

TÍNH ỔN ĐỊNH NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN TỰA CÂN BẰNG VECTO THAM SỐ VỚI CẤU TRÚC THỨ TỰ CHỨA BIẾN

**Đình Vinh Hiền*, Trần Đăng Hùng, Nguyễn Đình Inh,
Nguyễn Văn Hiếu, Võ Thành Sơn**

Trường Đại học Công Thương Thành phố Hồ Chí Minh

*Email: hiendv@huit.edu.vn

Ngày nhận bài: 17/11/2023; Ngày duyệt đăng: 26/01/2024

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi xét bài toán tựa cân bằng vectơ mạnh với cấu trúc thứ tự chứa biến. Bằng cách nhiều bài toán bởi tham số, chúng tôi nghiên cứu tính ổn định nghiệm của bài toán này. Bằng cách áp các giả thiết thích hợp lên ánh xạ mục tiêu và các ràng buộc, chúng tôi thiết lập điều kiện đủ cho một số tính chất của ánh xạ nghiệm như tính compact, tính liên tục/nửa liên tục theo nghĩa Berge và Hausdorff. Các kết quả trên được ứng dụng vào việc thiết lập điều kiện ổn định nghiệm của bài toán cân bằng Walras.

Từ khóa: Bài toán tựa cân bằng vectơ mạnh, tính ổn định, cấu trúc thứ tự chứa biến.

1. GIỚI THIỆU

Bài toán cân bằng cung cấp một định dạng tổng quát và phù hợp cho việc xây dựng và nghiên cứu các bài toán khác nhau phát sinh trong toán học thuần túy và ứng dụng. Nó bao gồm nhiều bài toán như bài toán điểm bất động, bất đẳng thức biến phân, bài toán cân bằng Nash và bài toán tối ưu (xem, chẳng hạn [1-3]). Do đó, nghiên cứu bài toán cân bằng và các phiên bản mở rộng của nó là một trong những chủ đề rất thú vị và quan trọng trong lý thuyết tối ưu và ứng dụng. Bài toán cân bằng đã được mở rộng cho trường hợp các ánh xạ mục tiêu có giá trị là vectơ hoặc tập hợp và đã được thảo luận chi tiết (xem [4-6]). Một dạng tổng quát hóa khác của bài toán này được đưa ra cho trường hợp trong đó các tập ràng buộc phụ thuộc vào biên quyết định được gọi là bài toán tựa cân bằng; xem, chẳng hạn, [7-11] và các tài liệu tham khảo trong đó.

Phân tích tính ổn định của nghiệm nhằm khảo sát đáng điều của chúng trong bối cảnh dữ liệu đầu vào bị nhiễu có ý nghĩa quan trọng trong việc ra quyết định và thiết kế thuật toán. Tính ổn định của nghiệm có thể được chia thành hai loại chính: định lượng và định tính. Loại thứ nhất tập trung vào đánh giá khoảng cách giữa hai tập nghiệm trước sự thay đổi của các tham số nhiễu, thông qua việc sử dụng ước lượng kiểu Lipschitz hoặc Hölder. Loại thứ hai tập trung vào xem xét các tính chất của ánh xạ nghiệm, như tính compact, tính nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới theo nghĩa của Berge hoặc Hausdorff. Hai loại phân tích tính ổn định này đã được nghiên cứu rộng rãi cho các bài toán cân bằng khác nhau.

Mục tiêu của nghiên cứu này là khảo sát các tính chất ổn định định tính cổ điển của ánh xạ nghiệm đối với bài toán tựa cân bằng vectơ trong trường hợp nón phụ thuộc biến. Đầu tiên, chúng tôi xét tính nửa liên tục trên của ánh xạ nghiệm của bài toán đã cho, dựa trên các giả thiết về tính nửa liên tục của ánh xạ mục tiêu và các ánh xạ ràng buộc. Tiếp theo, chúng tôi nghiên cứu tính nửa liên tục dưới của ánh xạ nghiệm thông qua tính lùi suy rộng, thay vì sử dụng thông tin về tập nghiệm. Cuối cùng, chúng tôi áp dụng kết quả thu được vào việc xét tính ổn định của mô hình cân bằng Walras như một ứng dụng.

Bài báo được tổ chức như sau. Trong Phần 2, chúng tôi trình bày cách xây dựng bài toán tựa cân bằng vectơ với nón biến thiên, đồng thời làm rõ một số khái niệm và tính chất cần thiết cho phần tiếp theo. Phần 3 tập trung thảo luận về các kết quả chính liên quan đến tính ổn định định tính của bài toán nói trên. Cuối cùng, Phần 4 đề cập đến trường hợp cụ thể của bài toán cân bằng Walras và áp dụng kết quả từ phần trước.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong toàn bài báo này, trừ khi có quy định khác, chúng tôi sử dụng các ký hiệu sau đây. Cho P, X, Y là các không gian định chuẩn, Λ là không gian metric, $A: X \times \Lambda \rightrightarrows X, B: X \times \Lambda \rightrightarrows P$ là các ánh xạ đa trị, $K: X \times \Lambda \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị sao cho $K(x, \lambda)$ là một nón lồi, đóng, có đỉnh, chính thường với phần trong khác rỗng, với mỗi $(x, \lambda) \in X \times \Lambda$. Cho $f: X \times X \times P \times \Lambda \rightarrow Y$ là một ánh xạ có giá trị vectơ. Với mỗi $\lambda \in \Lambda$, chúng ta xét bài toán tựa cân bằng vectơ:

(SVEP) Tìm $\bar{x} \in A(\bar{x}, \lambda)$ sao cho tồn tại $z \in B(\bar{x}, \lambda)$ thỏa

$$f(\bar{x}, y, z, \lambda) \in K(\bar{x}, \lambda), \quad \forall y \in A(\bar{x}, \lambda).$$

Vi mỗi $\lambda \in \Lambda$, đặt $G(\lambda) = \{x \in X \mid x \in A(x, \lambda)\}$. Tập nghiệm của bài toán (SVEP) được ký hiệu bởi

$$S(\lambda) = \{x \in G(\lambda) \mid \exists z \in B(x, \lambda), f(x, y, z, \lambda) \in K(x, \lambda), \forall y \in A(x, \lambda)\}.$$

Nhận xét 1 Khi K là nón cố định, tức là $K(x, \lambda)$ không phụ thuộc vào (x, λ) , bài toán (SVEP) trở thành bài toán (QEP₂) đã được xét trong [12].

Vi điều kiện tồn tại nghiệm của bài toán đã được nghiên cứu (xem, chẳng hạn [13, 14]), trong bài báo này, chúng tôi giả thiết rằng $S(\lambda) \neq \emptyset$ với mọi λ thuộc lân cận của điểm đang xét.

Định nghĩa 1 Cho X, Y là các không gian vectơ topo Hausdorff và F là một ánh xạ đa trị từ X vào Y .

(a) F được gọi là nửa liên tục trên (usc) tại x_0 nếu với mỗi tập mở V chứa $F(x_0)$, tồn tại một lân cận U của x_0 sao cho $F(U) \subset V$.

(b) F được gọi là nửa liên tục dưới (lsc) tại x_0 nếu với mỗi tập mở V của Y với $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$, tồn tại một lân cận U của x_0 sao cho với mọi $x \in U, F(x) \cap V \neq \emptyset$.

(c) F được gọi là liên tục tại x_0 nếu nó vừa usc và lsc tại x_0 .

Chúng ta nói rằng một ánh xạ thỏa mãn một tính chất nào đó trên tập $M \subseteq X$ nếu nó thỏa mãn tính chất đó tại mọi điểm của M . Nếu $M = X$ chúng ta bỏ qua cụm từ "trên tập X " khi phát biểu.

Định nghĩa 2 Cho X, Y và F như trong Định nghĩa 1.

(a) F được gọi là nửa liên tục trên Hausdorff (H-usc) tại x_0 nếu với mỗi lân cận W của điểm gốc θ_Y trong Y , tồn tại một lân cận N của x_0 sao cho, $F(x) \subset F(x_0) + W$ với mọi $x \in N$.

(b) F được gọi là nửa liên tục dưới Hausdorff (H-lsc) tại x_0 nếu với mỗi lân cận W của điểm gốc θ_Y trong Y , tồn tại một lân cận N của x_0 sao cho, $F(x_0) \subset F(x) + W$ với mọi $x \in N$.

(c) F được gọi là liên tục Hausdorff (H-continuous) tại x_0 nếu nó vừa H-usc và H-lsc tại x_0 .

Bổ đề 1 (Xem [15]) Cho $F: X \rightrightarrows Y$ là một ánh xạ đa trị. Khi đó các mệnh đề sau đúng.

(i) Nếu $F(\bar{x})$ là compact thì, F là usc tại \bar{x} khi và chỉ khi với mọi dãy $\{x_n\} \subset X$ với $x_n \rightarrow \bar{x}$ và $y_n \in F(x_n)$, tồn tại một dãy con $\{y_{n_k}\}$ hội tụ về $\bar{y} \in F(\bar{x})$.

(ii) F là lsc tại \bar{x} khi và chỉ khi, với mọi dãy $\{x_n\} \subset X$ với $x_n \rightarrow \bar{x}$ và $\bar{y} \in F(\bar{x})$, tồn tại một dãy $\{y_n\}$ với $y_n \in F(x_n)$ sao cho $y_n \rightarrow \bar{y}$;

(iii) Nếu F là usc thì F là H-usc;

(iv) F là H-lsc khi và chỉ khi F là lsc và có giá trị compact;

(v) Nếu F là usc và có giá trị đóng thì F là ánh xạ đóng.

Bây giờ chúng ta giới thiệu khái niệm nửa liên tục theo nón của ánh xạ có giá trị vectơ, vốn được mở rộng từ khái niệm nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới theo nghĩa cổ điển.

Định nghĩa 3 Cho X, T là các không gian topo, Y là không gian vectơ topo và $K : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị có giá trị là nón lồi, có đỉnh với phần trong khác rỗng. Cho $h : X \times T \rightarrow Y$ là một ánh xạ có giá trị vectơ.

(a) h được gọi là K -nửa liên tục trên (K -usc) tại (\bar{x}, \bar{t}) nếu, với mọi lân cận V của điểm gốc θ_y trong Y , tồn tại một lân cận U của (\bar{x}, \bar{t}) sao cho

$$h(x, t) \in h(\bar{x}, \bar{t}) + V - K(\bar{x}), \quad \forall (x, t) \in U.$$

(b) h được gọi là K -nửa liên tục dưới (K -lsc) tại (\bar{x}, \bar{t}) nếu, $-h$ là K -nửa liên tục trên tại (\bar{x}, \bar{t}) .

(c) h được gọi là K -liên tục tại (\bar{x}, \bar{t}) nếu nó vừa K -usc và K -lsc tại (\bar{x}, \bar{t}) .

Nhận xét 2 Khi $Y = \mathbb{R}, K(x) = \mathbb{R}_+$ với mọi $x \in X$, Định nghĩa 3 trở thành định nghĩa hàm nửa liên tục trên, nửa liên tục dưới, liên tục theo nghĩa cổ điển.

Định nghĩa 4 Cho X, Y, K như trong Định nghĩa 3, $g : X \rightarrow Y$ là một ánh xạ có giá trị vectơ và M là một tập con lồi của X . Ta nói rằng

(a) g là K -tựa lõm trên M nếu với $y \in Y, x_1, x_2 \in M, \theta \in [0, 1], x_\theta = \theta x_1 + (1 - \theta)x_2$,

$$g(x_1) \in y + K(x_1), g(x_2) \in y + K(x_2) \text{ kéo theo } g(x_\theta) \in y + K(x_\theta),$$

(b) g được gọi là K -tựa lõm chặt trên M nếu với $y \in Y, x_1, x_2 \in M, \theta \in (0, 1), x_\theta = \theta x_1 + (1 - \theta)x_2$,

$$g(x_1) \in y + K(x_1), g(x_2) \in y + K(x_2) \text{ kéo theo } g(x_\theta) \in y + \text{int } K(x_\theta).$$

Nhận xét 3 Khi $Y = \mathbb{R}, K(x) = \mathbb{R}_+$ với mọi $x \in X$, chúng ta thu được định nghĩa hàm tựa lõm và tựa lõm chặt theo nghĩa thông thường.

3. CÁC KẾT QUẢ CHÍNH

Trong phần này, chúng ta nghiên cứu tính nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới của ánh xạ nghiệm S .

Bổ đề 2 Giả sử f là K -nửa liên tục trên, K là H-usc và cho trước $\bar{\lambda} \in \Lambda$, các giả thiết sau thỏa mãn:

- (i) $G(\bar{\lambda})$ là một tập compact;
- (ii) $A(\cdot, \bar{\lambda})$ là nửa liên tục dưới;
- (iii) $B(\cdot, \bar{\lambda})$ là nửa liên tục trên với giá trị compact.

Khi đó, tập nghiệm $S(\bar{\lambda})$ là compact.

Chứng minh Với mỗi $\bar{\lambda} \in \Lambda$, trước hết ta chỉ ra rằng $S(\bar{\lambda})$ là tập đóng. Lấy một dãy bất kỳ $\{x_n\} \subset S(\bar{\lambda})$ sao cho $x_n \rightarrow \bar{x} \in X$, ta cần chứng minh $\bar{x} \in S(\bar{\lambda})$. Vì $\{x_n\} \subset S(\bar{\lambda})$ nên $x_n \in G(\bar{\lambda})$ và tồn tại $z_n \in B(x_n, \bar{\lambda})$ sao cho

$$f(x_n, y, z_n, \bar{\lambda}) \in K(x_n, \bar{\lambda}), \quad \forall y \in A(x_n, \bar{\lambda}). \quad (1)$$

Do tính đóng của $G(\bar{\lambda})$ ta có $\bar{x} \in G(\bar{\lambda})$. Vì $B(\cdot, \bar{\lambda})$ là usc với giá trị compact, ta có thể giả thiết z_n hội tụ về $\bar{z} \in B(\bar{x}, \bar{\lambda})$ (lấy dãy con nếu cần). Lấy một điểm bất kỳ $\bar{y} \in A(\bar{x}, \bar{\lambda})$. Do $A(\cdot, \bar{\lambda})$ là lsc, tồn tại một dãy $\{y_n\}$, với $y_n \in A(x_n, \bar{\lambda})$ sao cho $y_n \rightarrow \bar{y}$.

Với mỗi lân cận V của điểm gốc θ_Y , tồn tại một lân cận cân bằng V_1 của θ_Y , tức là, $-V_1 = V_1$, sao cho $V_1 + V_1 \subset V$. Vì K là H-usc tại $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ và f là K -usc tại $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\lambda})$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho, với mọi $n \geq n_0$, ta có

$$K(x_n, \bar{\lambda}) \subset K(\bar{x}, \bar{\lambda}) + V_1, \quad (2)$$

và

$$f(x_n, y_n, z_n, \bar{\lambda}) \in f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\lambda}) + V_1 - K(\bar{x}, \bar{\lambda}). \quad (3)$$

Do tính cân bằng của V_1 , ta thu được

$$f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\lambda}) \in f(x_n, y_n, z_n, \bar{\lambda}) - V_1 + K(\bar{x}, \bar{\lambda}) = f(x_n, y_n, z_n, \bar{\lambda}) + V_1 + K(\bar{x}, \bar{\lambda}). \quad (4)$$

Từ (1) và (4) ta có

$$f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\lambda}) \in K(x_n, \bar{\lambda}) + V_1 + K(\bar{x}, \bar{\lambda}). \quad (5)$$

Kết hợp (2) và (5), ta được

$$f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\lambda}) \in K(\bar{x}, \bar{\lambda}) + V_1 + V_1 + K(\bar{x}, \bar{\lambda}) \subset K(\bar{x}, \bar{\lambda}) + V.$$

Vì V là bất kỳ và $K(\bar{x}, \bar{\lambda})$ là tập đóng nên $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\lambda}) \in K(\bar{x}, \bar{\lambda})$, và do đó $\bar{x} \in S(\bar{\lambda})$. Vì vậy, $S(\bar{\lambda})$ là một tập đóng. Hơn nữa, từ tính compact của $G(\bar{\lambda})$ và $S(\bar{\lambda}) \subset G(\bar{\lambda})$, ta kết luận rằng $S(\bar{\lambda})$ là một tập compact.

Định lý 1 Giả sử rằng

- (i) G là usc với giá trị compact trên Λ ;
- (ii) A là lsc trên $X \times \Lambda$;
- (iii) B là usc với giá trị compact trên $X \times \Lambda$;
- (iv) f là K -usc trên $X \times X \times P \times \Lambda$;
- (v) K là H-usc trên $X \times \Lambda$.

Khi đó, S là nửa liên tục trên với giá trị compact trên Λ .

Chứng minh Lấy bất kỳ $\bar{\lambda} \in \Lambda$, theo Bổ đề 2 thì $S(\bar{\lambda})$ là tập compact. Giả sử ngược lại rằng S không nửa liên tục trên tại $\bar{\lambda}$. Khi đó tồn tại một tập mở U chứa $S(\bar{\lambda})$ và một dãy $\{\lambda_n\}$ hội tụ về $\bar{\lambda}$ sao cho tồn tại $x_n \in S(\lambda_n) \setminus U$, với mọi n . Vì G nửa liên tục trên với giá trị compact và $x_n \in G(\lambda_n)$, theo Bổ đề 1, x_n hội tụ về \bar{x} trong $G(\bar{\lambda})$ (lấy một dãy con nếu cần). Do $x_n \in S(\lambda_n)$, nên tồn tại $z_n \in B(x_n, \lambda_n)$ sao cho

$$f(x_n, y, z_n, \lambda_n) \in K(x_n, \lambda_n), \forall y \in A(x_n, \lambda_n). \quad (6)$$

Do B nửa liên tục trên và $B(\bar{x}, \bar{\lambda})$ compact, không mất tính tổng quát, giả sử z_n hội tụ về $\bar{z} \in B(\bar{x}, \bar{\lambda})$. Lấy $\bar{y} \in A(\bar{x}, \bar{\lambda})$ bất kỳ. Vì A nửa liên tục dưới nên tồn tại $y_n \in A(x_n, \lambda_n)$ sao cho $y_n \rightarrow \bar{y}$.

Với mỗi lân cận V của điểm gốc θ_Y , tồn tại một lân cận cân bằng V_1 của θ_Y , tức là, $-V_1 = V_1$, sao cho $V_1 + V_1 \subset V$. Vì K là H-usc tại $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ và f là K -usc tại $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\lambda})$, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq n_0$, ta có

$$K(x_n, \lambda_n) \subset K(\bar{x}, \bar{\lambda}) + V_1, \quad (7)$$

và

$$f(x_n, y_n, z_n, \lambda_n) \in f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\lambda}) + V_1 - K(\bar{x}, \bar{\lambda}). \quad (8)$$

Sử dụng tính cân bằng của V_1 và (8), ta đi đến

$$f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\lambda}) \in f(x_n, y_n, z_n, \lambda_n) - V_1 + K(\bar{x}, \bar{\lambda}) = f(x_n, y_n, z_n, \lambda_n) + V_1 + K(\bar{x}, \bar{\lambda}).$$

Kết hợp điều này với (6), ta được

$$f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\lambda}) \in K(x_n, \lambda_n) + V_1 + K(\bar{x}, \bar{\lambda}). \quad (9)$$

Từ (7) và (9) ta thu được

$$f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\lambda}) \in K(\bar{x}, \bar{\lambda}) + V_1 + V_1 + K(\bar{x}, \bar{\lambda}) \subset K(\bar{x}, \bar{\lambda}) + V.$$

Kết quả là $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{\lambda}) \in K(\bar{x}, \bar{\lambda})$, hay $\bar{x} \in S(\bar{\lambda})$, là điều không thể do $x_n \notin U$, với mọi n .

Vì vậy, S là usc tại $\bar{\lambda}$. Định lý đã được chứng minh hoàn toàn.

Các phản ví dụ sau đây cho chúng ta thấy tính cốt yếu của tính nửa liên tục dưới của A , nửa liên tục trên của B và tính K -usc của f trong Định lý 1.

Ví dụ 1 Cho $P = \Lambda = X = Y \equiv \mathbb{R}; K(x, \lambda) \equiv \mathbb{R}_+; B(x, \lambda) = [0; 3]; f(x, y, z, \lambda) = e^\lambda(x^2 - xy)$ và

$$A(x, \lambda) = \begin{cases} [0; 1], & \text{khi } \lambda = 0, \\ [1; 3], & \text{khi } \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Khi đó, các giả thiết (i), (iii)-(v) của Định lý 1 đều thỏa mãn. Bằng tính toán trực tiếp, ta được

$$S(\lambda) = \begin{cases} \{0, 1\}, & \text{khi } \lambda = 0 \\ \{3\}, & \text{khi } \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Rõ ràng, S không usc tại $\lambda = 0$. Lý do là A không lsc.

Ví dụ 2 Cho $P = \Lambda = X = Y \equiv \mathbb{R}; A(x, \lambda) = [0, 1]; f(x, y, z, \lambda) = \lambda^2(x - y) \cos z;$
 $K(x, \lambda) \equiv \mathbb{R}_+$ và

$$B(x, \lambda) = \begin{cases} \left[0; \frac{1}{2}\pi\right], & \text{khi } \lambda = 0, \\ \left[\frac{1}{2}\pi; \pi\right], & \text{khi } \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Dễ thấy, các giả thiết (i), (ii), (iv), (v) của Định lý 1 đều thỏa mãn. Tính toán trực tiếp cho ta

$$S(\lambda) = \begin{cases} \{1\}, & \text{khi } \lambda = 0 \\ \{0\}, & \text{khi } \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Tuy nhiên, S không usc tại $\lambda = 0$. Lý do là B không usc.

Ví dụ 3 Cho $P = \Lambda = X = Y \equiv \mathbb{R}; K(x, \lambda) \equiv \mathbb{R}_+; A(x, \lambda) = B(x, \lambda) = \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ và

$$f(x, y, z, \lambda) = \begin{cases} \cos(x - y), & \text{khi } \lambda \neq 0, \\ \cos(x - y) - \frac{\sqrt{3}}{2}, & \text{khi } \lambda = 0. \end{cases}$$

Khi đó, các giả thiết (i)-(iii), (v) của Định lý 1 đều thỏa mãn. Bằng tính toán trực tiếp, ta được

$$S(\lambda) = \begin{cases} \left\{\frac{\pi}{6}\right\}, & \text{khi } \lambda = 0 \\ \left[0; \frac{\pi}{3}\right], & \text{khi } \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Hiển nhiên, S không usc tại $\lambda = 0$. Lý do là f không K -usc.

Định lý 2 Giả sử các điều kiện sau thỏa

- (i) G liên tục, có giá trị lồi, compact trên Λ ;
- (ii) A liên tục, có giá trị compact trên $X \times \Lambda$, và $A(\cdot, \lambda)$ lõm với mọi $\lambda \in \Lambda$;
- (iii) B liên tục, có giá trị compact trên $X \times \Lambda$, và $B(\cdot, \lambda)$ lồi với mọi $\lambda \in \Lambda$;
- (iv) K và $Y \setminus K$ là H-usc trên $X \times \Lambda$;
- (v) f là K -liên tục và K -tựa lõm chặt trên $X \times X \times P \times \Lambda$.

Khi đó, S là H-lsc trên Λ .

Chứng minh Đầu tiên, ta chứng minh S là lsc. Giả sử ngược lại rằng tồn tại $\bar{\lambda} \in \Lambda$ sao cho S không lsc tại $\bar{\lambda}$. Khi đó tồn tại $\bar{x} \in S(\bar{\lambda})$, lân cận W của điểm gốc trong X và dãy $\{\lambda_n\}$ hội tụ về $\bar{\lambda}$ sao cho

$$(\bar{x} + W) \cap S(\lambda_n) = \emptyset, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

Ta xét hai trường hợp sau đây.

Trường hợp 1. $S(\bar{\lambda}) = \{\bar{x}\}$. Lấy một dãy bất kỳ $\{x_n\}$ với $x_n \in S(\lambda_n)$, khi đó $x_n \in G(\lambda_n)$. Vì G là usc, có giá trị compact, không giảm tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng x_n hội tụ về $x_0 \in G(\bar{\lambda})$. Sử dụng lập luận tương tự như trong chứng minh của Định lý 1, ta thu được $x_0 \in S(\bar{\lambda})$, tức là, $x_0 = \bar{x}$. Do đó, khi n đủ lớn, $x_n \in \bar{x} + W$, vốn mâu thuẫn với (10).

Trường hợp 2. Tồn tại $x_1 \in S(\bar{\lambda})$ sao cho $x_1 \neq \bar{x}$. Khi đó, tồn tại $z_1 \in B(x_1, \bar{\lambda})$ và $\bar{z} \in B(\bar{x}, \bar{\lambda})$ sao cho

$$f(x_1, y, z_1, \bar{\lambda}) \in K(x_1, \bar{\lambda}), \quad \forall y \in A(x_1, \bar{\lambda}), \quad (11)$$

và

$$f(\bar{x}, y, \bar{z}, \bar{\lambda}) \in K(\bar{x}, \bar{\lambda}), \quad \forall y \in A(\bar{x}, \bar{\lambda}). \quad (12)$$

Bằng cách đặt $x(t) := tx_1 + (1-t)\bar{x}$, $z(t) := tz_1 + (1-t)\bar{z}$ với $t \in (0, 1)$, ta có $x(t) \in G(\bar{\lambda})$ và $z(t) \in B(x(t), \bar{\lambda})$. Vì $A(\cdot, \bar{\lambda})$ là lõm nên, với mọi $y \in A(x(t), \bar{\lambda})$, tồn tại $y_1 \in A(x_1, \bar{\lambda})$ và $\bar{y} \in A(\bar{x}, \bar{\lambda})$ sao cho $y = ty_1 + (1-t)\bar{y}$. Từ (11), (12) và tính K -tựa lõm chặt của f trên $X \times X \times P \times \Lambda$, ta có

$$f(x(t), y, z(t), \bar{\lambda}) \in \text{int } K(x(t), \bar{\lambda}). \quad (13)$$

Với W cho trước, tồn tại một lân cận W_1 của điểm gốc trong X và $\bar{t} \in (0, 1)$ thỏa $W_1 + W_1 \subset W$ và $x(\bar{t}) \in \bar{x} + W_1$. Vì vậy, $x(\bar{t}) + W_1 \subset \bar{x} + W$. Do tính nửa liên tục dưới của G tại $\bar{\lambda}$, tồn tại $\hat{x}_n \in G(\lambda_n)$ với $\hat{x}_n \rightarrow x(\bar{t})$. Kết quả là, $\hat{x}_n \in x(\bar{t}) + W_1$, khi n đủ lớn. Kết hợp điều này với (10), ta thu được $\hat{x}_n \notin S(\lambda_n)$ với mọi n . Chú ý rằng B là nửa liên tục dưới, khi đó với mỗi $z_n \in B(\hat{x}_n, \lambda_n)$, $z_n \rightarrow z(\bar{t})$, tồn tại $\hat{y}_n \in A(\hat{x}_n, \lambda_n)$ sao cho

$$f(\hat{x}_n, \hat{y}_n, z_n, \lambda_n) \in Y \setminus K(\hat{x}_n, \lambda_n). \quad (14)$$

Với mọi lân cận V của θ_Y , tồn tại một lân cận cân bằng V_1 của θ_Y , tức là, $-V_1 = V_1$, sao cho $V_1 + V_1 \subset V$. Từ giả thiết H-usc của $Y \setminus K$ ta suy ra khi n đủ lớn,

$$Y \setminus K(\hat{x}_n, \lambda_n) \subset Y \setminus K(x(\bar{t}), \bar{\lambda}) + V_1. \quad (15)$$

Vì A là usc, có giá trị compact nên ta có thể giả thiết rằng \hat{y}_n hội tụ về $\hat{y} \in A(x(\bar{t}), \bar{\lambda})$. Do tính K -lsc của f , khi n đủ lớn, ta có

$$f(\hat{x}_n, \hat{y}_n, z_n, \lambda_n) \in f(x(\bar{t}), \hat{y}, z(\bar{t}), \bar{\lambda}) - V_1 + K(x(\bar{t}), \bar{\lambda}). \quad (16)$$

Từ (14), (15) và (16), khi n đủ lớn,

$$f(x(\bar{t}), \hat{y}, z(\bar{t}), \bar{\lambda}) \in Y \setminus K(x(\bar{t}), \bar{\lambda}) + V_1 + V_1 - K(x(\bar{t}), \bar{\lambda}) \subset \text{cl}[Y \setminus K(x(\bar{t}), \bar{\lambda})] + V. \quad (17)$$

Do V là bất kỳ và $\text{cl}[Y \setminus K(x(\bar{t}), \bar{\lambda})]$ là tập đóng, ta thu được $f(x(\bar{t}), \hat{y}, z(\bar{t}), \bar{\lambda}) \in \text{cl}[Y \setminus K(x(\bar{t}), \bar{\lambda})]$, vốn mâu thuẫn với (13). Vì vậy, S là lsc. Hơn nữa, theo Bổ đề 2, S có giá trị compact. Cuối cùng, theo Bổ đề 1(iv), S là H-lsc.

Kết hợp Định lý 1 với Định lý 2, ta thu được điều kiện đủ cho tính liên tục Hausdorff của ánh xạ nghiệm.

Hệ quả 1 Giả sử các điều kiện sau thỏa

- (i) G liên tục, có giá trị lồi, compact trên Λ ;
- (ii) A liên tục, có giá trị compact trên $X \times \Lambda$, và $A(\cdot, \lambda)$ lõm với mọi $\lambda \in \Lambda$;
- (iii) B liên tục, có giá trị compact trên $X \times \Lambda$, và $B(\cdot, \lambda)$ lồi với mọi $\lambda \in \Lambda$;
- (iv) K và $Y \setminus K$ là H-usc trên $X \times \Lambda$;
- (v) f là K -liên tục và K -tựa lõm chặt trên $X \times X \times P \times \Lambda$.

Khi đó S liên tục Hausdorff và có giá trị compact trên Λ .

4. ỨNG DỤNG

Trong phần này, chúng tôi xét mô hình cân bằng Walras. Giả sử thị trường có n hàng hóa. Cho $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_+^n$ là vector giá, $\hat{E}: \mathbb{R}_+^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ là ánh xạ dư cầu (excess demand). Giả sử tập ràng buộc của giá được cho bởi

$$\hat{A} = \prod_{i=1}^n \hat{A}_i, \hat{A}_i = \{z \in \mathbb{R} \mid 0 < \alpha \leq z \leq \beta < +\infty\}, i = 1, \dots, n.$$

Theo [16], bài toán tìm giá cân bằng có thể được biểu diễn như sau

(VI) Tìm $p^* \in A$ sao cho

$$\exists q^* \in \hat{E}(p^*), \langle -q^*, p - p^* \rangle \geq 0, \forall p \in \hat{A}.$$

Theo ý tưởng của [17-19], ánh xạ dư cầu cũng phụ thuộc vào các biến ngoại sinh. Vì vậy, ta có thể giả định rằng $\hat{B}: \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ là ánh xạ dư cầu và bài toán (VI) có thể được nhiều bởi tham số ω như sau

(PVI) Tìm $p^* \in \hat{A}$ sao cho

$$\exists q^* \in \hat{B}(p^*, \omega), \langle -q^*, p - p^* \rangle \geq 0, \forall p \in \hat{A}.$$

Bằng cách đặt $f(p^*, p, q^*, \omega) = \langle -q^*, p - p^* \rangle, K(p, \omega) = \mathbb{R}_+, \forall (p, \omega) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n$ khi đó bài toán (SVEP) trở thành bài toán (PVI).

Với mỗi $\omega \in \mathbb{R}_+^n$, tập nghiệm của bài toán (PVI) được ký hiệu bởi

$$\hat{S}(\omega) = \{p^* \in \hat{A} \mid \exists q^* \in \hat{B}(q^*, \omega), \langle -q^*, p - p^* \rangle \geq 0, \forall p \in \hat{A}\}.$$

Từ Hệ quả 1, chúng ta thu được hệ quả sau đây.

Hệ quả 2 Giả sử các điều kiện sau thỏa mãn

- (i) \hat{B} liên tục, có giá trị compact trên $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n$, và $\hat{B}(\cdot, \omega)$ lồi với mọi $\omega \in \mathbb{R}_+^n$;
- (ii) Hàm $(p^*, p, q^*) \mapsto \langle -q^*, p - p^* \rangle$ là \mathbb{R}_+ -tụ lồi chặt trên $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^n$.

Khi đó \hat{S} liên tục Hausdorff và có giá trị compact trên \mathbb{R}_+^n .

Nhận xét 4 Tính ổn định của mô hình Walras được suy ra từ kết quả chính của bài báo về sự ổn định nghiệm của bài toán tựa cân bằng vectơ tham số. Trong thực tế, dạng cụ thể của các hàm cung, cầu, dư cầu,... phụ thuộc vào rất nhiều yếu tố như: cấu trúc thị trường của nền kinh tế, thị hiếu của người tiêu dùng, phong tục, tập quán, văn hóa của cộng đồng dân cư,... Thậm chí, trong cùng một nền kinh tế, ở các giai đoạn khác nhau, các hàm trên cũng có thể có những dạng cụ thể khác nhau. Chẳng hạn, với nền kinh tế có m người tiêu thụ, n nhà cung cấp, mỗi nhà cung cấp cung ứng một mặt hàng, giả sử với người tiêu thụ thứ i , tập khả năng tiêu thụ là $C_i(p, r) = \{x \in \mathbb{R}_+^n : \langle p, x \rangle \leq r\}$, $p \in \mathbb{R}_+^n, r \in \mathbb{R}_+$, hàm cầu $D_i : \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+ \Rightarrow \mathbb{R}_+^n$, thỏa mãn $D_i(p, r) \subset C_i(p, r), i = \overline{1, m}$. Giả sử rằng hàm cung của nhà cung cấp thứ j có dạng $S_j : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, j = \overline{1, n}$. Trong trường hợp này hàm dư cầu có dạng $\hat{B}(p, r) = \sum_{i=1}^m D_i(p, r) - (S_1(p_1), \dots, S_n(p_n))$. Nói chung, với những điều kiện cụ thể khác nhau, hàm dư cầu cũng sẽ có dạng cụ thể khác nhau.

5. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu tính ổn định nghiệm của bài toán tựa cân bằng vectơ mạnh bằng cách xét tính liên tục, nửa liên tục của ánh xạ nghiệm. Điểm mới trong nghiên cứu này là mô hình bài toán dựa trên nón chứa biến và tham số. Cách tiếp cận của bài báo cũng khác so với các công trình trước đó. Cụ thể, trong kết quả về tính nửa liên tục dưới của ánh xạ nghiệm, chúng tôi không sử dụng giả thiết trên tập nghiệm. Kết quả này không chỉ có ý nghĩa về mặt lý thuyết mà còn có ý nghĩa thực tiễn khi áp dụng cho mô hình cân bằng trong kinh tế - mô hình cân bằng Walras.

Lời cảm ơn: Nghiên cứu này do Trường Đại học Công Thương Thành phố Hồ Chí Minh bảo trợ và cấp kinh phí theo Hợp đồng số 85/HĐ-DCT ngày 15 tháng 8 năm 2023.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Le Dung Muu - Stability property of a class of variational inequalities, *Mathematische Operationsforschung und Statistik. Series Optimization* **15** (3) (1984) 347-351. <https://doi.org/10.1080/02331938408842947>
2. Le Dung Muu and Oettli, W. - Convergence of an adaptive penalty scheme for finding constrained equilibria. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* **18** (12) (1992) 1159-1166. [https://doi.org/10.1016/0362-546X\(92\)90159-C](https://doi.org/10.1016/0362-546X(92)90159-C)
3. Blum, E. and Oettli, W. - From optimization and variational inequalities to equilibrium problems. *Math. Student* **63** (1994) 123-145. <https://mathscinet.ams.org/mathscinet-getitem?mr=1292380>
4. Giannessi, F. - *Vector variational inequalities and vector equilibria: Mathematical Theories*, vol. 38. Springer, Berlin (2000). <https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0299-5>
5. Ansari, Q.H., Köbis, E. and Yao, J.C. - *Vector variational inequalities and vector optimization*. Springer, Berlin (2018). <https://doi.org/10.1007/978-3-319-63049-6>
6. Ansari, Q.H. - Vectorial form of Ekeland-type variational principle with applications to vector equilibrium problems and fixed point theory. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **334** (1) (2007) 561-575. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.12.076>
7. Van, N.T.T., Strodiot, J.J., Nguyen, V. and Vuong, P. - An extragradient-type method for solving nonmonotone quasi-equilibrium problems. *Optimization* **67** (5) (2018) 651-664. DOI: 10.1080/02331934.2017.1416610

8. Farajzadeh, A., Lee, B.S. and Plubteing, S. - On generalized quasi-vector equilibrium problems via scalarization method. *Journal of Optimization Theory and Applications* **168** (2) (2016) 584–599. <https://doi.org/10.1007/s10957-015-0772-2>
9. Kassay, G., Miholca, M. and Vinh, N.T. - Vector quasi-equilibrium problems for the sum of two multivalued mappings. *Journal of Optimization Theory and Applications* **169** (2) (2016) 424–442. <https://doi.org/10.1007/s10957-016-0919-9>
10. Lam Quoc Anh, Tran Quoc Duy and Dinh Vinh Hien - Stability for parametric vector quasiequilibrium problems with variable cones. *Numerical Functional Analysis and Optimization* **40** (4) (2019) 461–483. DOI: 10.1080/01630563.2018.1556688
11. Cotrina, J. and Zúñiga, J. - Quasi-equilibrium problems with non-self constraint map. *Journal of Global Optimization* **75** (1) (2019) 177–197. <https://doi.org/10.1007/s10898-019-00762-5>
12. Lam Quoc Anh and Nguyen Van Hung - Gap functions and Hausdorff continuity of solution mappings to parametric strong vector quasiequilibrium problems. *Journal of Industrial and Management Optimization* **14** (1) (2018) 65–79. doi: 10.3934/jimo.2017037
13. Hai, N.X. and Khanh, P.Q. - Existence of solutions to general quasiequilibrium problems and applications. *Journal of Optimization Theory and Applications* **133** (3) (2007) 317–327. <https://doi.org/10.1007/s10957-007-9170-8>
14. Hai, N.X., Khanh, P.Q. and Quan, N.H. - On the existence of solutions to quasivariational inclusion problems. *Journal of Global Optimization* **45** (4) (2009) 565–581. <https://doi.org/10.1007/s10898-008-9390-y>
15. Göpfert, A., Riahi, H., Tammer, C. and Zalinescu, C. - *Variational Methods in Partially Ordered Spaces*. Springer, Berlin (2003). <https://doi.org/10.1007/b97568>
16. Konnov, I.V. and Volotskaya, E.O. - Mixed variational inequalities and economic equilibrium problems. *Journal of Applied Mathematics* **2** (6) (2002) 289–314. <https://doi.org/10.1155/S1110757X02106012>
17. Aloqeili, M. - On the characterization of excess demand functions. *Economic Theory* **26** (1) (2005) 217–225. <http://www.jstor.org/stable/25055942>
18. Brown, D.J. and Matzkin, R.L. - Testable restrictions on the equilibrium manifold. *Econometrica* **64** (6) (1996) 1249–1262. <https://doi.org/10.2307/2171830>
19. Yannelis, N.C. - Set-valued functions of two variables in economic theory. In: *Equilibrium theory in infinite dimensional spaces*. Springer (1991) 36–72. https://doi.org/10.1007/978-3-662-07071-0_2

ABSTRACT

STABILITY OF SOLUTIONS TO PARAMETRIC VECTOR QUASI-EQUILIBRIUM PROBLEMS WITH VARIABLE ORDERING STRUCTURES

Dinh Vinh Hien*, Tran Dang Hung, Nguyen Dinh Inh,

Nguyen Van Hieu, Vo Thanh Son

Ho Chi Minh City University of Industry and Trade

*Email: hiendv@huit.edu.vn

In this article, we consider the strong vector quasi-equilibrium problems with variable ordering structures. By perturbing the problems with parameters, we study the stability of solutions to reference problems. By imposing appropriate assumptions on the objective mapping and constraints, we establish sufficient conditions for certain properties of the solution mapping, such as compactness, continuity/semicontinuity in the sense of Berge and Hausdorff. These results are applied to establish stability conditions for the Walrasian equilibrium problems.

Keywords: Strong vector quasi-equilibrium problem, stability, variable ordering structure.