

PHƯƠNG PHÁP DƯỚI ĐẠO HÀM TĂNG CƯỜNG GIẢI BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN HAI CẤP

Hồ Phi Tứ

Khoa Toán

Email: tuhp@dhhp.edu.vn

Ngày nhận bài: 12/6/2019

Ngày PB đánh giá: 08/8/2019

Ngày duyệt đăng: 16/8/2019

TÓM TẮT

Trong bài báo này chúng tôi áp dụng phương pháp dưới đạo hàm tăng cường để giải bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp $BVI(C, F, G)$. Đây là một phương pháp mới để giải bài toán này. So với các phương pháp khác thì phương pháp dưới đạo hàm tăng cường có ưu việt là trong thuật toán chỉ cần một phép chiếu trên C , phép chiếu thứ hai được chiếu lên một nửa không gian. Do đó phương pháp này cho kết quả tính toán nhanh hơn. Chúng tôi chứng minh được sự hội tụ mạnh của dãy lặp tới nghiệm của bài toán trên không gian Hilbert thực.

Từ khóa: Bất đẳng thức biến phân, bất đẳng thức biến phân hai cấp, đơn điệu mạnh, dưới đạo hàm tăng cường, liên tục Lipschitz.

ASUB-EXTRAGRADIENT METHOD FOR BILEVEL VARIATIONAL INEQUALITY PROBLEMS

ABSTRACT

In this paper, we introduce a method for solving bilevel variational inequality problems. With this method, we need only one projection on C . Therefore, it gives faster calculation results. This is a new iteration algorithm and we show that these problems can be solved by subgradient extragradient iteration method. We obtain a strong convergence of iteration sequences generated by this method in a real Hilbert space.

Key words. Variational inequality problem, bilevel variational inequalities problem, strongly monotone, sub- extragradient, Lipschitz continuous.

1. GIỚI THIỆU

Cho C là một tập con lồi đóng khác rỗng của không gian Hilbert thực $\mathcal{H}$. Bài toán bất đẳng thức biến phân $VI(C, F)$ có dạng

Tìm $x^* \in C$ sao cho $\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C$,

Trong đó $F: \Omega \rightarrow \mathcal{H}$ là ánh xạ đi từ Ω vào $\mathcal{H}$ gọi là ánh xạ giá, Ω là C hoặc $\mathcal{H}$.

Trong bài báo này chúng tôi quan tâm tới bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp, là bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập nghiệm của bài toán biến phân khác ([1], [5]). Được tóm tắt như sau: Cho C là một tập con lồi đóng khác rỗng của không gian Hilbert thực $\mathcal{H}$

Tìm $x^* \in Sol(C, G)$ sao cho $\langle F(x^*), y - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in Sol(C, G)$, (1.1)

trong đó $F: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ và $Sol(C, G)$ là nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân $VI(C, G)$ với G cũng là ánh xạ từ $\mathcal{H}$ vào $\mathcal{H}$ và bài toán này được ký hiệu vắn tắt là

$BVI(C, F, G)$. Bài toán này cũng nhận được sự quan tâm của nhiều nhà toán học trong nước cũng như trên thế giới và có nhiều thuật toán được đưa ra. Những ban đầu chỉ là các thuật giải trong các trường hợp riêng của bài toán như trường hợp $F = \nabla f; G = \nabla g$ với f, g là các hàm lồi khả vi và khi đó bài toán $BVI(C, F, G)$ chính là bài toán cực tiểu hai cấp. Một trường hợp khác là $F(x) = x$ khi đó $BVI(C, F, G)$ trở thành bài toán tìm chuẩn nhỏ nhất trên tập nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán này được Yao, Y. sử dụng phương pháp đạo hàm tăng cường để giải. Thuật toán được tóm tắt như sau:

$$\begin{cases} x^0 \in C, \\ y^k = P_C(x^k - \lambda G(x^k) - \alpha_k x^k), \\ x^{k+1} = P_C(x^k - \lambda G(x^k) + \mu(y^k - x^k)). \end{cases}$$

Với điều kiện hàm G đơn điệu mạnh ngược, khi đó dãy $\{x^k\}$ hội tụ mạnh về nghiệm $x^* = P_{Sol(C, G)}(0)$. Gần đây tác giả Anh P.N. và các cộng sự ([2]) đề xuất một thuật toán giải bài toán $BVI(C, F, G)$ bằng sự kết hợp giữa phương pháp đạo hàm tăng cường và lý thuyết điểm bất động của ánh xạ không giãn. Thuật toán bao gồm các bước sau:

Bước 1. Tính $y^k = P_C(x^k - \alpha_k G(x^k))$ và $z^k = P_C(x^k - \alpha_k G(y^k))$

Bước 2. Vòng lặp trong: xác định h^k

$$\begin{cases} x^{k,0} = z^k - \lambda F(z^k), \\ y^{k,j} = P_C(x^{k,j} - \delta_j G(x^{k,j})), \\ x^{k,j+1} = \alpha_j x^{k,0} + \beta_j x^{k,j} + \gamma_j P_C(x^{k,j} - \delta_j G(y^{k,j})). \end{cases}$$

Nếu $\|x^{k,j+1} - P_{Sol(C, G)}(x^{k,0})\| \leq \bar{\varepsilon}_k$ thì đặt $h^k = x^{k,j+1}$ và đi đến bước 3. Ngược lại tăng $j := j+1$

Bước 3. Đặt $x^{k+1} = \alpha_k u + \beta_k x^k + \gamma_k h^k$. Tăng k lên 1 và quay lại bước 1.

Trong đó F đơn điệu mạnh, liên tục Lipschitz; G giả đơn điệu và liên tục Lipschitz trên C cùng với các tham số được chọn thích hợp. Khi đó các dãy $\{x^k\}$ và $\{z^k\}$ cùng hội tụ về nghiệm của bài toán $BVI(C, F, G)$. Tuy nhiên tại mỗi bước lặp ta chỉ tìm được nghiệm xấp xỉ của bài toán.

Ta có các định nghĩa ([3], [4])

Ảnh xạ $F : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ được gọi là β -đơn điệu mạnh trên $\mathcal{H}$, nếu tồn tại $\beta > 0$ sao cho $\langle F(x) - F(y), x - y \rangle \geq \beta \|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$.

Ảnh xạ $F : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ được gọi là L -liên tục Lipschitz trên $\mathcal{H}$, nếu tồn tại $L > 0$ sao cho

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

Ảnh xạ $G : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ được gọi là η -đơn điệu mạnh ngược trên $\mathcal{H}$, nếu tồn tại $\eta > 0$ sao cho

$$\langle G(x) - G(y), x - y \rangle \geq \eta \|G(x) - G(y)\|^2 \quad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

Ta giả thiết các ánh xạ $F, G: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ của bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp (1.1) thỏa mãn các điều kiện:

(A_1): F là β -đơn điệu mạnh và L -liên tục Lipschitz trên $\mathcal{H}$.

(A_2): G là η -đơn điệu mạnh ngược trên $\mathcal{H}$.

II. THUẬT TOÁN VÀ KẾT QUẢ HỘI TỤ

Thuật toán 2.1.

Bước 0. Chọn $x^0 \in \mathcal{H}$, $0 < \mu < \frac{2\beta}{L^2}$, các dãy $\{\alpha_k\} \subset (0, 1)$ và $\{\lambda_k\}$ sao cho

$$\begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0, \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_k = \infty, \\ \{\lambda_k\} \subset [a, b] \subset (0; \eta). \end{cases}$$

Bước 1. Tính $y^k = P_C(x^k - \lambda_k G(x^k))$, $z^k = P_{T_k}(x^k - \lambda G(y^k))$,

trong đó $(k = 0, 1, 2, \dots)$, $T_k = \{\omega \in \mathcal{H} : \langle x^k - \lambda G(x^k) - y^k, \omega - y^k \rangle \leq 0\}$.

Bước 2. Tính $x^{k+1} = z^k - \alpha_k \mu F(z^k)$,

Nếu $x^{k+1} = x^k$ thì dừng thuật toán và khi đó x^k là nghiệm của bài toán $BVI(C, F, G)$.

Ngược lại, $k := k + 1$ và quay lại Bước 1.

Nhận xét 2.1. Ở thuật toán 2.1, ta có thể chọn, chẳng hạn, $\alpha_k = \frac{1}{k+3}$. Khi đó dễ dàng thấy rằng $\{\alpha_k\} \subset (0, 1)$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$ và $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty$.

Để chứng minh sự hội tụ của Thuật toán 2.1, ta cần sử dụng một số bổ đề sau:

Bổ đề 2.1. ([7]) Giả sử $G: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ là η -đơn điệu mạnh ngược trên $\mathcal{H}$. Khi đó G là $--$ liên tục Lipschitz và tập nghiệm $Sol(C, G)$ của bài toán bất đẳng thức biến phân $VI(C, G)$ là lồi và đóng.

Bổ đề 2.2 ([9]) Giả sử $F: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ là β -đơn điệu mạnh, L -liên tục Lipschitz trên $\mathcal{H}$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \mu < \frac{2\beta}{L^2}$.

Khi đó

$$\|x - \alpha \mu F(x) - [y - \alpha \mu F(y)]\| \leq (1 - \alpha \tau) \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathcal{H},$$

trong đó

$$\tau = 1 - \sqrt{1 - \mu(2\beta - \mu L^2)} \in (0, 1].$$

Bổ đề 2.3 ([6]) Cho $\{a_n\}$ là dãy số thực không âm. Giả sử rằng với mọi số tự nhiên m , tồn tại số tự nhiên $p \geq m$ sao cho $a_p \leq a_{p+1}$. Gọi n_0 là số tự nhiên sao cho $a_{n_0} \leq a_{n_0+1}$ và xác định $\tau(n)$ với mọi $n \geq n_0$ bởi

$$\tau(n) = \max \{k \in \mathbb{N} : n_0 \leq k \leq n, a_k \leq a_{k+1}\}.$$

Khi đó $\{\tau(n)\}_{n \geq n_0}$ là dãy không giảm thỏa mãn điều kiện $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau(n) = \infty$ và các bất đẳng thức sau thỏa mãn

$$a_{\tau(n)} \leq a_{\tau(n)+1}, a_n \leq a_{\tau(n)+1} \quad \forall n \geq n_0.$$

Bổ đề 2.4 ([8]) Giả sử $\{a_n\}$ là dãy các số thực không âm thỏa mãn điều kiện

$$a_{n+1} \leq (1 - \alpha_n) a_n + \alpha_n \xi_n, \quad \forall n \geq 0,$$

trong đó $\{a_n\}$ là dãy trong $(0,1)$ và $\{\xi_n\}$ là dãy số thực sao cho

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty;$$

$$(ii) \limsup_{n \rightarrow \infty} \xi_n \leq 0.$$

Khi đó $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Kết quả hội tụ

Định lý 2.1. Giả sử các điều kiện $(A_1), (A_2)$ được thỏa mãn và $Sol(C, G) \neq \emptyset$. Khi đó dãy $\{x_k\}$ trong thuật toán 2.1 hội tụ mạnh đến nghiệm duy nhất của bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp (1.1).

Ta chứng minh định lý trên theo các bước sau:

Bước 1. Chứng minh: Với mọi $x^* \in Sol(C, G)$, ta có

$$\|z^k - z^*\| \leq \|x^k - x^*\| - \frac{(\eta - \lambda_k) \|x^k - y^k\|}{\eta} - \frac{(\eta - \lambda_k) \|y^k - z^k\|}{\eta}. \quad (2.5)$$

Thật vậy. Từ định nghĩa y^k và tính chất của phép chiếu

$$\langle x^k - \lambda_k G(x^k) - y^k, z - y^k \rangle \leq 0. \quad \forall z \in C. \quad (2.6)$$

Sử dụng (2.6) và cách xác định T_k , ta thu được $C \subset T_k$.

Vì G là η -đơn điệu mạnh ngược trên $\mathcal{H}$ và $x^* \in Sol(C, G)$ nên

$$\begin{aligned} \langle G(y^k), y^k - x^* \rangle &\geq \langle G(x^*), y^k - x^* \rangle + \eta \|G(y^k) - G(x^*)\|^2 \\ &\geq \langle G(x^*), y^k - x^* \rangle \\ &\geq 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Theo tính chất của phép chiếu và (2.7), ta được

$$\begin{aligned} \|z^k - x^*\|^2 &= \|P_{T_k}(x^k - \lambda_k G(y^k)) - x^*\|^2 \\ &\leq \|x^k - \lambda_k G(y^k) - x^*\|^2 - \|x^k - \lambda_k G(y^k) - z^k\|^2 \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz và chú ý rằng G là $\frac{1}{\eta}$ -liên tục Lipschitz trên $\mathcal{H}$, ta có

$$\begin{aligned} 2 \langle G(x^k) - G(y^k), z^k - y^k \rangle &\leq 2 \|G(x^k) - G(y^k)\| \|z^k - y^k\| \\ &\leq \frac{2}{\eta} \|x^k - y^k\| \|z^k - y^k\| \\ &\leq \frac{1}{\eta} (\|x^k - y^k\|^2 + \|y^k - z^k\|^2). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Từ định nghĩa của T_k và $z^k \in T_k$, ta có

$$\langle x^k - \lambda_k G(x^k) - y^k, z^k - y^k \rangle \leq 0.$$

Kết hợp bất đẳng thức trên với (2.8) và (2.9), ta được

$$\|z^k - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 - \|x^k - z^k\|^2 + 2\lambda_k \langle y^k - z^k, G(y^k) \rangle$$

Bước 2. Chứng minh: Các dãy $\{x^k\}$, $\{F(x^k)\}$, và $\{z^k\}$ là bị chặn. Vì

$$\begin{aligned} &= \|x^k - x^*\|^2 + 2\lambda_k \langle y^k - z^k, G(y^k) \rangle - \|(x^k - y^k) + (y^k - z^k)\|^2 \\ &= \|x^k - x^*\|^2 + 2\lambda_k \langle y^k - z^k, G(y^k) \rangle - \|x^k - y^k\|^2 - \|y^k - z^k\|^2 \\ &\quad - 2\langle y^k - z^k, x^k - y^k \rangle \\ &= \|x^k - x^*\|^2 - \|x^k - y^k\|^2 - \|y^k - z^k\|^2 \\ &\quad + 2\langle y^k - z^k, \lambda_k G(y^k) - x^k + y^k \rangle \\ &= \|x^k - x^*\|^2 - \|x^k - y^k\|^2 - \|y^k - z^k\|^2 \\ &\quad + 2\langle x^k - \lambda_k G(y^k) - y^k, z^k - y^k \rangle + 2\lambda_k \langle G(x^k) - G(y^k), x^k - y^k \rangle \\ &\leq \|x^k - x^*\|^2 - \|x^k - y^k\|^2 - \|y^k - z^k\|^2 \\ &\quad + \frac{\lambda_k}{\eta} (\|x^k - y^k\|^2 + \|y^k - z^k\|^2) \\ &= \|x^k - x^*\|^2 - \frac{(\eta - \lambda_k) \|x^k - y^k\|^2}{\eta} - \frac{(\eta - \lambda_k) \|y^k - z^k\|^2}{\eta}. \square \end{aligned}$$

$\{\lambda^k\} \subset [a, b] \subset (0; \eta)$ nên từ (2.5), ta có

$$\|z^k - x^*\| \leq \|x^k - x^*\| \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (2.10)$$

Thật vậy. Từ (2.10) và Bổ đề 2.2

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\| &= \|z^k - \alpha_k \mu F(z^k) - x^*\| \\ &= \|z^k - \alpha_k \mu F(z^k) - [x^* - \alpha_k \mu F(z^k)] - \alpha_k \mu F(x^*)\| \\ &\leq \|z^k - \alpha_k \mu F(z^k) - [x^* - \alpha_k \mu F(z^k)]\| + \alpha_k \mu \|F(x^*)\| \\ &\leq (1 - \alpha_k \tau) \|z^k - x^*\| + \alpha_k \mu \|F(x^*)\| \\ &\leq (1 - \alpha_k \tau) \|x^k - x^*\| + \alpha_k \mu \|F(x^*)\| \end{aligned}$$

$$= (1 - \alpha_k \tau) \|x^k - x^*\| + \alpha_k \tau \frac{\mu \|F(x^*)\|}{\tau} \quad (2.11)$$

trong đó

$$\tau = 1 - \sqrt{1 - \mu(2\beta - \mu L^2)} \in (0, 1].$$

Từ (2.11), ta nhận được

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \max \left\{ \|x^k - x^*\|, \frac{\mu \|F(x^*)\|}{\tau} \right\}.$$

Bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$\|x^k - x^*\| \leq \max \left\{ \|x^0 - x^*\|, \frac{\mu \|F(x^*)\|}{\tau} \right\} \quad \forall k \geq 0.$$

Do đó dãy $\{x^k\}$ là bị chặn và do đó các dãy $\{F(x^k)\}$, $\{y^k\}$ và $\{z^k\}$ cũng bị chặn.

Bước 3. Ta chứng minh dãy x^k hội tụ mạnh đến x^* , trong đó x^* là nghiệm duy nhất của (2.1).

Thật vậy. Sử dụng Bổ đề 2.2, (2.10) và bất đẳng thức

$$\|x - y\|^2 \leq \|x\|^2 - 2\langle y, x - y \rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$$

Ta được

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\|^2 &= \|z^k - \alpha_k \mu F(z^k) - x^*\|^2 \\ &= \|z^k - \alpha_k \mu F(z^k) - [x^* - \alpha_k \mu F(x^*)] - \alpha_k \mu F(x^*)\|^2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ta xét hai trường hợp.

Trường hợp 1: Tổng tại k_0 sao cho dãy $\{\|x^k - x^*\|\}$ là giảm với $k \geq k_0$. Khi đó dãy số $\{\|x^k - x^*\|\}$ hội tụ. Do đó từ (2.10) và (2.12), ta được

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x^k - x^*\|^2 - \|z^k - x^*\|^2 \\ &\leq -\alpha_k \tau \|z^k - x^*\|^2 - 2\alpha_k \mu \langle F(x^*), x^{k+1} - x^* \rangle \\ &\quad + (\|x^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - x^*\|^2). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Vì dãy $\{\|x^k - x^*\|\}$ hội tụ, $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$, $\{x^k\}$ và $\{z^k\}$ là bị chặn, từ (2.12) ta có

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(\|x^k - x^*\|^2 - \|z^k - x^*\|^2) \tau}{\eta} \leq \frac{(\|x^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - x^*\|^2) \tau}{\eta} \quad (2.14)$$

Từ (2.5) và $\{\lambda_k\} \subset [a, b] \subset (0, \eta)$, ta có

$$\leq \|x^k - x^*\|^2 - \|z^k - x^*\|^2 \quad (2.15)$$

Do đó từ (2.14) và (2.15), ta thu được

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - y^k\| = 0.$$

Ta chứng minh

(2.16)

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \langle F(x^*), x^* - x^{k+1} \rangle \leq 0.$$

Chọn dãy con $\{x^{k_i}\}$ của dãy $\{x^k\}$ sao cho

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \langle F(x^*), x^* - x^{k+1} \rangle \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \langle F(x^*), x^* - x^{k_i} \rangle.$$

Vì dãy $\{x^{k_i}\}$ là bị chặn nên ta có thể giả thiết rằng x^{k_i} hội tụ yếu đến $\bar{x} \in \mathcal{H}$.

Do đó

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} \langle F(x^*), x^* - x^{k+1} \rangle &= \lim_{i \rightarrow \infty} \langle F(x^*), x^* - x^{k_i} \rangle \\ &= \langle F(x^*), x^* - \bar{x} \rangle. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Vì $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - y^k\| = 0$ và $x^{k_i} \rightharpoonup \bar{x}$ nên ta suy ra dãy y^{k_i} hội tụ yếu đến $\bar{x}$. Vì tập C là lồi đóng nên nó đóng yếu, và do đó $\bar{x} \in C$.

Tiếp theo ta chứng minh $\bar{x} \in \text{Sol}(C, G)$.

Thật vậy, lấy $x \in C$ Từ (2.6) ta có

$$\langle x^{k_i} - \lambda_{k_i} G(x^{k_i}) - y^{k_i}, x - y^{k_i} \rangle \leq 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Vì G là η - đơn điệu mạnh ngược trên $\mathcal{H}$ và bất đẳng thức Cauchy-Shwarz, ta đư

$$\begin{aligned} \langle G(x), x^{k_i} - x \rangle &\leq \langle G(x), x^{k_i} - x \rangle + \eta \|G(x^{k_i}) - G(x)\|^2 \\ &\leq \langle G(x^{k_i}), x^{k_i} - x \rangle \\ &= \langle G(x^{k_i}), x^{k_i} - y^{k_i} \rangle + \frac{1}{\lambda_{k_i}} \langle \lambda_{k_i} G(x^{k_i}), y^{k_i} - x \rangle \\ &= \langle G(x^{k_i}), x^{k_i} - y^{k_i} \rangle + \frac{1}{\lambda_{k_i}} \langle x^{k_i} - y^{k_i}, y^{k_i} - x \rangle \\ &\quad + \frac{1}{\lambda_{k_i}} \langle x^{k_i} - \lambda_{k_i} G(x^{k_i}) - y^{k_i}, x - y^{k_i} \rangle \\ &\leq \langle G(x^{k_i}), x^{k_i} - y^{k_i} \rangle + \frac{1}{\lambda_{k_i}} \langle \lambda_{k_i} G(x^{k_i}), y^{k_i} - x \rangle \\ &\leq \|G(x^{k_i})\| \|x^{k_i} - y^{k_i}\| + \frac{1}{\lambda_{k_i}} \|x^{k_i} - y^{k_i}\| \|y^{k_i} - x\| \\ &\leq \|G(x^{k_i})\| \|x^{k_i} - y^{k_i}\| + \frac{1}{\alpha} \|x^{k_i} - y^{k_i}\| \|y^{k_i} - x\|. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Lấy giới hạn ở (2.18) khi $i \rightarrow \infty$, sử dụng tính bị chặn ở các dãy $\{G(x^{k_i})\}$, $\{y^{k_i}\}$

và chú ý rằng $\lim_{i \rightarrow \infty} \|x^{k_i} - y^{k_i}\| \rightarrow 0$, $x^{k_i} \rightharpoonup \bar{x}$, ta được $\langle G(x), \bar{x} - x \rangle \leq 0$ và do đó

$$\langle G(x), x - \bar{x} \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C. \quad (2.19)$$

Đặt $x_t := (1-t)\bar{x} + tx \in C, t \in [0,1]$. Từ (2.19), ta có

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle G(x_t), x - \bar{x} \rangle \\ \text{Do đó với mọi } 0 \leq t \leq 1 & \\ 0 &\leq \langle G(x_t) - G(\bar{x}), x_t - \bar{x} \rangle + \langle G(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle \\ &\leq \frac{1}{\eta} \|G(x_t) - G(\bar{x})\| \|x_t - \bar{x}\| + \langle G(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle \\ &= \frac{1}{\eta} \left\| \left(\frac{1-t}{1-t} \right) \frac{x - \bar{x}}{t} \right\| \|x - \bar{x}\| + \langle G(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle \\ &= \frac{t}{\eta} \|x - \bar{x}\|^2 + \langle G(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle. \end{aligned}$$

Cho $t \rightarrow 0^+$, ta được $\langle G(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle \geq 0$ hay $\bar{x} \in \text{Sol}(C, G)$.

Vì x^* là nghiệm của bài toán (2.1) và $\bar{x} \in \text{Sol}(C, G)$, ta có

$$\langle F(x^*), \bar{x} - x^* \rangle \geq 0$$

Kết hợp với (2.17), ta thu được $\limsup_{k \rightarrow \infty} \langle F(x^*), x^* - x^{k+1} \rangle \leq 0$.

Bất đẳng thức (2.12) có thể được viết lại như sau

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq (1 - \alpha_k \tau) \|x^k - x^*\|^2 + \alpha_k \tau \xi_k,$$

$$\text{trong đó } \xi_k = \frac{2\mu \langle F(x^*), x^* - x^{k+1} \rangle}{\tau}.$$

Từ (2.16), ta có $\limsup_{k \rightarrow \infty} \xi_k \leq 0$. Theo bổ đề 2.4, ta được $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - x^*\|^2 = 0$, hay $x^k \rightarrow x^*$ khi $k \rightarrow \infty$.

Trường hợp 2: Tồn tại dãy con $\{x^{k_j}\}$ của dãy $\{x^k\}$ sao cho

$$\|x^{k_j} - x^*\| \leq \|x^{k_j+1} - x^*\| \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Theo Bổ đề 2.3, tồn tại dãy không giảm $\{\tau(k)\} \subset \mathbb{N}$ sao cho $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau(k) = \infty$ và các bất đẳng thức sau đúng với mọi $k \in \mathbb{N}$ (đủ lớn).

$$\|x^{\tau(k)} - x^*\| \leq \|x^{\tau(k)+1} - x^*\|, \quad \|x^k - x^*\| \leq \|x^{\tau(k)+1} - x^*\|. \quad (2.20)$$

Do đó từ (2.11) và (2.20) ta được

$$\begin{aligned}\|x^{\tau(k)} - x^*\| &\leq \|x^{\tau(k)+1} - x^*\| \\ &\leq (1 - \alpha_{\tau(k)}\tau)\|z^{\tau(k)} - x^*\| + \alpha_{\tau(k)}\mu\|F(x^*)\|.\end{aligned}\quad (2.21)$$

Từ (2.10) và (2.21), ta có

$$0 \leq \|x^{\tau(k)} - x^*\| - \|z^{\tau(k)} - x^*\| \leq -\alpha_{\tau(k)}\tau\|z^{\tau(k)} - x^*\| + \alpha_{\tau(k)}\mu\|F(x^*)\|. \quad (2.22)$$

Từ $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$, tính bị chặn của $\{z^k\}$ và (2.22), ta thu được

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\|x^{\tau(k)} - x^*\| - \|z^{\tau(k)} - x^*\|) = 0. \quad (2.23)$$

Vì $\{x^k\}, \{z^k\}$ bị chặn và (2.23), ta có

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\|x^{\tau(k)} - x^*\|^2 - \|z^{\tau(k)} - x^*\|^2) = 0 \quad (2.24)$$

Từ $\frac{(\eta - \lambda_k)}{\eta} \geq \frac{(\eta - b)}{\eta} > 0$, (2.5) và (2.24), ta suy ra

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{\tau(k)} - y^{\tau(k)}\| = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|y^{\tau(k)} - z^{\tau(k)}\| = 0. \quad (2.25)$$

Theo bất đẳng thức tam giác

$$\|x^{\tau(k)} - z^{\tau(k)}\| \leq \|x^{\tau(k)} - y^{\tau(k)}\| + \|y^{\tau(k)} - z^{\tau(k)}\|.$$

Kết hợp với (2.25), ta được

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{\tau(k)} - z^{\tau(k)}\| = 0.$$

Theo Bổ đề 2.2

$$\begin{aligned}\|x^{\tau(k)+1} - x^{\tau(k)}\| &= \|z^{\tau(k)} - \alpha_{\tau(k)}\mu F(z^{\tau(k)}) - x^{\tau(k)}\| \\ &\leq \|z^{\tau(k)} - x^{\tau(k)}\| + \alpha_{\tau(k)}\mu\|F(x^{\tau(k)})\|.\end{aligned}$$

Kết hợp với (2.26), $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$ và tính chặn của dãy $\{F(x^{\tau(k)})\}$, ta được

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{\tau(k)+1} - x^{\tau(k)}\| = 0.$$

Bằng chứng minh tương tự như Trường hợp 1, ta thu được

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \langle F(x^*), x^* - x^{\tau(k)+1} \rangle = \limsup_{x \rightarrow \infty} \langle F(x^*), x^* - x^{\tau(k)} \rangle \leq 0. \quad (2.27)$$

Từ (2.12) và (2.20), ta được

$$\begin{aligned}\|x^{\tau(k)+1} - x^{\tau(k)}\|^2 &\leq (1 - \alpha_{\tau(k)}\tau) \|x^{\tau(k)} - x^*\|^2 + \alpha_{\tau(k)}\mu \langle F(x^*), x^* - x^{\tau(k)+1} \rangle \\ &\leq (1 - \alpha_{\tau(k)}\tau) \|x^{\tau(k)+1} - x^*\|^2 + \alpha_{\tau(k)}\mu \langle F(x^*), x^* - x^{\tau(k)+1} \rangle.\end{aligned}\quad (2.28)$$

Do đó, từ (2.20), ta được

$$\|x^k - x^*\|^2 \leq \|x^{\tau(k)+1} - x^*\|^2 \leq \frac{2\mu}{\tau} \langle F(x^*), x^* - x^{\tau(k)+1} \rangle. \quad (2.28)$$

Lấy giới hạn khi $k \rightarrow \infty$ ở (2.28) và sử dụng (2.27), ta được

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|x^k - x^*\|^2 \leq 0.$$

Do đó $x^k \rightarrow x^*$ khi $k \rightarrow \infty$. Định lý hoàn toàn được chứng minh. $\square$

III. KẾT LUẬN

Bài báo đã đưa ra được một thuật giải mới cho bài toán bất đẳng thức biến phân hai cấp và chứng minh được sự hội tụ mạnh của thuật toán về nghiệm của bài toán trên một không gian Hilbert thực. Với phương pháp dưới đạo hàm tăng cường, trong thuật toán chỉ cần một phép chiếu trên tập ràng buộc C , do đó việc tính toán được giảm nhẹ đi rất nhiều.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Anh, P.N., Kim, J. K., Muu, L. D.(2012): *An extragradient algorithm for solving bilevel variational inequalities*. J. Glob. Optim. 52, 527 – 539 .
2. Anh, P.N., Kim, J. K., Muu, L. D.(2012): *An extragradient algorithm for solving bilevel pseudomonotone variational inequalities*. J. Glob. Optim. 52, 627 – 639.
3. Combettes, P.L., Hirstoaga, S.A.(2005): *Equilibrium Programing in Hilbert Space*. J. Nonlinear Convex Anal. 5, 117 – 136.
4. Konnov, I.V.(2000): *Combined Relaxation Methods for Variational Inequalities*. Springer, Berlin.
5. Kalashnikov, V.V., Klashnikova, N.I.(1996): *Solving two-level variational inequality*. J. Glob . Optim. 8, 289 – 294.
6. Maingé, P.E.(2008): *A hybrid extragradient-viscosity method for monotone operators and fixed point problem*. SIAM J. Control Optim. 47 1499 – 1515.
7. Muu, L. D.(1998): *Nhập môn các phương pháp tối ưu*, NXB Khoa học Kỹ Thuật, Hà Nội.
8. Xu, H. K.(2002): *Iterative algorithms for nonlinear operators*. J. London Math. Soc. 66, 240 – 256.
9. Yamada, I.(2011): *The hybrid steepest method for the variational inequality problem over the intersection of fixed point sets on nonexpansive mappings*, in *Inherently Parallel Algorithms for Feasibility and Optimization and Their Applications*, Butnariu. D, Censo. Y, Reich. S (Eds.), Elsevier, New York, pp. 472 – 504.