f'}{\sqrt{f^2+|Du|^2}}\left[2 - \frac{|Du|^2}{f^2}\right].$$

Nhận xét:

1. Nếu mặt ở dạng *slice*, tức là $u = \text{const.}$ thì độ cong trung bình của mặt được xác định cụ thể là: $H = -\dfrac{f'}{f} = -(\log f)' = \text{const.}$.

2. Việc tính toán, thiết lập công thức tính độ cong trung bình H ở trên chỉ sử dụng các phép toán vi tích phân thông thường. Vấn đề mặt cực tiểu liên quan trực tiếp đến độ cong trung bình của mặt, vì vậy việc xác định được công thức tính độ cong trung bình của mặt rất có ý nghĩa trong việc giải quyết được một số vấn đề xung quanh mặt cực tiểu trong không gian tích cong này.

3 TÍNH CỰC TIỂU DIỆN TÍCH CỦA CÁC SLICE TRONG CÁC KHÔNG GIAN TÍCH CONG VỚI MẬT ĐỘ $(\mathbb{R}^+ \times_f \mathbb{R}^2, e^{-\varphi(\mathsf{x})})$ VÀ $\mathbb{R}^+ \times_f \mathbb{G}^2$

Xét không gian tích cong $\mathbb{R}^+ \times_f \mathbb{R}^2$ với mật độ $e^{-\varphi}$. Gọi $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$, và $\Sigma = \{(u(\mathsf{x}), \mathsf{x}) : \mathsf{x} \in \mathbb{R}^2\}$ là đồ thị toàn phần xác định bởi u. Một trường vectơ pháp đơn vị của Σ là

$$\mathbf{N} = \frac{f(u)}{\sqrt{f(u)^2 + |Du|^2}} \left(\partial_t - \frac{1}{f(u)^2} Du \right),$$

trong đó Du là gradient của u trong $\mathbb{R}^2$, và $|Du|^2 = \langle Du, Du \rangle$. Hàm độ cong (tương ứng với $\mathbf{N}$) là

$$H = \frac{1}{2} \mathrm{trace}(A),$$

trong đó A là toán tử hình dạng. Ta có

$$2H(u) = \mathrm{div} \left(\frac{Du}{f(u)\sqrt{f^2 + |Du|^2}} \right) - \frac{f'(u)}{\sqrt{f(u)^2 + |Du|^2}} \left(2 - \frac{|Du|^2}{f(u)^2} \right).$$

Vì vậy

$$\begin{aligned} 2H_\varphi(u) = \frac{1}{f(u)} \mathrm{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{f(u)^2 + |Du|^2}} \right) - \frac{2f'(u)}{\sqrt{f(u)^2 + |Du|^2}} + \frac{f(u)}{\sqrt{f(u)^2 + |Du|^2}} \varphi_t \\ - \frac{1}{f(u)\sqrt{f(u)^2 + |Du|^2}} g(Du, D\varphi). \end{aligned}$$

Dễ thấy rằng các slice có độ cong trung bình cũng như độ cong trung bình với mật độ luôn hằng, lần lượt là:

$$H(t_0) := H(t_0, \mathsf{x}) = -(\log f)'(t_0) \quad \text{và} \quad H_\varphi(t_0) := H_\varphi(t_0, \mathsf{x}) = -(\log f)'(t_0) + \varphi_t(t_0, \mathsf{x}).$$

Hơn nữa, nếu $\varphi = \varphi(\mathsf{x}), \mathsf{x} \in \mathbb{R}^2$ (nghĩa là hàm mật độ $e^{-\varphi}$ không phụ thuộc vào tham số $t \in \mathbb{R}^+$) thì

$$H_\varphi(t_0) = -(\log f)'(t_0).$$

Cho Σ và $\mathbf{N}$ như trên. Xét sự mở rộng trơn của $\mathbf{N}$ bằng cách tịnh tiến dọc theo trục t, ta cũng ký hiệu bởi $\mathbf{N}$ và 2-dạng vi phân được xác định như sau

$$\phi(t, \mathsf{x}) = f(t)^2 \omega(\mathsf{x}),$$

trong đó $\omega(X_1, X_2) = \det(X_1, X_2, \mathbf{N})$ và X_1, X_2 là các trường vectơ trơn. Dễ thấy rằng $f(t)^2 |\omega(X_1, X_2)| \leq 1$, với mọi trường vectơ trực chuẩn X_1, X_2 và $f(t)^2 |\omega(X_1, X_2)| = 1$ khi và chỉ khi X_1, X_2 tiếp xúc với Σ. Do đó, $\phi(t, \mathsf{x})$ biểu thị phần tử thể tích với mật độ của Σ trong $(\mathbb{R}^+ \times_f \mathbb{R}^2, e^{-\varphi})$. Ta có

$$\mathrm{div}\, \mathbf{N} = -2H - \frac{f'}{\sqrt{f^2 + |Du|^2}} \left(2 - \frac{|Du|^2}{f^2} \right) + \frac{f' |Du|^2}{(f^2 + |Du|^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Chú ý rằng $d\omega = \text{div } \mathbf{N}\, dV_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2}$, vì vậy

$$\begin{aligned} d\phi = d(f^2\omega) &= \text{div}(f^2\mathbf{N})\, dV_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2} = f^2 \text{ div } \mathbf{N}\, dV_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2} + 2ff'\langle\nabla\partial_t, \mathbf{N}\rangle\, dV_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2} \\ &= \text{div } \mathbf{N}\, dV_{\mathbb{R}^+\times_f\mathbb{R}^2} + 2\frac{f'}{f}\langle\nabla\partial_t, \mathbf{N}\rangle\, dV_{\mathbb{R}^+\times_f\mathbb{R}^2} \\ &= \left(-2H + \frac{f'|Du|^2}{f^2\sqrt{f^2+|Du|^2}} + \frac{f'|Du|^2}{(f^2+|Du|^2)^{\frac{3}{2}}}\right) dV_{\mathbb{R}^+\times_f\mathbb{R}^2}. \end{aligned}$$

Vì

$$\begin{aligned} d(e^{-\varphi}\phi) = d(e^{-\varphi}f^2\omega) &= e^{-\varphi}f^2 \text{ div } \mathbf{N}\, dV_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2} + \langle\nabla(e^{-\varphi}f^2), \mathbf{N})\rangle\, dV_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2} \\ &= e^{-\varphi}d\phi - e^{-\varphi}f^2\langle\nabla\varphi, \mathbf{N}\rangle\, dV_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^2} \\ &= e^{-\varphi}\left[-2H + \frac{f'|Du|^2}{f^2\sqrt{f^2+|Du|^2}} + \frac{f'|Du|^2}{(f^2+|Du|^2)^{\frac{3}{2}}} - \langle\nabla\varphi, \mathbf{N}\rangle\right] dV_{\mathbb{R}^+\times_f\mathbb{R}^2} \\ &= e^{-\varphi}\left[-2H_\varphi + \frac{f'|Du|^2}{f^2\sqrt{f^2+|Du|^2}} + \frac{f'|Du|^2}{(f^2+|Du|^2)^{\frac{3}{2}}}\right] dV_{\mathbb{R}^+\times_f\mathbb{R}^2}, \end{aligned}$$

nên ta có

$$d_\varphi\phi = e^{\varphi}d(e^{-\varphi}\phi) = \left(-2H_\varphi + \frac{f'|Du|^2}{f^2\sqrt{f^2+|Du|^2}} + \frac{f'|Du|^2}{(f^2+|Du|^2)^{\frac{3}{2}}}\right) dV_{\mathbb{R}^+\times_f\mathbb{R}^2}.$$

Đặc biệt, khi Σ là một slice, ta có

$$d_\varphi\phi = -2H_\varphi\, dV_{\mathbb{R}^+\times_f\mathbb{R}^2}.$$

Tiếp theo, trong các tiểu mục sau chúng ta thu được các tính chất cực tiểu diện tích địa phương và toàn phần của slice trong các không gian tích cong với mật độ $(\mathbb{R}^+\times_f\mathbb{R}^2, e^{-\varphi})$ và $\mathbb{R}^+\times_f\mathbb{G}^2$ với điều kiện cân bằng thể tích.

3.1 Tính cực tiểu diện tích địa phương của slice trong không gian tích cong với mật độ $(\mathbb{R}^+\times_f\mathbb{R}^2, e^{-\varphi(\mathsf{x})})$

Xét không gian tích cong $\mathbb{R}^+\times_f\mathbb{R}^2$ với mật độ $e^{-\varphi(\mathsf{x})}$, trong đó $\mathsf{x}\in\mathbb{R}^2$. Giả sử rằng D là một miền trong $\mathbb{R}^2$ sao cho bao đóng của D, $\overline{D}$, là compact. Gọi $P_D = \{t_0\}\times D$ và Σ_D là đồ thị của hàm $t = u(\mathsf{x}), \mathsf{x}\in D$, sao cho P_D và Σ_D cùng biên, nghĩa là $\partial P_D = \partial\Sigma_D$.

Gọi $E_1 = \{(t,\mathsf{x})\in\mathbb{R}^+\times D : t\le u(\mathsf{x})\}$, $E_2 = \{(t,\mathsf{x})\in\mathbb{R}^+\times D : t\le t_0\}$. Định lý sau chỉ ra rằng P_D có diện tích với mật độ bé nhất trong lớp các mặt cùng biên với nó.

Định lý 3.1.1. *Nếu* $\mathrm{Vol}_\varphi(E_1) = \mathrm{Vol}_\varphi(E_2)$ *và* $(\log f)''(t) \le 0$ *thì*

$$Area_\varphi(P_D) \le \mathrm{Area}_\varphi(\Sigma_D).$$

Chứng minh. Gọi ϕ là dạng thể tích của $\mathbb{R}^2$. Áp dụng định lý Stokes và sự định hướng phù hợp cho các đối tượng (xem Hình 1), ta có

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}_\varphi(D) - \mathrm{Area}_\varphi(\Sigma_D) &\le \int_D e^{-\varphi}\phi - \int_{\Sigma_D} e^{-\varphi}\phi = \int_{D-\Sigma_D} e^{-\varphi}\phi \\ &= \int_{E_1} e^{-\varphi} d_f\phi = \int_{E_1\setminus E_2} e^{-\varphi} d_\varphi\phi + \int_{E_1\cap E_2} e^{-\varphi} d_\varphi\phi,\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}_\varphi(P_D) - \mathrm{Area}_\varphi(D) &\le \int_{P_D} e^{-\varphi}\phi - \int_D e^{-\varphi}\phi = \int_{P_D-D} e^{-\varphi}\phi \\ &= -\int_{E_2} e^{-\varphi} d_\varphi\phi = -\int_{E_2\setminus E_1} e^{-\varphi} d_\varphi\phi - \int_{E_1\cap E_2} e^{-\varphi} d_\varphi\phi.\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}_\varphi(P_D) - \mathrm{Area}_\varphi(\Sigma_D) &\le \int_{E_1\setminus E_2} e^{-\varphi} d_\varphi\phi - \int_{E_2\setminus E_1} e^{-\varphi} d_\varphi\phi \\ &= -2\int_{E_1\setminus\ E_2} e^{-\varphi} H_\varphi(t)\, dV + 2\int_{E_2\setminus E_1} e^{-\varphi} H_\varphi(t)\, dV.\end{aligned}$$

Điều kiện $(\log f)''(t) \le 0$ nghĩa là H_φ không giảm dọc theo trục t. Do đó, ta có

$$H_\varphi(t_0) \le H_\varphi(t),\ \forall (t, \mathsf{x}) \in E_1 \setminus E_2 \quad \text{và} \quad H_\varphi(t) \le H_\varphi(t_0),\ \forall (t, \mathsf{x}) \in E_2 \setminus E_1.$$

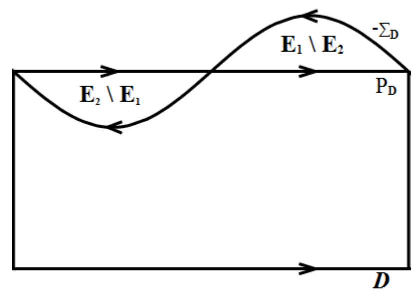
Nên

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}_\varphi(P_D) - \mathrm{Area}_\varphi(\Sigma_D) &\le -2H_\varphi(t_0)\left(\int_{E_1\setminus E_2} e^{-\varphi}\, dV - \int_{E_2\setminus E_1} e^{-\varphi}\, dV\right) \\ &= -2H_\varphi(t_0)(\mathrm{Vol}_\varphi(E_1 \setminus E_2) - \mathrm{Vol}_\varphi(E_2 \setminus E_1)) = 0,\end{aligned}$$

bởi vì $\mathrm{Vol}_\varphi(E_1) = \mathrm{Vol}_\varphi(E_2)$. Vì vậy, ta thu được kết quả $\mathrm{Area}_\varphi(P_D) \le \mathrm{Area}_\varphi(\Sigma_D)$. Nói cách khác, P_D cực tiểu diện tích trong lớp các mặt cùng biên với nó. □

3.2 Tính cực tiểu diện tích toàn phần của slice trong không gian tích cong với mật độ $\mathbb{R}^+ \times_f \mathbb{G}^2$

Xét không gian tích cong với mật độ $\mathbb{R}^+ \times_f \mathbb{G}^2$, nghĩa là $\mathbb{R}^+ \times_f \mathbb{R}^2$ với mật độ $e^{-\varphi} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{|\mathsf{x}|^2}{2}}$, trong đó $\mathsf{x} \in \mathbb{R}^2$. Trong không gian này, các slice được chứng minh là cực tiểu diện tích toàn phần với mật độ.



Hình 1: Một phần của slice và đồ thị cùng biên

Định lý 3.2.1. *Nếu* $(\log f)''(t) \leq 0$ *thì slice là cực tiểu diện tích với mật độ trong lớp các đồ thị toàn phần thỏa mãn điều kiện* $\mathrm{Vol}_\varphi(E_1) = \mathrm{Vol}_\varphi(E_2)$.

Chứng minh. Gọi P là slice $\{t_0\} \times \mathbb{G}^2$ và Σ là đồ thị của hàm $t = u(\mathsf{x})$ trên toàn bộ $\mathbb{G}^2$. Gọi S^1_R là đường tròn tâm O bán kính R trong $\mathbb{G}^2$ và $C_R = \mathbb{R} \times S^1_R$ là mặt trụ tương ứng. Gọi $E_1 = \{(t, \mathsf{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{G}^2 : t \leq u(\mathsf{x})\}$ và $E_2 = \{(t, \mathsf{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{G}^2 : t \leq t_0\}$. Gọi $A = E_1 \setminus E_2 \,\cup\, E_2 \setminus E_1$. Các phần của P, Σ, E_1, và E_2, bị chặn bởi C_R, lần lượt được ký hiệu bởi P_R, Σ_R, ${E_1}_R$, và ${E_2}_R$.

Ký hiệu ϕ là dạng thể tích của $\mathbb{G}^2$. Gọi R là số dương đủ lớn sao cho C_R cắt cả $E_1 \setminus E_2$ và $E_2 \setminus E_1$ (xem Hình 2). Tương tự như chứng minh Định lý 3.1.1, ta có

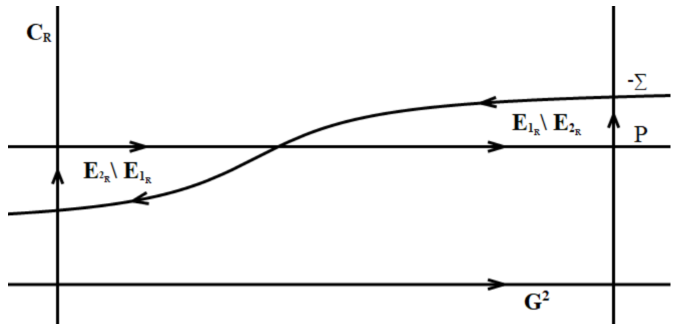
$$\begin{aligned}\mathrm{Area}_\varphi(\mathbb{G}^2_R) - \mathrm{Area}_\varphi(\Sigma_R) + \int_{C_R \cap E_1} e^{-\varphi}\phi &\leq \int_{\mathbb{G}^2_R} e^{-\varphi}\phi - \int_{\Sigma_R} e^{-\varphi}\phi + \int_{C_R \cap E_1} e^{-\varphi}\phi \\ &= \int_{{E_1}_R} e^{-\varphi} d_f\phi = \int_{{E_1}_R \setminus {E_2}_R} e^{-\varphi} d_\varphi\phi + \int_{{E_1}_R \cap {E_2}_R} e^{-\varphi} d_\varphi\phi,\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}_\varphi(P_R) - \mathrm{Area}_\varphi(\mathbb{G}^2_R) + \int_{C_R \cap E_2} e^{-\varphi}\phi &\leq \int_{P_R} e^{-\varphi}\phi - \int_{\mathbb{G}^2_R} e^{-\varphi}\phi + \int_{C_R \cap E_2} e^{-\varphi}\phi \\ &= -\int_{{E_2}_R} e^{-\varphi} d_\varphi\phi = -\int_{{E_2}_R \setminus {E_1}_R} e^{-\varphi} d_\varphi\phi - \int_{{E_2}_R \cap {E_1}_R} e^{-\varphi} d_\varphi\phi.\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}_\varphi(P_R) - \mathrm{Area}_\varphi(\Sigma_R) + \int_{C_R \cap A} e^{-\varphi}\phi &\leq \int_{{E_1}_R \setminus {E_2}_R} e^{-\varphi} d_\varphi\phi - \int_{{E_2}_R \setminus {E_1}_R} e^{-\varphi} d_\varphi\phi \\ &= 2\int_{{E_2}_R \setminus {E_1}_R} e^{-\varphi} H_\varphi(t)\, dV - 2\int_{{E_1}_R \setminus\ {E_2}_R} e^{-\varphi} H_\varphi(t)\, dV.\end{aligned} \tag{1}$$



Hình 2: Slice P, đồ thị toàn phần Σ và $\mathbb{G}^2$ trong $\mathbb{R}^+ \times_f \mathbb{G}^2$

Vì $(\log f)''(t) \leq 0$, nên ta có

$$H_\varphi(t_0) \leq H_\varphi(t),\ \forall (t, \mathsf{x}) \in E_{1_R} \setminus E_{2_R} \ \text{ và } \ H_\varphi(t) \leq H_\varphi(t_0),\ \forall (t, \mathsf{x}) \in E_{2_R} \setminus E_{1_R}.$$

Vì vậy

$$\mathrm{Area}_\varphi(P_R) - \mathrm{Area}_\varphi(\Sigma_R) + \int_{C_R \cap A} e^{-\varphi}\phi \leq 2H_\varphi(t_0)\left(\mathrm{Vol}_\varphi(E_{2_R} \setminus E_{1_R}) - \mathrm{Vol}_\varphi(E_{1_R} \setminus E_{2_R})\right). \tag{2}$$

Hơn nữa, dễ thấy rằng: $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R \cap A} e^{-\varphi}\phi = \lim_{R\to\infty} e^{-cR^2} \int_{C_R \cap A} \phi = 0$.
Mà $\mathrm{Vol}_\varphi(E_1) = \mathrm{Vol}_\varphi(E_2)$, nên $\lim_{R\to\infty} \mathrm{Vol}_\varphi(E_{1_R} \setminus E_{2_R}) = \lim_{R\to\infty} \mathrm{Vol}_\varphi(E_{2_R} \setminus E_{1_R})$.
Do đó, lấy giới hạn cả hai vế của (2) khi R dẫn ra vô cùng, ta thu được kết quả

$$\mathrm{Area}_\varphi(P) \leq \mathrm{Area}_\varphi(\Sigma).$$

Vậy, Định lý đã được chứng minh xong. □

4 KẾT LUẬN

Bài báo đã thiết lập công thức tính độ cong trung bình H của một mặt kiểu đồ thị của một hàm u không gian tích cong $\mathbb{R} \times_f \mathbb{R}^2$, và xây dựng mối quan hệ giữa $\mathrm{div}\dfrac{Du}{f\sqrt{f^2 + Du^2}}$ và H. Đặc biệt, bài báo đã thu được các tính chất cực tiểu diện tích địa phương và toàn phần của các slice trong các không gian tích cong với mật độ $(\mathbb{R}^+ \times_f \mathbb{R}^2, e^{-\varphi(\mathsf{x})})$ và $\mathbb{R}^+ \times_f \mathbb{G}^2$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] D. T. Hieu (2020), *A weighted volume estimate and its application to Bernstein type theorems in Gauss space,* Colloq. Math., **159**(1), 25-28.

[2] D. T. Hieu (2011), *Some calibrated surfaces in manifolds with density,* J. Geom. Phys. **61**, 1625–1629.

[3] F. Morgan (2005), *Manifolds with density,* Notices Amer. Math. Soc. **52**, 853–858.

[4] B. Oneill (1983), *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, London.

[5] P. J. Olver (2015). *Introduction to the Calculus of Variations*, University of Minnesota, http://www. math. umn. edu/˜ olver/ln_/cv. pdf, 24.

[6] J. J. Salamanca, I. M. C. Salavessa (2015), *Uniqueness of ϕ-minimal hypersurfaces in warped product manifolds,* J. Math. Anal. Appl. **422**, 1376–1389.

Title: SOME RESULTS ON GRAPHS OF FUNCTIONS AND SLICES IN THE WEIGHTED WARPED PRODUCT SPACES $(\mathbb{R}^+ \times_f \mathbb{R}^2, e^{-\varphi(\mathsf{x})})$ AND $\mathbb{R}^+ \times_f \mathbb{G}^2$

Abstract: In this paper, we consider a surface which is the graph of a function u in the warped product space $\mathbb{R} \times_f \mathbb{R}^2$, give a formula for calculating the mean curvature H of the surface and show a relation between $\operatorname{div}\dfrac{Du}{f\sqrt{f^2+Du^2}}$ and H. In particular, we obtain the local and global area-minimizing properties of slices in the weighted product spaces $(\mathbb{R}^+ \times_f \mathbb{R}^2, e^{-\varphi(\mathsf{x})})$ and $\mathbb{R}^+ \times_f \mathbb{G}^2$.

Keywords: Weighted product spaces, graphs of functions, area-minimizing properties.