

# VỀ MỘT MÔ HÌNH NHẬN THỨC

VŨ TUẤN

Vũ Khoa học Kỹ thuật

## I - VÀI NÉT VỀ MÔ HÌNH TOÁN TRONG THỦY VĂN

### 1. Mô hình trong thủy văn

Kể từ năm 1959, sau khi Dooge vận dụng lý thuyết hệ thống trong điều khiển học để giải quyết bài toán đường đơn vị tổng quát và đưa ra khái niệm lưu vực sông là một hệ thống thủy văn - phương hướng mô hình bắt đầu được sử dụng trong thủy văn. Tuy nhiên, phải cho tới 1973 khi Dooge đưa ra định nghĩa hoàn chỉnh về hệ và biểu diễn những vấn đề cơ bản của lý thuyết hệ thống dưới dạng toán học rõ ràng thì mô hình mới thực hiện sự chiếm lĩnh được vị trí quan trọng và phát triển với một tốc độ rất nhanh trong khoa học thủy văn.

Định nghĩa hệ thống của Dooge như sau [1]:

«Hệ thống là bất kỳ một cấu trúc, thiết bị, sơ đồ hoặc trình tự nào đó, thực hay trừu tượng, được gắn với một bước thời gian nhất định, liên hệ giữa lượng vào (nguyên nhân, một kích động của vật chất, năng lượng, thông tin) với lượng ra (hệ quả, phản ứng của thông tin, năng lượng hay vật chất)»

Một mô hình đơn thuần là biểu diễn của một hệ thống. Tùy theo mức độ biểu diễn hệ thống là đơn giản hay phức tạp, biểu diễn ít hay nhiều mối quan hệ trong hệ thống, mục tiêu quan tâm trong nghiên cứu hệ thống... mà có những dạng mô hình khác nhau của cùng một hệ thống. Dưới đây chúng ta sẽ gọi lượng vào (hay những khái niệm tương đương) là input và lượng ra (hay những khái niệm tương đương) là output. Các mô hình trong hệ thống thủy văn có thể được phân chia thành ba dạng: mô hình vật lý, mô hình tương tự và mô hình toán.

### 2. Mô hình toán trong thủy văn

Mô hình toán là một mô hình mà trong đó sự tương tác trong hệ thống được biểu diễn bởi một tập hợp các phương trình, cùng với những quan hệ logic biểu diễn mối quan hệ giữa các biến số và các thông số. Trong dạng tổng quát, một mô hình toán có thể được mô tả dưới dạng sau:

$$F \left\{ x_i(t); y_i(t); \frac{dx_i}{dt}; \dots; \frac{d^k x_i}{dt^k}; \frac{dy_i}{dt}; \dots; \frac{d^p y_i}{dt^p}; \theta_1; \dots; \theta_q \right\} = 0 \quad (1)$$

Trong đó:

$x_i(t)$  — input của hệ thống tại thời điểm  $t$

$y_i(t)$  — output của hệ thống tại thời điểm  $t$

$\theta_i$  — thông số của hệ thống.

Khi một hệ thống là rất phức tạp — như hệ thống thủy văn có tính đến sự tồn tại của sai số trong hệ thống, hàm  $F$  trong (1) thường được thay thế bởi hàm  $f$  và nếu tính đến một thực tế là những biến số trong thủy văn thường được đo đạc tại những thời điểm rời rạc chứ không phải liên tục theo  $t$ , nghĩa là những đạo hàm riêng được thay thế bởi những xấp xỉ sai phân hữu hạn ( $\Delta t$  bằng một đơn vị thời gian):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} (x_{t+1} - x_{t-1}); \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2} (x_{t+1} - 2x_t + x_{t-1}); \dots$$

Trong tình hình như vậy với output bất kỳ  $y_t$ , mô hình (1) được viết thành:

$$y_t = f \left\{ x_t^{(i)}; x_{t-1}^{(i)}; \dots; y_{t-1}^{(i)}; y_{t-2}^{(i)}; \dots; \theta_1; \theta_2 \dots \right\} + s_t \quad (2)$$

Điều này có nghĩa là output bất kỳ  $y_t$  tại thời điểm  $t$  của hệ thống là phụ thuộc vào những giá trị  $y_t$  tại thời đoạn trước nó và vào giá trị hiện tại cũng như giá trị trước của các input  $x_t$ .

### 3. Phân loại mô hình toán trong thủy văn

Theo cách phân loại của Clarke (1973), các mô hình toán trong thủy văn có thể được chia thành bốn nhóm chính, tùy theo sự tổ hợp giữa hai cặp thuộc tính khác nhau của mô hình: ngẫu nhiên — tất định và nhận thức — kinh nghiệm.

— Mô hình là ngẫu nhiên nếu tồn tại ít nhất một biến ngẫu nhiên có phân bố xác suất nào đó còn mô hình là tất định nếu mọi biến số đều không phải là biến ngẫu nhiên.

— Mô hình được gọi là mô hình nhận thức nếu những quan hệ hàm giữa các biến được gắn với những ý nghĩa vật lý nào đó, còn nếu mô hình là kinh nghiệm thì không thể gắn được những ý nghĩa vật lý cho những quan hệ này.

#### — Mô hình «hộp đen» và mô hình «hộp xám»

Một mô hình được gọi là mô hình «hộp đen» nếu chúng ta hoàn toàn không biết gì về những tính chất cơ bản của hệ thống (như: tuyến tính hay phi tuyến, có hay không có bộ nhớ...). Tuy nhiên, trong thực hành, một số giả định phải được đặt ra nếu muốn thu được những kết quả nào đó, bởi vậy những mô hình này được gọi là mô hình «hộp xám». Chẳng hạn, chúng ta phải giả định hệ thống là tuyến tính, bất biến theo thời gian — nghĩa là cho mô hình thuộc về một dạng riêng nào đó — trong khi còn phải xác định những thuộc tính còn lại như bậc của phương trình trong hệ thống hoặc giá trị riêng của các hệ số trong phương trình đó [7].

## II — MÔ HÌNH SMART

Mô hình SMART (Soil Moisture Accounting and Routing Model) là một mô hình nhận thức — tất định của một hệ thống tuyến tính không đổi theo thời gian với các thông số tập trung.

## 1. Xuất xứ của mô hình SMART

Năm 1970, Nash trình bày quan điểm của ông trong việc sử dụng các mô hình nhận thức trong thủy văn qua loạt ba bài báo được viết cùng với một số nhà thủy văn có tên tuổi [3,4,6]. Ba bài báo này được viết dưới cùng một tiêu đề « Dự báo dòng chảy sông bằng những mô hình nhận thức ». Những bài báo này là cơ sở lý luận cho sự ra đời của mô hình lớp (Layers Model) – phần cơ bản cấu trúc nên thành phần tổng lượng của mô hình SMART sau này – những tư tưởng của Nash được tiếp tục phát triển qua loạt mô hình tuyến tính phản ứng tổng hợp đã được ông đúc kết qua bài báo [5] viết cùng với Foley (1982). Song song với hướng nghiên cứu các mô hình tuyến tính phản ứng tổng hợp, ông phát triển hướng nghiên cứu các mô hình tuyến tính nhiều loại mô hình tỏ ra có nhiều ưu điểm khi sử dụng tính toán và dự báo cho những sông lớn mà dòng chảy mang tính mùa rõ rệt.

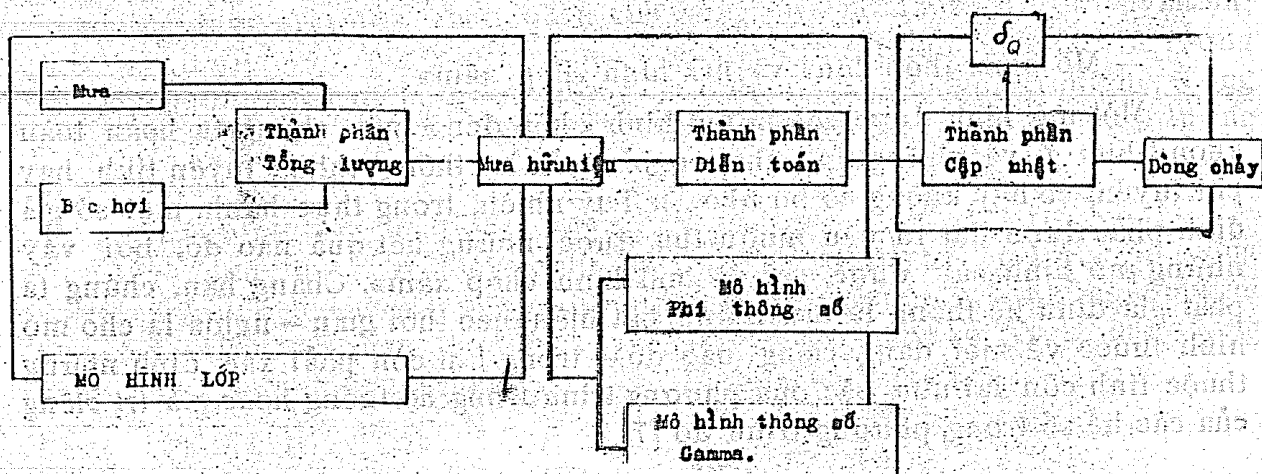
Năm 1986, dưới sự chỉ đạo trực tiếp của Nash và Dooge, việc ghép nối và phát triển mô hình lớp cùng với hai thành phần diễn toán và cập nhật để tạo ra một mô hình nhận thức hoàn chỉnh đã được thực hiện tại Khoa Thủy văn kỹ thuật, Trường Đại học tổng hợp quốc gia Galway, Cộng hòa Ailen [7]. Mô hình hoàn chỉnh này được mang tên là mô hình SMART.

## 2. Cấu trúc tổng quát của mô hình SMART

Mô hình SMART hình thành từ ba thành phần cơ bản: thành phần tổng lượng, thành phần diễn toán và thành phần cập nhật.

### a) Thành phần tổng lượng

Như đã nêu trên, thành phần tổng lượng được xây dựng nên chủ yếu từ mô hình lớp với một số cải tiến nhỏ trong kỹ thuật lựa chọn sự kiện và kỹ thuật tối ưu hóa tự động các thông số của mô hình.



Hình 1. Sơ đồ tổng quát của mô hình SMART.

Hoạt động của mô hình lớp được mô tả chi tiết trong [4]

Sơ đồ tổng quát của mô hình SMART được mô tả trong hình vẽ 1 và mối quan hệ giữa các thông số của mô hình lớp với dòng chảy tính toán được mô tả trong hình 2

### b) Thành phần diễn toán

Với thành phần này, input là «mưa hữu hiệu» và output là dòng chảy tính toán. Như vậy, đây chính là một bài toán trong lý thuyết đồng nhất hệ thống tuyến tính [1] nhằm tìm ra hàm phản ứng mạch động khi cho trước input và output.

Về nguyên lý, bài toán này có thể được giải quyết bằng rất nhiều phương pháp. Chúng có thể được phân chia thành ba nhóm: nhóm các phương pháp cổ điển (điển hình là phương pháp của Collins), nhóm các phương pháp biến đổi và nhóm các phương pháp tương quan. Mặc dù những phương pháp biến đổi đã được nghiên cứu nhiều (sử dụng phép biến đổi Laplace, phép biến đổi Fourier, phân tích điều hòa, phân tích hàm Laguerre...) như đã trình bày trong [7], phương pháp tương quan dựa trên cơ sở lý thuyết bình phương tối thiểu đề cực tiểu hóa sự sai lệch giữa output tính toán và thực đo thường cho những kết quả tương đối khả quan trong thực tế sử dụng.

Trong quá trình xây dựng mô hình SMART, chúng tôi đã thử nghiệm hai mô hình diễn toán khác nhau: mô hình thông số và mô hình phi thông số.

+ Mô hình thông số: Nash (1957) đã gợi ý rằng chuỗi gồm  $n$  bể chứa với hệ số lưu trữ  $K$  bằng nhau là một mô hình đủ tổng quát. Như vậy, mô hình có dạng:

$$(1) \quad (1 + KD)^n \cdot y(t) = x(t) \quad (3)$$

Với  $D$  là toán tử  $\frac{d}{dt}$

Biến đổi Laplace của hệ:

$$(2) \quad Y(S) = (1 + KS)^{-n} \cdot X(S) \quad (4)$$

Hàm chuyển của hệ sẽ là:

$$(3) \quad H(S) = (1 + KS)^{-n} \quad (5)$$

với  $Y(S) = L[y(t)]$

$X(S) = L[x(t)]$

Hàm phản ứng mạch động tức thời chính là biến đổi Laplace ngược của hàm chuyển này:

$$(4) \quad h(t) = L^{-1} [H(S)] \quad (6)$$

( $L$  - biến đổi Laplace)

(5) Trong trường hợp tổng quát (không nguyên), ta có phân bố Gamma:

$$(6) \quad h(t) = \frac{1}{K \cdot \Gamma(n)} \left(\frac{t}{K}\right)^{n-1} e^{-t/K} \quad (7)$$

Hai thông số  $n$  và  $K$  có thể được tìm ra từ số liệu thực của chuỗi input và output. Trong trường hợp này, input là giá trị của mưa hữu hiệu (tức là output của mô hình lớp) và output là dòng chảy thực đo. Việc xác định  $n$  và  $K$  phải cần đến những quan hệ mô men của Nash:

$$u = \frac{u_1'}{u_2} = \frac{(Q_1' - I_1')^2}{(Q_2 - I_2)} \text{ và } K = \frac{u_2}{u_1'} = \frac{Q_2 - I_2}{Q_1' - I_1'} \quad (8)$$

Trong đó:

$I_1', Q_1'$  là những mô men gốc bậc 1 của input và output;

$I_2, Q_2$  là những mô men tâm bậc 2 của input và output.

+ Mô hình phi thông số:

Xuất phát từ tích phân chập quen thuộc trong thủy văn.

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (9)$$

Với dạng rời rạc, chúng ta có tổng chập:

$$y_n = \sum_{r=0}^m x_n - r \cdot h_r \quad (10)$$

Trong đó:

$x$  — chuỗi input

$y$  — chuỗi output

$h$  — hàm phản ứng mạch động

$m$  — độ dài bộ nhớ của hệ.

Trong thực tế, với sự có mặt của sai số và những giả định về tính chất tuyến tính của hệ thống gây nên, tổng chập có thể được viết dưới dạng ma trận có tính đến thành phần sai số như sau.

$$y = X \cdot h + \varepsilon \quad (11)$$

Trong đó  $y$  là véc tơ output,  $X$  là ma trận input,  $h$  là véc tơ phản ứng mạch động,  $\varepsilon$  là véc tơ sai số.

Với những biến đổi toán học để cho tổng bình phương của các sai số là cực tiểu, ta có:

$$h = (X^T X)^{-1} X^T y \quad (12)$$

Các quá trình tính toán (7) và (12) là nội dung của thành phần diễn toán thông số và phi thông số trong mô hình SMART. Sử dụng những hàm này, với input là mưa hữu hiệu (kết quả của thành phần tổng lượng) sẽ cho ta output là dòng chảy tính toán trong những thời đoạn tính toán tương ứng với input.

### c) Thành phần cập nhật

Mô hình cập nhật được sử dụng là một mô hình tự hồi quy bậc ba:

$$y_t = \mu + \sum_{j=1}^3 \Phi_j (y_{t-j} - \mu) + \varepsilon_t \quad (13)$$

Trong đó:

$y_t$  — chuỗi phụ thuộc, có giá trị trung bình  $\mu$  và phương sai  $\sigma^2$

$\varepsilon_t$  — chuỗi độc lập có giá trị trung bình bằng 0 và phương sai không đổi  $\sigma^2$ .

$\Phi_j$  — Các thông số của mô hình.

3. Thử nghiệm mô hình SMART.

a) Phương pháp xác định thông số

Như trên đã mô tả, có nhiều cách xác định thông số, chẳng hạn, phương pháp thử sai, phương pháp tối ưu hóa theo hàm mục tiêu... Trong khi xây dựng mô hình SMART, phương pháp sau được sử dụng.

Hàm mục tiêu của mô hình được xác định theo tiêu chuẩn của Nash và Sutcliffe (1970):

$$F^2 = \sum_0^n (Q_t, \text{ đo đạc} - Q_t, \text{ tính toán})^2 \quad (14)$$

Đồng thời, độ hữu hiệu của mô hình được xác định bởi:

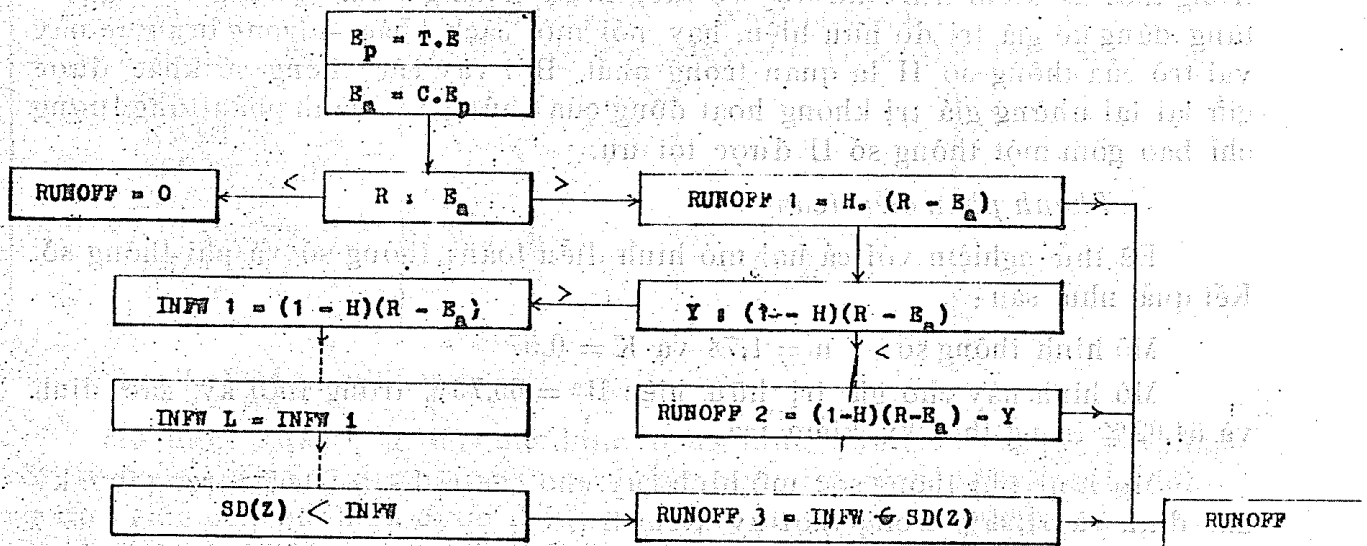
$$R^2 = \frac{F_0^2 - F^2}{F_0^2} \quad (15)$$

trong đó  $F_0^2$  là phương sai đầu, được tính bởi:

$$F_0^2 = \sum_0^n (Q_t, \text{ đo đạc} - \bar{Q})^2 \quad (16)$$

$\bar{Q}$  - giá trị trung bình của dòng chảy quan trắc trong thời kỳ xác định.

Như vậy các thông số của mô hình được xác định bởi cực tiểu hóa hàm  $F^2$ . Chúng tôi đã sử dụng thuật toán Rosenbrock [7] để xác định các thông số của mô hình.



Hình 2. Quan hệ giữa các thông số của mô hình lớp và dòng chảy.

T, C, Y, H và Z: Các thông số của mô hình lớp;  $E_p$ : Thế bốc hơi;  $E_a$ : Bốc hơi thực tế; Mưa; RUNOFF 1: Dòng chảy do H; RUNOFF 2: Dòng chảy do Y; RUNOFF 3: Dòng chảy do Z; INF 1: Lượng nước thấm trong tầng thứ 1; SD(Z): Lượng hụt ẩm trong đất ở tầng Z; RUNOFF: Dòng chảy tổng cộng.

### b) Lưu vực và số liệu thử nghiệm

Lưu vực Nước vàng được sử dụng làm lưu vực thử nghiệm cho mô hình SMART. Đó là một lưu vực nhỏ ở vùng Đông Bắc nước ta, với diện tích là 125km<sup>2</sup>. Lớp phủ phần lớn là rừng nhiều tầng tán, độ dốc tương đối lớn. Số liệu được sử dụng là lượng mưa ngày của hai điểm, lượng dòng chảy ngày của trạm lưu lượng khống chế toàn lưu vực và lượng bốc hơi ngày của một trạm khí tượng ở ngoài lưu vực (hình 3).

Thời gian có số liệu là 6 năm (1971 – 1976). Trong khi sử dụng mô hình SMART, chúng tôi đã lấy 4 năm (1971 – 1974) làm thời kỳ xác định để tìm bộ thông số cho mô hình và dùng tài liệu của hai năm còn lại (1975 – 1976) làm thời kỳ kiểm tra để đánh giá lại mô hình với bộ thông số xác định.

### c) Kết quả thử nghiệm

#### – Thành phần tổng lượng

Đã tìm các tổ hợp tối ưu của các thông số bởi thuật toán Rosenbrock. Qua quá trình xác định thông số tối ưu nhận thấy với lưu vực này các thông số C và Y là các thông số kém hoạt động. Bởi vậy, kết quả cuối cùng là lựa chọn ra hai mô hình:

Mô hình hai thông số:

$$H = 0,69 \text{ và } Z = 16,2$$

Mô hình này cho giá trị độ hữu hiệu mô hình  $R^2 = 89,47\%$  trong thời kỳ xác định và 87,74% trong thời kỳ kiểm tra.

Mô hình một thông số:  $H = 0,68$ .

Mô hình này cho giá trị  $R^2 = 89,45\%$  trong thời kỳ xác định và 88,87% trong thời kỳ kiểm tra. Như vậy rõ ràng là sự tham gia của Z cũng không làm tăng đáng kể giá trị độ hữu hiệu, hay nói một cách khác – trong lưu vực này vai trò của thông số H là quan trọng nhất. Bởi vậy các thông số khác được giữ lại tại những giá trị không hoạt động của chúng và thành phần tổng lượng chỉ bao gồm một thông số H được tối ưu.

#### – Thành phần diễn toán

Đã thử nghiệm với cả hai mô hình diễn toán: thông số và phi thông số. Kết quả như sau:

Mô hình thông số:  $n = 1,78$  và  $K = 0,57$

Mô hình này cho giá trị hữu hiệu  $R^2 = 66,73\%$  trong thời kỳ xác định và 64,02% trong thời kỳ kiểm tra.

Mô hình phi thông số: mô hình này cho giá trị  $R^2 = 69,65\%$  trong thời kỳ xác định và 64,26% trong thời kỳ kiểm tra.

Thủy đồ đơn vị của hai mô hình này được trình bày trên hình 4 và kết quả diễn toán so sánh giữa quá trình dòng chảy thực đo và tính toán bởi mô hình phi thông số được trình bày trong [7].

#### – Thành phần cập nhật

Qua khảo sát tương quan đồ và kết quả tính toán sử dụng những mô hình tự hồi quy có bậc khác nhau, nhận thấy chuỗi sai số không thể hiện một

độ tồn lưu rõ ràng. Điều này có thể được giải thích bởi độ tồn lưu của sai số chỉ biểu hiện tác động của nó trong những thời đoạn nhỏ hơn thời đoạn sử dụng để tính toán trong mô hình này. Nói một cách khác thời đoạn tính toán ngày là quá lớn đối với một lưu vực dốc, có diện tích 125km<sup>2</sup> như lưu vực thử nghiệm. Bởi vậy, việc sử dụng thành phần cập nhật (làm tăng số thông số từ 1 đến 3 – nếu sử dụng mô hình tự hồi quy bậc 3 là tối đa) cũng chỉ nâng cao độ hữu hiệu của mô hình từ 69,65% đến 69,90%. Trong khi đó, đối với một lưu vực khác (lưu vực Bird Creek) thành phần cập nhật đã làm tăng độ hữu hiệu của mô hình từ 83,37% đến 88,77% trong thời kỳ xác định và từ 57,02 đến 71,26 trong thời kỳ kiểm tra [7].

*d) So sánh với một số mô hình nhận thức khác*

Để đánh giá những kết quả thu được bởi mô hình SMART, chúng tôi đã tiến hành so sánh độ hữu hiệu của mô hình này với một số mô hình khác theo những số liệu được cung cấp qua đợt so sánh quốc tế về các mô hình nhận thức dùng trong dự báo thủy văn nghiệp vụ do WMO tổ chức năm 1975 [9].

Những mô hình sử dụng để so sánh là : SSARR ; NWSH ; SRFCH ; TANK ; CLS ; SMART.

Kết quả tính toán độ hữu hiệu của các mô hình cho các lưu vực trong thời kỳ kiểm tra được trình bày trong bảng 1.

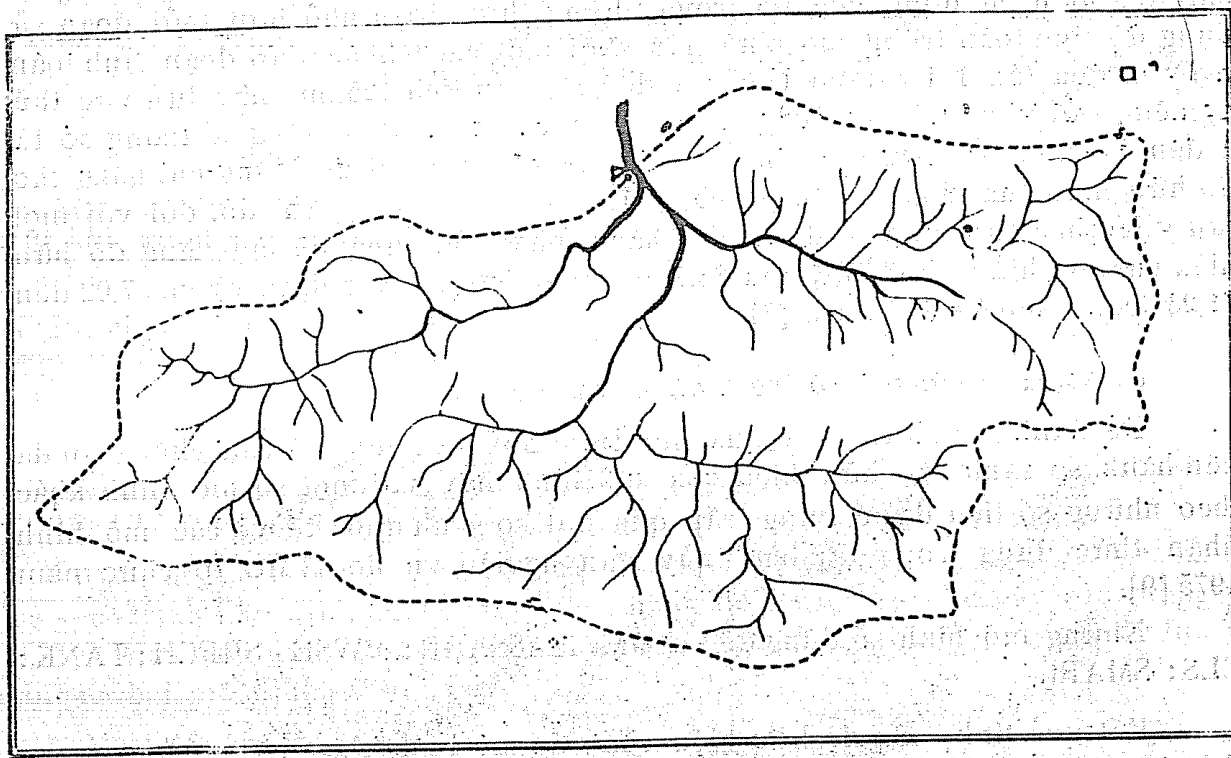
**Bảng 1 – So sánh độ hữu hiệu giữa các mô hình trong thời kỳ kiểm tra.**

Mô hình	LƯU VỰC		
	Bird Creek (Mỹ; F = 2344km <sup>2</sup> )	Wollmbi Brook (Úc; F = 1580km <sup>2</sup> )	Kiju (Nhật, F = 1445km <sup>2</sup> )
SSARR	61	29	70
NWSH	85	47	78
SRFCH	81	56	85
TANK1	69	66	79
CLS	35	76	48
SMART	71	64	74

*e) một số nhận xét*

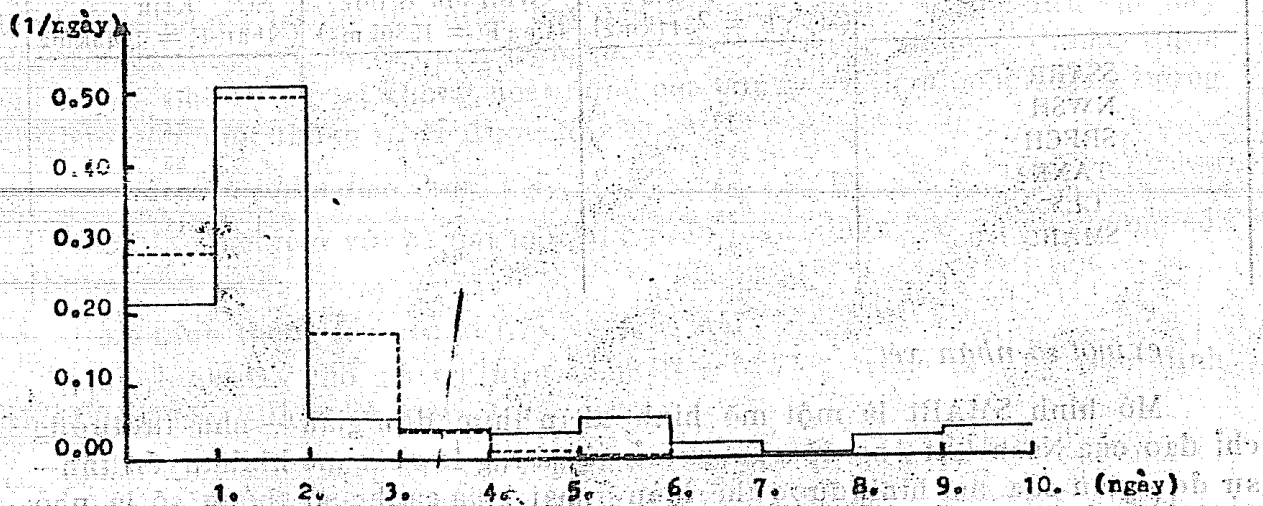
Mô hình SMART là một mô hình nhận thức đơn giản – như tư tưởng chỉ đạo của Nash khi ông đề xuất cơ sở xây dựng lớp các mô hình tuyến tính – sự đơn giản của mô hình được thể hiện ở hai khía cạnh: số thông số là nhỏ và dễ sử dụng. Chúng ta có thể so sánh số thông số cực đại của mô hình SMART với một số mô hình khác: Nếu tất cả các thông số của mô hình SMART đều được tối ưu thì cơ số đó là 7, trong khi của mô hình GIRARD 1 (Pháp) là 12, của TANK1 (Nhật) là từ 12 tới 24, của IMH2 – SSVP (Rumani) là 13, của NWSH (Mỹ) là 18, của SRFCH (Mỹ) là 11 của HMC (Liên Xô) là 11... Ngay cả trong mô hình IHL – một dạng gần gũi của mô hình SMART, được phát triển trên nền tảng tư tưởng chỉ đạo của Nash cũng có tới 15 thông số.





**Hình 3. Sơ họa lưu vực NUOC VANG và vị trí các điểm đo.**

- Điểm đo mưa (Số liệu mưa ngày từ 1971 đến 1976)
- Trạm khí tượng (Số liệu bốc hơi ngày từ 1971 đến 1976)
- ▽ Trạm thủy văn (Số liệu dòng chảy ngày từ 1971 đến 1976)



**Hình 4. Thủy đồ đơn vị.**

Mô hình phi thông số.

Mô hình thông số Gamma.

Tuy nhiên, là một mô hình mới được hoàn thiện, SMART cũng còn có không ít nhược điểm cần phải khắc phục [7], thuật toán tối ưu tự động theo Rosenbrock tỏ ra kém hiệu lực khi trong không gian giá trị của hàm mục tiêu tồn tại nhiều cực trị địa phương; mô hình diễn toán thông số theo hàm Gamma của Nash là giản đơn, nên được phát triển theo mô hình hai bể chứa có hệ số lượng trừ khác nhau với hàm phản ứng mạch động được biểu diễn bởi:

$$h(t) = \frac{1}{K_1 - K_2} (e^{-t/K_1} - e^{-t/K_2}) \quad (17)$$

hoặc tổng quát hơn là mô hình n bể chứa độc lập [1]

$$(1 + K_1 D) (1 + K_2 D) \dots (1 + K_n D) y(t) = x(t)$$

Việc hoàn thiện mô hình SMART đang được tiếp tục tại Khoa Thủy văn kỹ thuật, Trường Đại học tổng hợp quốc gia Galway, nơi khai sinh ra nó. Tuy nhiên, những ứng dụng của nó để giải quyết những vấn đề trong bài toán quy hoạch lại được nhiều nơi quan tâm. Việc ghép nối mô hình USLE để hình thành một mô hình tính toán chỉ tiêu suy thoái môi trường, sau khi kết hợp với những mô hình kinh tế cụ thể (các Subroutine về nông nghiệp, lâm nghiệp, thủy điện...) đã được tiến hành nhằm giải quyết bài toán quy hoạch tối ưu cho một lưu vực sông cụ thể với mục tiêu: thu được hiệu quả kinh tế tối đa và sự phá hoại môi trường là tối thiểu [8].

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Dooge, J.C.I. Linear theory of hydrologic systems. Agric. Res. Serv. U.S. Dep. Agric. Washington, D.C. Tech. Bull. No. 1468/1973.
2. Dooge, J.C.I. Problems and methods of rainfall-runoff modelling. Wiley, New York, 1977.
3. Mandeville, A.N. O'Connell, P.E. Sutcliffe, J.V. Nash. J.E. River flow forecasting through conceptual models, Part 3: The Ray catchment at Grendon Underwood. J. Hydrol. 11: 109 - 128, 1970
4. Nash J.E. Sutcliffe J.V. River flow forecasting through conceptual models. Part 1: A discussion of principles. Journal Hydrology. 10: 282 - 290, 1970.
5. Nash J.E. Foley J.J. Linear models of rainfall - runoff systems. In: Rainfall-Runoff relationship. Water Resources Publications, Littleton, Colo, 1970.
6. O'Connell P.E, Nash J.E, Farrell, J.P. River flow forecasting through conceptual models. Part 2: The Brosna catchment at Ferbane. J. Hydrol. 10: 317 - 329, 1970.
7. Vu Van Tuan. The SMART model: an application. (Luận văn M.Sc - không xuất bản). U.C.G, IRELAND, 1986.
8. Vu Van Tuan. Report No. 157. Hydraulics Research Limited Wallingford. U.K 1986.
9. W.M.O. Intercomparison of conceptual models used in operational hydrological forecasting. Operational report No. 7. 1975.