

TÍNH TOÁN TẢI TRỌNG TỚI HẠN ĐỐI VỚI THANH VÀ TẤM

Vũ Tiên Đức

Khoa Toán và Khoa học tự nhiên, Trường Đại học Hải Phòng

Email: ducvt@dhhp.edu.vn

Ngày nhận bài: 17/10/2025

Ngày nhận bài sửa: 10/11/2025

Ngày duyệt đăng: 12/11/2025

Tóm tắt: Bài báo tập trung nghiên cứu vấn đề ổn định của thanh và tấm dạng hình chữ nhật có các yếu tố hình học khác nhau dưới tác động của lực nén. Tác giả đã sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn, các bài toán ổn định được mô phỏng và phân tích nhằm đánh giá khả năng chịu lực của kết cấu. Kết quả tính toán cho thấy ảnh hưởng rõ rệt của các thông số hình học đến độ ổn định tổng thể của thanh và tấm. Nghiên cứu này cũng so sánh sự khác biệt giữa kết quả tính toán của phương pháp phần tử hữu hạn với các kết quả tính toán được từ các mô hình toán học. Qua đó, bài báo chỉ ra giới hạn áp dụng của các công thức xác định lực tới hạn truyền thống, đồng thời cung cấp cơ sở để lựa chọn mô hình và tham số phù hợp trong phân tích và thiết kế kết cấu chịu nén.

Từ khóa: Phương pháp phần tử hữu hạn, tải trọng tới hạn, tấm, thanh, ứng suất tới hạn.

CALCULATION OF CRITICAL LOAD FOR BARS AND PLATES

Abstract: The paper focuses on the stability of rectangular bars and plates with different geometric configurations under the impact of compressive force. The author has used the finite element method, the stability problems are simulated and analyzed to evaluate the bearing capacity of the structure. The calculation results elucidate a profound correlation of geometrical parameters on the overall stability of bars and plates. This study also compares the difference between the calculation results of the finite element method and the results calculated from mathematical models. Thereby, the paper points out the application limits of traditional critical force determination formulas, and provides the basis for selecting appropriate models and parameters in the analysis and design of compressive structures.

Key words: Finite element method, ultimate load, plate, bar, ultimate stress.

1. Giới thiệu

Nhiều lĩnh vực kỹ thuật hiện đại đòi hỏi phải nghiên cứu các điều kiện mà vật liệu sẽ đạt đến trạng thái tới hạn trong điều

kiện tải trọng tĩnh [1-3]. Thanh và tấm là những bộ phận quan trọng, được sử dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực như xây dựng dân dụng và công nghiệp, kỹ thuật

hàng không vũ trụ, đóng tàu, cơ khí chế tạo máy, kỹ thuật ô tô, công nghiệp năng lượng.... Việc xác định chính xác tải trọng tới hạn giúp các kỹ sư thiết kế kết cấu nhẹ hơn nhưng vẫn đảm bảo độ ổn định và hiệu quả kinh tế cao trong quá trình vận hành. Thực tế này giải thích vị trí quan trọng mà các vấn đề về độ ổn định của thanh và tấm chiếm giữ trong quá trình phân tích cấu trúc [4].

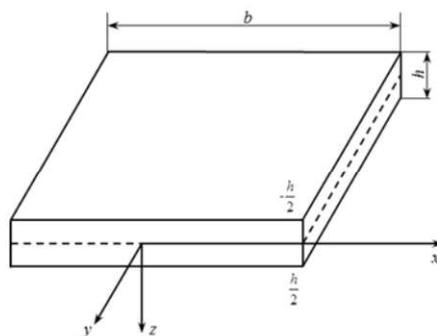
Tấm là một vật thể được giới hạn bởi hai mặt phẳng, khoảng cách giữa chúng rất nhỏ so với các kích thước đặc trưng khác. Khoảng cách này được gọi là độ dày h . Mặt phẳng cách đều các bề mặt của tấm được gọi là mặt phẳng trung tuyến. Người ta thường chọn mặt phẳng trung tuyến này trùng với mặt phẳng tọa độ Oxy (Hình 1).

Công thức Euler thường được sử dụng để tính toán độ ổn định của thanh trong vùng đàn hồi, theo đó lực nén tới hạn phụ thuộc vào chiều dài, chiều rộng và độ dày của thanh. Để tính toán độ ổn

định của tấm, có một công thức trong đó tải trọng tới hạn phụ thuộc vào chiều rộng, chiều dày của tấm và hệ số được xác định bằng đồ thị, tùy thuộc vào tỷ lệ giữa chiều dài và chiều rộng của tấm. Do đó, trong các tác phẩm [5, 6] và nhiều tác phẩm khác, người ta đề xuất sử dụng công thức để tính độ ổn định của tấm khi tỷ lệ giữa chiều dài (a) và chiều rộng (b) của vật thể bằng một số nằm trong

khoảng $0,5 < \frac{a}{b} < 5$. Trong một số

trường hợp, việc sử dụng công thức Euler cho thanh và công thức cho tấm để tính toán độ ổn định của vật liệu khi chịu nén đều có thể được sử dụng mà không có sự phân biệt rõ ràng. Về vấn đề này, khi tính toán tải trọng tới hạn đối với thanh và tấm có các đặc điểm hình học khác nhau tác giả giới hạn được khả năng áp dụng của các công thức một cách cụ thể để tính lực tới hạn với những tỷ lệ giữa chiều dài và chiều rộng khác nhau.



Hình 1. Các thông số hình học của tấm: a - chiều dài; b - chiều rộng; h - độ dày

2. Tổng quan nghiên cứu

Để tính toán độ ổn định trong vùng đàn hồi của thanh và tấm có hình dạng hình học khác nhau, công thức Euler cho thanh và công thức tính độ tải trọng tới hạn của tấm đã được sử dụng. Theo đó,

ứng suất tới hạn gây mất ổn định của thanh khi chịu lực nén tập trung P tại các đầu mút tác động lên thanh dọc theo trục của nó đối với các điều kiện liên kết khác nhau trong vùng đàn hồi được tính bằng công thức [5]:

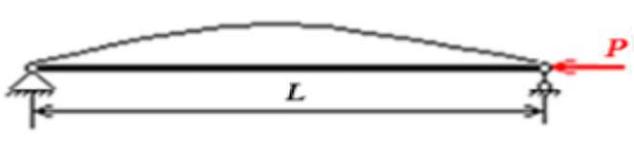
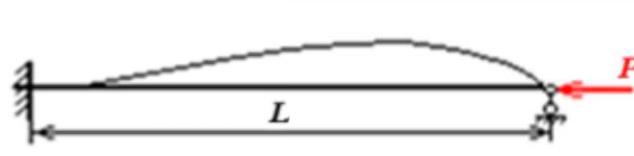
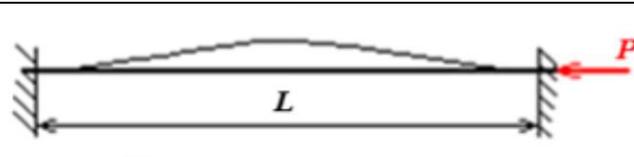
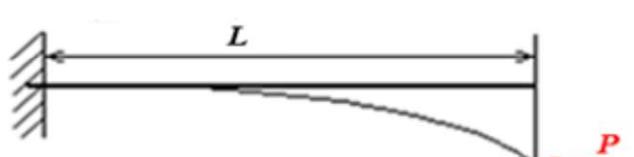
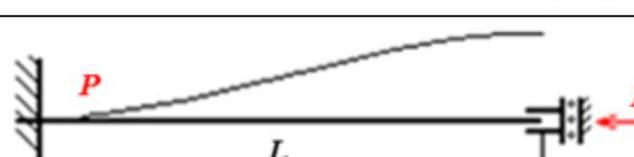
$$\sigma_{th} = c\pi^2 E / \left(\frac{L}{i}\right)^2 \quad (1)$$

$$= \pi^2 E / \left(\mu \frac{L}{i}\right)^2 = \pi^2 E / \lambda^2$$

trong đó c – hệ số ổn định của thanh; $\mu = \frac{1}{\sqrt{c}}$ – hệ số nén (hệ số c và μ phụ thuộc vào loại điều kiện liên kết tại các đầu mút của thanh và được cho trong

bảng 1); $\frac{L}{i}$ – độ mềm của thanh; E – mô đun đàn hồi của vật liệu; $\lambda = \mu L / i$ – độ mềm chuẩn hoá của thanh; $i = \sqrt{\frac{J_{min}}{F}}$ – bán kính quán tính nhỏ nhất trong mặt cắt ngang của thanh (J_{min} và F lần lượt là moment quán tính tối thiểu và diện tích của mặt cắt ngang).

Bảng 1. Giá trị hệ số μ cho thanh chịu tải ở hai đầu

Sơ đồ	Điều kiện liên kết tại hai đầu mút của thanh	μ
	Cả hai đầu của thanh chịu liên kết bản lề	1
	Một đầu của thanh chịu liên kết ngàm, đầu còn lại chịu liên kết bản lề	0,699
	Cả hai đầu của thanh chịu liên kết ngàm	0,5
	Một đầu ngàm cố định, đầu kia tự do	2
	Một đầu ngàm cố định, đầu kia có gối đỡ di động theo cả hai phương dọc và ngang	1

Sơ đồ	Điều kiện liên kết tại hai đầu mút của thanh	μ
	Cả hai đầu không quay được, nhưng có thể dịch chuyển theo phương ngang	1

Trong trường hợp biến dạng dẻo:

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2 E \xi}{\lambda^2} \quad (2)$$

trong đó $\xi = \frac{E_k(\sigma_{th})}{E}$ là hệ số dẻo ($\xi \leq 1$; $\xi = 1$ trong vùng đàn hồi).

Ứng suất tới hạn σ_{th} đối với thanh trong vùng đàn hồi và vượt quá giới hạn đàn hồi được xác định từ đường cong ổn định và phụ thuộc vào tham số $\frac{\lambda}{\pi}$.

Lực tới hạn P_{th} được xác định theo công thức:

$$P_{th} = \sigma_{th} \cdot A \quad (3)$$

trong đó A là diện tích mặt cắt ngang của thanh.

Như vậy, công thức xác định lực tới hạn P_{th} của thanh có dạng sau:

$$P_{th} = \frac{E \pi^2 J_{\min}}{(\mu l)^2} \quad (4)$$

trong đó l là chiều dài của thanh; đối với tiết diện hình chữ nhật được tính bởi

$$J_{\min} = \frac{bh^3}{12} \quad (5)$$

trong đó b và h lần lượt là chiều rộng và độ dày

Xét tấm hình chữ nhật chịu ứng suất nén phân bố đều σ_x theo phương của trục trục Ox . Cạnh dài của tấm được ký hiệu là a , và cạnh ngắn là b . Khi đó, ứng suất tới hạn gây mất ổn định của tấm được tính theo công thức:

$$\sigma_{th} = K_3 \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} E \left(\frac{\delta}{b} \right)^2 \quad (6)$$

trong đó δ - chiều dày của tấm; ν - hệ số Poisson; K_3 - hệ số ổn định, phụ thuộc vào tỷ lệ của các cạnh (chiều dài so với chiều rộng) và vào các điều kiện chịu liên kết của mỗi cạnh của tấm (cạnh tự do, liên kết bản lề, liên kết ngàm). Giá trị hệ số K_3 đối với tấm chịu liên kết bản lề được thể hiện trong hình 2.

Trong thực tế, hệ số ổn định trung bình $K = K_3 \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} = 0,9K_3$ được

tính trung bình trên các vật liệu đã được giới thiệu. Từ đó, công thức gần đúng cho ứng suất tới hạn của một tấm có dạng đơn giản:

$$\sigma_{th} = KE \left(\frac{\delta}{b} \right)^2 \quad (7)$$

Lực tới hạn của tấm được xác định theo công thức :

$$P_{th} = KE \frac{\delta^3}{b} \quad (8)$$

Công thức được tinh chỉnh đối với vật liệu cụ thể được viết như sau:

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2}{0,9.12(1-\nu^2)} KE \left(\frac{\delta}{b} \right)^2 = \frac{\pi^2}{0,9.12(1-\nu^2)} \frac{E}{\left(\frac{b}{\delta\sqrt{K}} \right)^2} \quad (9)$$

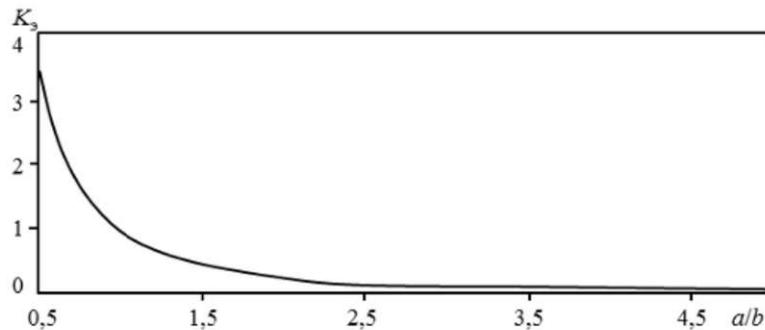
Thừa số $\frac{\pi^2}{0,9.12(1-\nu^2)} \approx 1$. Với

$\nu = 0,293$ thì thừa số này chính xác bằng 1.

Ứng suất tới hạn đối với tấm trong vùng đàn hồi và vượt quá giới hạn đàn hồi được xác định từ đường cong ổn định và phụ thuộc vào tham số $\frac{b}{\delta\sqrt{K}}$.

Đường cong ổn định tương ứng với vật liệu tấm:

$$\sigma_{th} = \frac{\pi^2}{0,9.12(1-\nu^2)} \frac{E\sqrt{\xi}}{\left(\frac{b}{\delta\sqrt{K}} \right)^2} \quad (10)$$



Hình 2. Giá trị hệ số K_3 phụ thuộc vào tỷ lệ a/b

Để tính toán độ ổn định của tấm và thanh, gói phần mềm phần tử hữu hạn ANSYS cũng được sử dụng, cho phép thực hiện nhiều tính toán khác nhau (bài toán ổn định tĩnh, động, điều hòa,...) của trạng thái ứng suất - biến dạng tùy thuộc vào các điều kiện biên - tải trọng tác dụng, mô men, bậc tự do [7-11].

3. Kết quả

Các nghiên cứu trước đây đã chỉ ra rằng sự khác biệt giữa kết quả tính toán độ

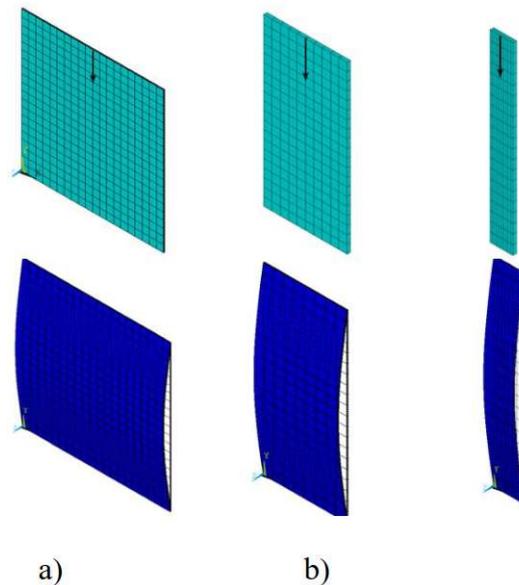
ổn định của tấm chịu nén trong gói phần mềm phần tử hữu hạn và các kết quả tính toán khi sử dụng công thức Euler là dưới 1%. Điều đó cho thấy tính đầy đủ của mô hình toán học và khả năng ứng dụng của nó vào nghiên cứu [12]. Tác giả đã sử dụng gói phần mềm ANSYS (Hình 3) với các thông tin về thông số cũng như cấu hình mô hình như sau:

- Đối với tấm mỏng tác giả đã dùng SHELL181. Vật liệu được gán có mô đun

đàn hồi 79 GPa, hệ số Poisson 0,3 với các thông số hình học khác nhau;

- Các điều kiện biên: một đầu cố định toàn bộ bậc tự do (Fixed Support), đầu kia chịu tải nén dọc trục thông qua Force (áp vào tâm tiết diện). Phương pháp xác định tải trọng tới hạn là phân tích giá trị riêng (Eigenvalue Buckling);

- Lưới phần tử (Meshing): Toàn bộ mô hình được chia lưới tự động, sau đó tinh chỉnh cục bộ tại vùng biên chịu tải. Kích thước phần tử trung bình là 2 mm. Kiểm tra hội tụ lưới (mesh convergence), sai lệch biến dạng cực đại giữa hai mức 10%, do đó được coi là hội tụ.



Hình 3. Dạng mất ổn định của tấm với độ dày 0,2cm, chiều dài 20cm và chiều rộng trong trường hợp a) 20cm; b) 10cm và c) 2,5cm

Kết quả tính toán thu được giá trị lực tới hạn và xác định được sai số tính toán bằng công thức (4) và (8) so với kết quả tính toán trong chương trình ANSYS (Bảng 2).

Các tính toán chỉ ra rằng, với tỷ lệ chiều dài/chiều rộng tấm (thanh) $\frac{a}{b} = 2$, kết quả tính toán lực tới hạn P_{th} bằng công thức (4) và (8) là tương tự nhau. Khi tỷ lệ $\frac{a}{b}$ tăng lên từ 2, sai số tính toán bằng

công thức (4) giảm, trong khi sai số tính toán bằng công thức (9) tăng. Khi tỷ lệ $\frac{a}{b}$ giảm xuống từ 2, ta quan sát được xu hướng ngược lại.

Do đó, nếu tỷ lệ chiều dài/chiều rộng của tấm là $\frac{a}{b} \leq 2$, lực tới hạn P_{th} được tính bằng công thức (9). Nếu $\frac{a}{b} > 2$, lực tới hạn P_{th} được tính bằng công thức (4).

Bảng 2. So sánh các tính toán tải trọng tới hạn của thanh và tấm với các tính toán sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn (FEM)

K_3	$\frac{a}{b}$	Kích thước			Tải trọng tới hạn tính toán			Sai số tính toán	
		Chiều rộng (m)	Chiều dày (m)	Chiều dài (m)	P_{th} (N)			P_{th} (%)	
					Tấm (8)	Thanh (4)	ANSYS	ANSYS với (8)	ANSYS với (4)
0,99	1	0,1	0,002	0,1	5631	5214	5622	0,2	7,3
0,71	1,18	0,085	0,002	0,1	4751	4432	4722	0,6	6,1
0,54	1,33	0,075	0,002	0,1	4095	3911	4124	0,7	5,2
0,4	1,54	0,065	0,002	0,1	3500	3389	3536	1	4,2
0,23	2	0,05	0,002	0,1	2617	2607	2678	2,3	2,7
0,23	2	0,05	0,007	0,1	112182	111775	112930	0,7	1
0,14	2,5	0,04	0,002	0,1	1991	2086	2123	6,2	1,8
0,076	3,33	0,03	0,002	0,1	1441	1564	1580	8,8	1
0,034	4,76	0,021	0,002	0,1	921	1095	1100	16,3	0,46

4. Kết luận

Từ kết quả nghiên cứu cho phép chúng ta rút ra được những kết luận sau:

- Lực uốn tới hạn của các tấm được tính toán bằng công thức (4) và (8), cho kết quả tương tự đối với một số thông số hình học của tấm. Do đó, gói phần mềm phần tử hữu hạn ANSYS đã được sử dụng để tính toán ổn định tấm nhằm xác định giới hạn áp dụng của các công thức (4) và (8). Sai số trong kết quả tính toán sử dụng công thức (4) và (8) được xác định so với kết quả tính toán ANSYS (Bảng 2).

- Từ sai số tính toán, tác giả xuất tính lực tới hạn bằng công thức (8) đối với tỷ lệ chiều dài/chiều rộng của tấm nhỏ hơn hoặc bằng 2, và sử dụng công thức (4) trong trường hợp còn lại.

- Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn để tính toán ổn định của thanh và tấm. Phân tích kết quả tính toán thu được cho phép xác định các yếu tố ảnh hưởng đến ổn định của thanh và tấm. Giới hạn áp dụng của các công thức tính toán lực uốn tới hạn của thanh và tấm cũng được xác định.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Astakhov, M. F., Karavaev, A. V., Makarov, S. Ya., & Suzdaltsev, Ya. Ya. (1954), *Reference book on aircraft strength calculations*, Moscow: State Publishing House of the Defense Industry, 411-412.
2. Ziemian, R. D. (Ed.) (2010), *Guide to stability design criteria for metal structures*, John Wiley & Sons.

3. Bažant, Z. P. (2000), Structural stability, *International Journal of Solids and Structures*, 37(1-2), 55-67.
4. Dimitrienko, Yu. I., Gubareva, E. A., Sborshchikov, S. V., Bazyleva, O. A., Lutsenko, A. N., & Oreshko, E. I. (2015), *Modeling of elastoplastic characteristics of monocrystalline intermetallic alloys based on microstructural numerical analysis*, *Mathematical Modeling and Numerical Methods*, 2, 3-22.
5. Dimitrienko, Yu. I., Lutsenko, A. N., Gubareva, E. A., Oreshko, E. I., Bazyleva, O. A., & Sborshchikov, S. V. (2016), *Calculation of mechanical characteristics of heat-resistant nickel-based intermetallic alloys using multiscale modeling method*, *Aviation Materials and Technologies*, 3 (42), 33-48.
6. Kablov, E. N. (2008), *Aerospace Materials Science*, All Materials - Encyclopedic Handbook, 3, 2-14.
7. Kablov, E. N. (2015), *Innovative developments of FSUE "VIAM" State Research Center of the Russian Federation in the implementation of "Strategic directions for the development of materials and technologies for their processing up to 2030"*, *Aviation Materials and Technologies*, 1 (34), 3-33.
8. Kablov, E. N., Grashchenkov, D. V., Erasov, V. S., Anchevskiy, I. E., Ilyin, V. V., & Valter, R. S. (2012), *Test stand at the climatic station of GCCI for large-sized polymer composite structures*, *Proceedings of the IX International Scientific Conference on Hydroaviation "Hydroaviasalon"*, 122-123.
9. Oreshko, E. I., Erasov, V. S., & Lutsenko, A. N. (2016), *Mathematical modeling of deformation of structural carbon fiber reinforced plastic under bending*, *Aviation Materials and Technologies*, 2 (41), 50-59.
10. Oreshko, E. I., Erasov, V. S., Lutsenko, A. N., Terentyev, V. F., & Slizov, A. K. (2017), *Construction of deformation diagrams in the three-dimensional space σ - ϵ - t* , *Aviation Materials and Technologies*, 3 (41), 41-49.
11. Oreshko, E. I., Erasov, V. S., & Podzhivotov, N. Yu. (2014), *Selection of a scheme for arranging high-modulus layers in a multilayer hybrid plate for its maximum resistance to buckling*, *Aviation Materials and Technologies*, S4, 109-117.
12. Oreshko, E. I., Erasov, V. S., Podzhivotov, N. Yu., & Lutsenko, A. N. (2016), *Strength analysis of a hybrid wing panel based on sheets and profiles of high-strength aluminum-lithium alloy and layered aluminum-glass composite*, *Aviation Materials and Technologies*, 1 (40), 53-61.