

SỰ HỘI TỤ CỦA DÃY LŨY THỪA MA TRẬN VUÔNG CẤP 2

Vũ Tiến Đức

Khoa Toán

Email: ducvt@dhhp.edu.vn

Ngày nhận bài: 13/8/2019

Ngày PB đánh giá: 22/8/2019

Ngày duyệt đăng: 29/8/2019

TÓM TẮT

Với số thực x thì dãy $\{x^n\}$ hội tụ nếu và chỉ nếu $|x| < 1$ hoặc $x = 1$. Ta có kết quả tương tự khi x là số phức, và $|x|$ là môđun của x . Ta sẽ chỉ ra kết quả tương tự cho dãy các ma trận $\{A^n\}$, ở đây A là ma trận cấp 2 trên trường số thực $\mathbb{R}$. Với $A \neq I_2$, ở đây I_2 là ma trận đơn vị cấp 2, dãy $\{A^n\}$ hội tụ tới ma trận không O nếu và chỉ nếu $|\det A| < 1$ và $|1 + \det A| > |\text{trace}(A)|$. Kết quả này được ứng dụng để chứng minh định lý nổi tiếng trong quy tắc Markov đối với ma trận ngẫu nhiên chính quy cấp 2 và thu được công thức chi tiết đối với ma trận dừng và giá trị riêng.

Từ khóa: hội tụ, quy tắc Markov, ma trận ngẫu nhiên chính quy.

CONVERGENCE OF THE POWER SEQUENCE OF A 2×2 MATRIX

ABSTRACT

The sequence $\{x^n\}$, x real, is convergent if, and only if, $|x| < 1$ or $x = 1$. The same statement is true when x is a complex number, and $|x|$ is the modulus of x . We show an analogous result for the convergence of the sequence $\{A^n\}$, where A is a 2×2 matrix over $\mathbb{R}$. For $A \neq I_2$, where I_2 is the identity matrix, the sequence $\{A^n\}$ converges to the zero matrix O if, and only if, $|\det A| < 1$ and $|1 + \det A| > |\text{tr}(A)|$. This result is then applied to prove a well-known theorem in Markov chains for 2×2 regular stochastic matrices and to obtain an explicit formula for the stationary matrix and eigenvector.

Keywords: convergence, Markov chains, regular stochastic matrix.

1. MA TRẬN LŨY THỪA

Gọi α, β là các giá trị riêng của ma trận phức cấp 2:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Đa thức đặc trưng của ma trận A là:

$$P_A(x) = \det(A - xI_2) = (x - \alpha)(x - \beta) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta.$$

Theo định lý Cayley-Hamilton thì $P_A(A) = O$, tức là:

$$A^2 - (\alpha + \beta)A + \alpha\beta I^2 = O. \quad (1)$$

Các ma trận X, Y, Z được xác định bởi:

$$\text{Ta có} \quad \begin{cases} X = \frac{A - \beta I_2}{\alpha - \beta}; Y = \frac{A - \alpha I_2}{\beta - \alpha} & \text{khi } \alpha \neq \beta \\ \begin{cases} Z = A - \alpha I_2 \\ X^2 = X; XY = YX = O; Y^2 = Y \end{cases} & \text{khi } \alpha = \beta \\ Z^2 = O & \text{khi } \alpha = \beta \end{cases}$$

Từ đây suy ra, với số nguyên k thì

$$\begin{cases} X^k \neq O; Y^k = Y & \text{khi } \alpha \neq \beta \\ Z^k = O & \text{khi } \alpha = \beta \end{cases}$$

Do đó với số nguyên dương n , ta có

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{cases} (\alpha X + \beta Y)^n = \alpha^n X^n + \beta^n Y^n = \alpha^n X + \beta^n Y & \text{khi } \alpha \neq \beta \\ (\alpha I_2 + Z)^n = \alpha^n I_2 + n\alpha^{n-1}Z & \text{khi } \alpha = \beta \end{cases}, \\ \text{hay} \quad A^n &= \begin{cases} \frac{1}{\alpha - \beta}((\alpha^n - \beta^n)A - \alpha\beta(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})I_2) & \text{khi } \alpha \neq \beta, \\ n\alpha^{n-1}A - (n-1)\alpha^n I_2 & \text{khi } \alpha = \beta \end{cases}, \end{aligned} \quad (2)$$

2. SỰ HỘI TỤ CỦA Dãy $\{A^n\}$

Mệnh đề 1. Cho A là ma trận vuông cấp 2 trên trường số phức $\mathbb{C}$ và α, β là các giá trị riêng của A . Khi đó $\{A^n\}$ hội tụ về ma trận O nếu và chỉ nếu $|\alpha| < 1, |\beta| < 1$.

Chứng minh. Trường hợp 1. Nếu $\alpha \neq \beta$. Khi đó nếu $|\alpha| < 1, |\beta| < 1$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta^n = 0$, suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha^n - \beta^n) = 0$, do đó từ công thức (2), ta có:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = O. \quad (3)$$

Ngược lại, giả sử rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = O$. Vì A có hai giá trị riêng phân biệt nên chéo hóa được, tức tồn tại ma trận phức P cấp 2 khả nghịch sao cho $A = PJP^{-1}$, ở đây

$$J = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \Rightarrow J^n = \begin{bmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{bmatrix}.$$

Suy ra $A^n = PJ^n P^{-1}$. Vì $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = O$ nên $\lim_{n \rightarrow \infty} J^n = O$, do đó

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta^n = 0 \Leftrightarrow |\alpha| < 1, |\beta| < 1.$$

Trường hợp 2. Nếu $\alpha = \beta$ và $|\alpha| < 1$, khi đó dãy $\{A^n\}$ hội tụ về ma trận O vì cả hai dãy $\{n\alpha^{n-1}\}$ và $\{(n-1)\alpha^n\}$ đều hội tụ về 0 bởi quy tắc L'Hospital.

Ngược lại nếu dãy $\{A^n\}$ hội tụ về ma trận O . Ta có:

$$A^n = \begin{bmatrix} \alpha^{n-1}(n(a-\alpha) + \alpha) & n\alpha^{n-1}b \\ n\alpha^{n-1}c & \alpha^{n-1}(n(d-\alpha) + \alpha) \end{bmatrix}.$$

Vì $\{A^n\}$ hội tụ về O nên $\lim_{n \rightarrow \infty} n\alpha^{n-1} = 0$, do đó phải có $|\alpha| < 1$. $\square$

Nhận xét. Mệnh đề trên cũng đúng trong trường hợp tổng quát với ma trận phức A cấp n bất kì. Sử dụng dạng chuẩn tắc Jordan ta có thể chỉ ra rằng dãy $\{A^n\}$ hội tụ về ma trận O nếu và chỉ nếu $\max\{|\lambda| : \lambda \text{ là giá trị riêng của ma trận } A\} < 1$. Chứng minh cụ thể có thể xem ở [1].

Sau đây ta sẽ nghiên cứu điều kiện cần và đủ để một ma trận thực cấp 2 hội tụ về ma trận O . Kí hiệu $\det A, \text{tr}(A)$ theo thứ tự là định thức và vết của A .

Bổ đề 1. Cho α và β là các số thực hoặc các số phức liên hợp. Khi đó $|\alpha| < 1$ và $|\beta| < 1$ nếu và chỉ nếu $|\alpha\beta| < 1$ và $|1 + \alpha\beta| > |\alpha + \beta|$.

Chứng minh. Giả sử α, β là các số thực. Nếu $|\alpha| < 1$ và $|\beta| < 1$ thì $|\alpha\beta| < 1$ và

$$\begin{aligned} \begin{cases} 1 - \alpha^2 > 0 \\ 1 - \beta^2 > 0 \end{cases} &\Rightarrow (1 - \alpha^2)(1 - \beta^2) > 0 \Leftrightarrow 1 + \alpha^2\beta^2 > \alpha^2 + \beta^2 \\ &\Leftrightarrow 1 + 2\alpha\beta + \alpha^2\beta^2 > \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow (1 + \alpha\beta)^2 > (\alpha + \beta)^2 \\ &\Leftrightarrow |1 + \alpha\beta| > |\alpha + \beta|. \end{aligned}$$

Ngược lại, nếu $|\alpha\beta| < 1$ và $|1 + \alpha\beta| > |\alpha + \beta|$. Từ $|1 + \alpha\beta| > |\alpha + \beta|$ suy ra

$$(1 - \alpha^2)(1 - \beta^2) > 0.$$

Điều này dẫn đến $1 - \alpha^2 > 0; 1 - \beta^2 > 0$ hoặc $1 - \alpha^2 < 0; 1 - \beta^2 < 0$.

Từ $1 < \alpha^2$ và $1 < \beta^2$ dẫn đến $1 < |\alpha\beta|$, điều này là không thể, do đó ta có thể kết luận rằng $1 > \alpha^2$ và $1 > \beta^2$, tức là $|\alpha| < 1$ và $|\beta| < 1$.

Bây giờ nếu $\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ và $\beta = \bar{\alpha} = r(\cos \theta - i \sin \theta)$ là hai số phức liên hợp với nhau với $|\alpha| = |\beta| = r$. Khi đó ta luôn có:

$$|\alpha + \beta| = |2r \cos \theta| \leq 2r < 1 + r^2 = |1 + \alpha\beta|.$$

Nếu $|r| < 1$ thì $|\alpha\beta| = r^2 < 1$.

Ngược lại nếu $|\alpha\beta| < 1$. Vì $r^2 = |\alpha\beta| < 1 \Rightarrow r < 1$, dẫn đến $|\alpha| = |\beta| = r < 1$. $\square$

Định lí 1. Cho A là ma trận vuông thực cấp 2. Khi đó dãy $\{A^n\}$ hội tụ về ma trận O nếu và chỉ nếu $|\det A| < 1$ và $|1 + \det A| > |\text{tr}(A)|$.

Chứng minh. Đa thức đặc trưng của ma trận A là:

$$\begin{aligned} p(x) &= \det(A - xI_2) = x^2 - (a + d)x + ad - bc, \\ &= x^2 - \text{tr}(A)x + \det A, \\ &= x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta, \end{aligned}$$

với α, β là các giá trị riêng của ma trận A .

Vì $p(x)$ là đa thức với hệ số thực nên α, β là các số thực hoặc là các số phức liên hợp với nhau. Từ Mệnh đề 1 và Bổ đề 1, ta có điều phải chứng minh.

Chú ý. Bổ đề 1 không đúng trong trường hợp với α, β là các số phức bất kì.

Ví dụ với $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, ta có $|\alpha| = |\beta| = \frac{1}{2}$ nhưng

$$|1 + \alpha\beta| = \left|1 - \frac{1}{4}\right| = \frac{3}{4} < 1 = |\alpha + \beta|.$$

Điều này cũng chứng tỏ rằng Định lí 1 cũng không đúng với ma trận cấp 2 trên trường

số phức. Với $A = \begin{bmatrix} \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{i}{2} \end{bmatrix}$, tính toán tương tự như trên ta có

$$|\det A| = \frac{1}{4} < 1; |1 + \det A| = \frac{3}{4} < 1 = |\text{tr}(A)|.$$

Do đó A không thỏa mãn điều kiện của Định lí 1. Tuy nhiên ta có dãy $\{A^n\}$ vẫn hội

tụ về ma trận O vì các giá trị riêng của A là $\alpha = \beta = \frac{i}{2}$, do đó $|\alpha| = |\beta| = \frac{1}{2} < 1$ thỏa mãn các điều kiện của Mệnh đề 1. Dĩ nhiên Định lí 1 vẫn đúng miễn là đa thức đặc trưng của ma trận A là đa thức với hệ số thực.

Ta cũng có Định lí 1 không còn đúng với ma trận cấp 3, chẳng hạn với ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Khi đó $|\det A| = 0 < 1$ và $|1 + \det A| = 1 > |\operatorname{tr}(A)| = 0$ và A thỏa mãn điều kiện của định lí nhưng

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq O.$$

Do đó ma trận A không hội tụ về ma trận O .

3. MỘT SỐ VÍ DỤ

Sau đây ta xét một số ví dụ về sự hội tụ của dãy $\{A^n\}$:

A	α, β	$\det A$	$1 + \det A$	$\operatorname{tr}(A)$	Hội tụ về ma trận O
$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	Có
$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1,9 \end{bmatrix}$	$\frac{3}{5}, -\frac{3}{2}$	$-0,9$	$0,1$	$-0,9$	Không
$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$	$2, -\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	Không
$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$	$\pm 2i$	4	5	0	Không
$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$	$\pm \frac{i}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	0	Có
$\begin{bmatrix} -5,2 & 3 \\ 10,6 & 6,1 \end{bmatrix}$	$0,1; 0,8$	$0,08$	$1,08$	$0,9$	Có

Trong mỗi ví dụ trên, khi dãy $\{A^n\}$ không hội tụ về ma trận O thì các phần tử của A^n dần tới ∞ . Tuy nhiên điều này không còn đúng khi có bất đẳng thức trong định lí trở thành đẳng thức. Dưới đây là một số ví dụ:

A	α, β	$\det A$	$1 + \det A$	$\operatorname{tr}(A)$	Hội tụ
$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$\frac{3 \pm \sqrt{15}i}{4}$	1	2	$\frac{3}{2}$	Không

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	0,1	0	1	1	Hội tụ đến A
$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	± 1	-1	0	0	Không
$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$	1 (bội 2)	1	2	2	Không
$\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{2}; 1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	Hội tụ đến $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} \neq O$

4. MA TRẬN NGẪU NHIÊN

Nhắc lại rằng, một ma trận vuông thực $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ được gọi là *ma trận ngẫu nhiên*

nếu $a_{ij} \geq 0; \forall i, j = 1, 2, \dots$, và $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1; \forall j = 1, 2, \dots, n$. Ma trận A được gọi là *chính quy* nếu tồn tại số tự nhiên $m \neq 0$ sao cho các phần tử của ma trận A^m là các số thực dương. Lý thuyết cơ bản của quy tắc Markov khẳng định rằng lũy thừa của ma trận ngẫu nhiên chính quy xấp xỉ một ma trận dòng với các cột giống nhau, chứng minh cụ thể có thể xem ở [2]. Ở bài báo này, ta sẽ đưa ra một cách chứng minh khác cho trường hợp đối với ma trận ngẫu nhiên cấp 2 và đưa ra công thức cụ thể đối với ma trận dòng.

Cho A là ma trận ngẫu nhiên chính quy cấp 2 với các giá trị riêng α, β . Ta có thể viết A dưới dạng

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{bmatrix}; 0 \leq a, b \leq 1.$$

Ta có thể coi $\alpha = 1$ vì ma trận ngẫu nhiên luôn có giá trị riêng bằng 1. Nếu $\beta = 1$ thì $\text{tr}(A) = a + 1 - b = \alpha + \beta = 2 \Rightarrow a = 1 + b$. Từ $0 \leq a, b \leq 1$, suy ra $b = 0, a = 1$, do đó $A = I_2$, điều này không thể vì A là chính quy. Do đó $\beta \neq 1$ và hai giá trị riêng của A là phân biệt. Vì $\beta = \alpha\beta = \det A = a - b \Rightarrow |\beta| < 1$, do đó $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha^n - \beta^n) = 1$ và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = \frac{1}{1-a+b} (A - (a-b)I_2) = \frac{1}{1-a+b} \begin{bmatrix} b & b \\ 1-a & 1-a \end{bmatrix}.$$

Vậy ta có

$$\frac{1}{1-a+b} \begin{bmatrix} b & b \\ 1-a & 1-a \end{bmatrix},$$

là ma trận dừng.

Chẳng hạn, với ma trận ngẫu nhiên chính quy

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \text{ thì ma trận dừng là } \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}.$$

5. KẾT LUẬN

Ở bài báo này, tác giả đã sử dụng một cách chứng minh đặc biệt dành cho ma trận vuông cấp 2 so với cách chứng minh của tác giả khác cho trường hợp tổng quát phức tạp hơn. Bài báo đã đưa ra được công thức điều kiện cần và đủ để dãy ma trận $\{A^n\}$ hội tụ, trong đó A là ma trận thực cấp 2 và nêu ra được các phản ví dụ **chứng tỏ Định lí 1 không còn đúng đối với ma trận phức cấp 2 bất kì hoặc ma trận có cấp cao hơn**. Đồng thời sử dụng các kết quả để chứng minh định lí nổi tiếng trong quy tắc Markov đối với ma trận ngẫu nhiên chính quy cấp 2.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Charles Cullen (1966), *Matrices and Linear Transformation*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, MA, p.173.
2. John Kemeny and J.Laurie Snell (1960), *Finite Markov Chains*, D.Van Nostrand Co., Inc., New York, NY.

