SỬ DỤNG ĐỊNH LÝ KRONECKER-CAPELLI GIẢI BÀI TOÁN VỀ VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

Lê Hoàng Mai[1*] và Thái Minh Nguyễn[2]

[1]*Khoa Sư phạm Toán - Tin, Trường Đại học Đồng Tháp*

[2]*Sinh viên, Khoa Sư phạm Toán - Tin, Trường Đại học Đồng Tháp*

[*]*Tác giả liên hệ: lhmai@dthu.edu.vn*

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 17/03/2021; Ngày nhận chỉnh sửa: 20/04/2021; Ngày duyệt đăng: 11/05/2021

Tóm tắt

Trong bài viết này, chúng tôi sử dụng định lý Kronecker-Capelli giải bài toán về vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng, giữa đường thẳng với mặt phẳng và giữa hai đường thẳng của hình học giải tích trong không gian ở chương trình Toán phổ thông.

Từ khóa: *Định lý Kronecker-Capelli, đường thẳng và mặt phẳng trong không gian, vị trí tương đối.*

USING KRONECKER-CAPELLI'S THEOREM TO SOLVE THE EXERCISE ON THE RELATIVE POSITION OF ANALYTIC GEOMETRY IN SPACE

Le Hoang Mai[1*] and Thai Minh Nguyen[2]

[1]*Department of Mathematics - Information Technology Teacher Education, Dong Thap University*

[2]*Student, Department of Mathematics - Information Technology Teacher Education, Dong Thap University*

[*]*Corresponding author: lhmai@dthu.edu.vn*

Article history

Received: 17/03/2021; Received in revised form: 20/04/2021; Accepted: 11/05/2021

Abstract

In this paper, we use Kronecker-Capelli's theorem to solve the problem of relative position between two planes, between the line and the plane, and between two lines of analytic geometry in space in the Mathematics curriculum of general education.

Keywords: *Kronecker-Capelli's theorem, lines and planes in space, relative position.*

DOI: https://doi.org/10.52714/dthu.10.3.2021.862

Trích dẫn: Lê Hoàng Mai và Thái Minh Nguyễn. (2021). Sử dụng định lý Kronecker-Capelli giải bài toán về vị trí tương đối của hình học giải tích trong không gian. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp, 10*(3), 3-12.

1. Đặt vấn đề

Bài toán xét vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng, giữa đường thẳng với mặt phẳng và giữa hai đường thẳng nằm trong chương trình hình học nâng cao lớp 12 (Đoàn Quỳnh, 2012). Đây là một nội dung khá quan trọng và thường xuyên xuất hiện trong các đề thi trắc nghiệm học kỳ II lớp 12 của các sở giáo dục và đào tạo, đặc biệt là các đề thi tốt nghiệp Trung học Phổ thông Quốc gia môn Toán hàng năm. Trong chương trình Trung học phổ thông, bài toán vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng, giữa đường thẳng với mặt phẳng và giữa hai đường thẳng được giải quyết tường minh dựa vào véctơ pháp tuyến của mặt phẳng và véctơ chỉ phương của đường thẳng.

Trong bài viết này, chúng tôi sử dụng kiến thức toán cao cấp để giải một dạng toán Trung học phổ thông. Cụ thể, chúng tôi sử dụng định lý Kronecker-Capelli trong Đại số tuyến tính để xét vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng, giữa đường thẳng với mặt phẳng và giữa hai đường thẳng trong không gian.

2. Bài toán vị trí tương đối hình học giải tích trong không gian

Trong mục này chúng tôi giới thiệu lại phương pháp xét vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng, giữa đường thẳng với mặt phẳng và giữa hai đường thẳng trong không gian được trình bày trong Đoàn Quỳnh (2012).

2.1. Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(x_0, y_0, z_0)$ và có véctơ pháp tuyến $\vec{n} = (A, B, C)$ trong đó $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ có phương trình tổng quát là $Ax + By + Cz + D = 0.$

Vậy mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết tọa độ một điểm và véctơ pháp tuyến của nó.

Trong không gian $Oxyz,$ cho hai mặt phẳng (α) và (α') lần lượt có phương trình

$$(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$$

$$(\alpha'): A'x + B'y + C'z + D' = 0.$$ Khi đó,

(a) (α) cắt (α') khi và chỉ khi

$$A : B : C \neq A' : B' : C'.$$

(b) (α) song song (α') khi và chỉ khi

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}.$$

(c) (α) trùng (α') khi và chỉ khi

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}.$$

2.2. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua điểm $M(x_0, y_0, z_0)$ và có véctơ chỉ phương $\vec{u} = (a, b, c)$ trong đó $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, \ t \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Trong trường hợp $abc \neq 0,$ Δ viết dưới dạng phương trình chính tắc là

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Ngoài ra, phương trình đường thẳng Δ còn viết được dưới dạng giao tuyến của hai mặt phẳng cắt nhau (α) và (β) như sau

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \ (\alpha) \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \ (\beta) \end{cases},$$

trong đó, $A : B : C \neq A' : B' : C'$, phương trình này được gọi là phương trình tổng quát của đường thẳng Δ. Khi đó, véctơ chỉ phương của Δ là $\vec{u} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right],$ với $\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1, C_1),$ $\overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$ lần lượt là các véctơ pháp tuyến của (α) và (β).

Ta dễ dàng chuyển từ phương trình đường thẳng dạng tham số sang dạng tổng quát và ngược lại.

Trong không gian $Oxyz,$ cho đường thẳng d đi qua điểm A và có véctơ chỉ phương $\vec{u},$ mặt phẳng (α) có véctơ pháp tuyến $\vec{n}.$ Khi đó,

(a) d cắt (α) khi và chỉ khi $\vec{u}.\vec{n} \neq 0.$

(b) d nằm trên (α) khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \vec{u}.\vec{n} = 0 \\ A \in (\alpha) \end{cases}.$$

(c) d song song (α) khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \vec{u}.\vec{n} = 0 \\ A \notin (\alpha) \end{cases}.$$

2.3. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Trong không gian $Oxyz,$ cho đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1,$ có véctơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}$ và đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2,$ có véctơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}.$ Khi đó,

(a) d_1 trùng d_2 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = \vec{0} \\ \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{M_1M_2}\right] = \vec{0} \end{cases}.$$

(b) d_1 song song d_2 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = \vec{0} \\ \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{M_1M_2}\right] \neq \vec{0} \end{cases}.$$

(c) d_1 cắt d_2 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] \neq \vec{0} \\ \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} = 0 \end{cases}.$$

(d) d_1 chéo d_2 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] \neq \vec{0} \\ \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} \neq 0 \end{cases}.$$

3. Định lý Kronecker-Capelli

Trong phần này chúng tôi giới thiệu lại một số khái niệm liên quan đến ma trận, hệ phương trình tuyến tính và định lý Kronecker-Capelli được trình bày trong (Đoàn Quỳnh, 2005), (Nguyễn Hữu Việt Hưng, 2004), (Nguyễn Viết Đông, 2009), (Leon, 2015) và (Trần Trọng Huệ, 2004).

3.1. Hạng của ma trận

Giả sử A là một ma trận m dòng, n cột với các phần tử trong trường số thực $\mathbb{R}.$ Cấp cao nhất của các định thức con khác 0 của A được gọi là hạng của ma trận $A,$ kí hiệu là $rank(A).$ Nói rõ hơn, $rank(A) = r$ nếu có một định thức con cấp r của A khác 0 và mọi định thức con cấp lớn hơn r của A đều bằng $0.$

3.2. Các phép biến đổi sơ cấp dòng

Cho ma trận $A,$ các phép biến đổi sau đây được gọi là các phép biến đổi sơ cấp dòng trên ma trận $A.$

(a) Nhân các phần tử trên một dòng bất kì với một số thực k khác không;

(b) Đổi chỗ 2 dòng cho nhau;

(c) Cộng k lần các phần tử trên dòng này vào các phần tử trên dòng kia.

3.3. Ma trận bậc thang dòng

Ma trận có 2 tính chất sau được gọi là ma trận bậc thang dòng

- Các dòng khác không luôn ở trên các dòng không.

- Trên hai dòng khác không thì phần tử khác không đầu tiên ở dòng dưới bao giờ cũng ở bên phải cột chứa phần tử khác không đầu tiên ở dòng trên.

Những kết quả sau đây đã được chứng minh

(a) Mọi ma trận luôn luôn đưa được về dạng ma trận bậc thang dòng bằng các phép biến đổi sơ cấp dòng.

(b) Các phép biến đổi sơ cấp dòng không làm thay đổi hạng của ma trận.

(c) Hạng của một ma trận bậc thang dòng bằng với số dòng khác không của nó.

3.4. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Hệ phương trình tuyến tính tổng quát gồm *m* phương trình, *n* ẩn có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

Ta kí hiệu $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$;

$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \end{pmatrix}^T$; $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & ... & b_m \end{pmatrix}^T$

Khi đó, hệ (1) viết được dưới dạng $AX = B$ gọi là dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính (1). Ta kí hiệu $\overline{A} = [A \mid B]$. Ma trận A được gọi là ma trận hệ số và $\overline{A} = [A \mid B]$ được gọi là ma trận bổ sung của hệ phương trình (1).

3.5. Định lý Kronecker-Capelli

Xét hệ phương trình tuyến tính tổng quát gồm *m* phương trình, *n* ẩn có dạng (1). Khi đó,

(a) Nếu $rank(A) < rank(\overline{A})$ thì hệ phương trình vô nghiệm.

(b) Nếu $rank(A) = rank(\overline{A}) = n$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

(c) Nếu $rank(A) = rank(\overline{A}) = k < n$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm và tập nghiệm của nó phụ thuộc $n - k$ biến tự do.

4. Kết quả chính

Trong phần này, chúng tôi sử dụng định lý Kronecker-Capelli xét vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng, giữa đường thẳng với mặt phẳng và giữa hai đường thẳng trong không gian và cho các ví dụ vận dụng.

4.1. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng trong không gian

Định lý 4.1.1. Trong không gian *Oxyz*, cho hai mặt phẳng

$(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$

$(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$

với $A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 > 0, A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 > 0.$

Đặt $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ và

$\overline{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{pmatrix}$. Khi đó,

(a) Nếu $rank(A) = rank(\overline{A}) = 2$ thì (α) cắt (β).

(b) Nếu $rank(A) = rank(\overline{A}) = 1$ thì (α) trùng (β).

(c) Nếu $1 = rank(A) < rank(\overline{A}) = 2$ thì (α) song song (β).

Chứng minh. Xét hệ phương trình tuyến tính 3 ẩn có dạng

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = -D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = -D_2 \end{cases}.$$

Dễ dàng thấy rằng hạng của ma trận hệ số A và ma trận bổ sung $\overline{A}$ lớn hơn hoặc bằng 1 và bé hơn hoặc bằng 2.

(a) Vì $rank(A) = rank(\overline{A}) = 2 < 3$ nên theo định lý Kronecker-Capelli hệ phương trình có vô số nghiệm và tập nghiệm phụ thuộc một biến tự do hay giao điểm của (α) và (β) là một đường thẳng trong $\mathbb{R}^3$. Vậy (α) cắt (β).

(b) Vì $rank(A) = rank(\overline{A}) = 1 < 3$ nên theo định lý Kronecker-Capelli hệ phương trình có vô số nghiệm và tập nghiệm phụ thuộc hai biến tự do hay giao điểm của (α) và (β) là một mặt phẳng trong $\mathbb{R}^3$. Vậy (α) trùng (β).

(c) Vì $1 = rank(A) < rank(\overline{A}) = 2$ nên theo định lý Kronecker-Capelli hệ phương trình vô nghiệm. Vậy (α) song song (β).

Ví dụ 4.1.2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng

$$(P): nx + 9y - 6z + 12 = 0$$

$$(Q): 3x + 3y - 2z + m = 0.$$

Hãy biện luận vị trí tương đối của (P) và (Q) theo hai tham số m và n.

Giải. Xét hệ phương trình tuyến tính 3 ẩn dạng $\begin{cases} nx + 9y - 6z = -12 \\ 3x + 3y - 2z = -m \end{cases}$. Ta có ma trận hệ số và ma trận bổ sung của hệ lần lượt là

$$A = \begin{pmatrix} n & 9 & -6 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ và } \overline{A} = \begin{pmatrix} n & 9 & -6 & -12 \\ 3 & 3 & -2 & -m \end{pmatrix}.$$

Khi đó, nếu $n = 0$ thì

$$rank(\overline{A}) = rank \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 & -m \\ 0 & 9 & -6 & -12 \end{pmatrix} = 2$$

hay $rank(A) = rank(\overline{A}) = 2,$ suy ra hai mặt phẳng cắt nhau. Nếu $n \neq 0$ thì

$$rank(\overline{A})$$

$$= rank \begin{pmatrix} n & 9 & -6 & -12 \\ 3 & 3 & -2 & -m \end{pmatrix}$$

$$= rank \begin{pmatrix} 3n & 27 & -18 & -36 \\ 3n & 3n & -2n & -mn \end{pmatrix}$$

$$= rank \begin{pmatrix} 3n & 27 & -18 & -36 \\ 0 & 3n-27 & -2n+18 & -mn+36 \end{pmatrix}.$$

Biện luận

- Hai mặt phẳng cắt nhau khi

$$\begin{cases} rank(A) = 2 \\ rank(\overline{A}) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3n - 27 \neq 0 \\ -2n + 18 \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow n \neq 9.$$

- Hai mặt phẳng song song khi

$$\begin{cases} rank(A) = 1 \\ rank(\overline{A}) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3n - 27 = 0 \\ -2n + 18 = 0 \\ -mn + 36 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 9 \\ m \neq 4 \end{cases}.$$

- Hai mặt phẳng trùng nhau khi

$$\begin{cases} rank(A) = 1 \\ rank(\overline{A}) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3n - 27 = 0 \\ -2n + 18 = 0 \\ -mn + 36 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 9 \\ m = 4 \end{cases}.$$

Ví dụ 4.1.3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x - ay - 3z + b = 0$ và $(Q): 2x - 4y - cz + 8 = 0$ (a, b, c là tham số). Giá trị của biểu thức $T = a + b + c$ khi hai mặt phẳng *(P)* và *(Q)* trùng nhau là

A. $T = 8.$ **B.** $T = 10.$

C. $T = 12.$ **D.** $T = 14.$

Giải. Xét hệ phương trình tuyến tính 3 ẩn dạng $\begin{cases} x - ay - 3z = -b \\ 2x - 4y - cz = -8 \end{cases}$. Ta có ma trận hệ số và ma trận bổ sung của hệ lần lượt là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & -3 \\ 2 & -4 & -c \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -a & -3 & -b \\ 2 & -4 & -c & -8 \end{pmatrix}.$$

Khi đó,

$$rank(\overline{A})$$

$$= rank \begin{pmatrix} 1 & -a & -3 & -b \\ 2 & -4 & -c & -8 \end{pmatrix}$$

$$= rank\begin{pmatrix} 1 & -a & -3 & -b \\ 0 & -4+2a & -c+6 & -8+2b \end{pmatrix}.$$

Hai mặt phẳng *(P)* và *(Q)* trùng nhau khi $rank(A) = rank(\overline{A}) = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4+2a=0 \\ -c+6=0 \\ -8+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ c=6 \\ b=4 \end{cases}.$$

Suy ra $T = a+b+c = 12$. Chọn đáp án C.

4.2. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng trong không gian

Định lý 4.2.1. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng

$$d: \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

với $A_1:B_1:C_1 \neq A_2:B_2:C_2$ và mặt phẳng

$$(\alpha):\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$$

với $A_3^{\ 2}+B_3^{\ 2}+C_3^{\ 2}>0.$

Đặt $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$ và

$\overline{A} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & -D_3 \end{pmatrix}$. Khi đó,

(a) Nếu $rank(A) = rank(\overline{A}) = 3$ thì d cắt (α).

(b) Nếu $rank(A) = rank(\overline{A}) = 2$ thì d nằm trong (α).

(c) Nếu $2 = rank(A) < rank(\overline{A}) = 3$ thì d song song với (α).

Chứng minh. Xét hệ phương trình tuyến tính 3 ẩn có dạng

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z=-D_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z=-D_2 \\ A_3x+B_3y+C_3z=-D_3 \end{cases}.$$

Dễ dàng thấy rằng hạng của ma trận hệ số A và ma trận bổ sung $\overline{A}$ lớn hơn hoặc bằng 2 và bé hơn hoặc bằng 3.

(a) Vì $rank(A) = rank(\overline{A}) = 3 = n$ nên theo định lý Kronecker-Capelli hệ phương trình có nghiệm duy nhất. Vậy d cắt (α).

(b) Vì $rank(A) = rank(\overline{A}) = 2$ nên theo định lý Kronecker-Capelli hệ phương trình có vô số nghiệm và tập nghiệm phụ thuộc một biến tự do hay giao điểm của d và (α) là một đường thẳng trong $\mathbb{R}^3$. Vậy d nằm trong (α).

c. Vì $2 = rank(A) < rank(\overline{A}) = 3$ nên hệ phương trình vô nghiệm. Vậy d song song với (α).

Nhận xét 4.2.2. Để tính hạng của ma trận A ta chỉ cần tính định thức $detA$. Ta có thể dùng máy tính cầm tay Casio *fx*-580VN X hoặc các loại máy tính cầm tay khác có thể tính được định thức cấp 3.

Nếu $detA \neq 0$ thì $rank(A) = 3$. Suy ra $rank(A) = rank(\overline{A}) = 3$. Nếu $detA = 0$ thì $rank(A) = 2$. Khi đó, ta tính các định thức con cấp 3 còn lại của ma trận $\overline{A}$, cụ thể $B = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & -D_3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} A_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & C_2 & -D_2 \\ A_3 & C_3 & -D_3 \end{pmatrix}$,

$$D = \begin{pmatrix} B_1 & C_1 & -D_1 \\ B_2 & C_2 & -D_2 \\ B_3 & C_3 & -D_3 \end{pmatrix}.$$

Nếu tồn tại $detB \neq 0$ hoặc $detC \neq 0$ hoặc $detD \neq 0$ thì $rank(\overline{A}) = 3$.

Nếu $detB = detC = detD = 0$ thì $rank(\overline{A}) = 2$.

Ví dụ 4.2.3. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-5}{-1}$ và mặt phẳng (P): $3x-3y+2z+6=0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. d cắt nhưng không vuông góc với mặt phẳng (P).

B. d vuông góc với mặt phẳng (P).

C. d song song với mặt phẳng (P).

D. d nằm trong mặt phẳng (P).

Giải. Đường thẳng d có phương trình tổng quát là $\begin{cases}3x+y=-3\\ x+z=4\end{cases}$. Xét hệ phương trình tuyến tính 3 ẩn $\begin{cases}3x+y=-3\\ x+z=4\\ 3x-3y+2z=-6\end{cases}$. Ma trận hệ số $A=\begin{pmatrix}3&1&0\\1&0&1\\3&-3&2\end{pmatrix}$. Để tính $detA$ ta thao tác trên máy tính cầm tay Casio *fx*-580VN X như sau

MENU 4 1 3 3 3 = 1 = 0 = 1
= 0 = 1 = 3 = − 3 = 2 =
AC OPTN ▼ 2 OPTN 3) =

Màn hình xuất hiện:

```
Det(MatA)
            10
```

Suy ra $detA=10\neq 0$, vậy d cắt (P). Để kiểm tra tính vuông góc của d và (P). Ta có $\overrightarrow{u_d}=(1,-3,-1)$, $\overrightarrow{n_P}=(3,-3,2)$. Vì tồn tại $\begin{vmatrix}1&-3\\3&-3\end{vmatrix}=6\neq 0$ nên $\overrightarrow{u_d}$ và $\overrightarrow{n_P}$ không cùng phương hay d không vuông góc mặt phẳng (P). Vậy chọn đáp án A.

Ví dụ 4.2.4. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=-3+2t\\ y=-1+3t\\ z=1+2t\end{cases}$ và mặt phẳng $(P): 2x-2y+z+3=0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. d cắt (P). **B.** $d\parallel(P)$.

C. $d\subset(P)$. **D.** $d\perp(P)$.

Giải. Phương trình tổng quát của đường thẳng d là

$\begin{cases}3x-2y=-7\\ 2x-2z=-8\end{cases}$. Xét hệ phương trình tuyến tính 3 ẩn $\begin{cases}3x-2y=-7\\ 2x-2z=-8\\ 2x-2y+z=-3\end{cases}$. Ma trận hệ số $A=\begin{pmatrix}3&-2&0\\2&0&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$. Vì $detA=0$ nên $rank(A)=2$, do đó d song song hoặc nằm trong (P). Ta tiếp tục xác định ma trận $\overline{A}=\begin{pmatrix}3&-2&0&-7\\2&0&-2&-8\\2&-2&1&-3\end{pmatrix}$. Lần lượt tính định thức các ma trận con cấp 3 của $\overline{A}$ là

$$B=\begin{pmatrix}3&.-2&-7\\2&0&-8\\2&-2&-3\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}3&0&-7\\2&-2&-8\\2&1&-3\end{pmatrix},$$

$D=\begin{pmatrix}-2&0&-7\\0&-2&-8\\-2&1&-3\end{pmatrix}$. Thao tác như trên ta tính được $detB=detC=detD=0$ nên d nằm trong (α). Vậy chọn đáp án C.

Chú ý. Trong bài toán này, khi ta tìm được ma trận $\overline{A}$, vì theo Định lý 4.2.1 chỉ cần tồn tại một trong ba định thức con $detB\neq 0$ hoặc $detC\neq 0$ hoặc $detD\neq 0$ là có thể kết luận được d song song với (P) nên để rút ngắn được thời gian làm bài trắc nghiệm ta chỉ cần nhập ma trận B và tính $detB$. Nếu $detB\neq 0$ ta kết luận ngay d song song với (P), còn nếu

$detB = 0,$ ta mới nhập tiếp ma trận *C,* tính *detC* rồi mới tới *D.*

4.3. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng trong không gian

Trong phần này, ta xét đường thẳng có phương trình ở dạng tham số. Vì thế, nếu phương trình đường thẳng chưa ở dạng tham số thì ta chuyển về dạng tham số.

Định lý 4.3.1. Trong không gian *Oxyz*, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x = x_1 + a_1t \\ y = y_1 + b_1t, \ t \in \mathbb{R} \\ z = z_1 + c_1t \end{cases}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = x_2 + a_2t' \\ y = y_2 + b_2t', \ t' \in \mathbb{R} \\ z = z_2 + c_2t' \end{cases}$. Đặt $A = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ b_1 & -b_2 \\ c_1 & -c_2 \end{pmatrix}$ và $\overline{A} = \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 & x_2 - x_1 \\ b_1 & -b_2 & y_2 - y_1 \\ c_1 & -c_2 & z_2 - z_1 \end{pmatrix}$.

Khi đó,

(a) Nếu $2 = rank(A) < rank(\overline{A}) = 3$ thì Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.

(b) Nếu $1 = rank(A) < rank(\overline{A})$ thì Δ_1 và Δ_2 song song.

(c) Nếu $rank(A) = rank(\overline{A}) = 2$ thì Δ_1 và Δ_2 cắt nhau.

(d) Nếu $rank(A) = rank(\overline{A}) = 1$ thì Δ_1 và Δ_2 trùng nhau.

Chứng minh. Xét hệ phương trình tuyến tính 2 ẩn

$$\begin{cases} a_1t - a_2t' = x_2 - x_1 \\ b_1t - b_2t' = y_2 - y_1 \\ c_1t - c_2t' = z_2 - z_1 \end{cases}.$$

a. Vì $rank(A) < rank(\overline{A})$ nên theo định lý Kronecker-Capelli hệ phương trình vô nghiệm. Hơn nữa, $rank(A) = 2$ nên hệ $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ độc lập tuyến tính hay $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ không cùng phương. Vậy Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.

b. Vì $rank(A) < rank(\overline{A})$ nên theo định lý Kronecker-Capelli hệ phương trình vô nghiệm. Hơn nữa $rank(A) = 1$ nên hệ $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ phụ thuộc tuyến tính hay $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ cùng phương. Vậy Δ_1 và Δ_2 song song.

c. Vì $rank(A) = rank(\overline{A}) = 2$ nên theo định lý Kronecker-Capelli hệ phương trình có nghiệm duy nhất. Vậy Δ_1 và Δ_2 cắt nhau.

d. Vì $rank(A) = rank(\overline{A}) = 1$ nên theo định lý Kronecker-Capelli hệ phương trình có vô số nghiệm và tập nghiệm phụ thuộc một biến tự do hay giao điểm của Δ_1 và Δ_2 là một đường thẳng. Vậy Δ_1 và Δ_2 trùng nhau.

Ví dụ 4.3.2. Trong không gian *Oxyz*, cho hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-7}{1} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-9}{-1}$ và $d_2: \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{3}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. d_1 và d_2 cắt nhau.

B. d_1 và d_2 song song.

C. d_1 và d_2 trùng nhau.

D. d_1 và d_2 chéo nhau.

Giải. Phương trình tham số của d_1 và d_2 lần lượt là $d_1: \begin{cases} x = 7 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 9 - t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = 3 - t' \\ y = 1 + 2t' \\ z = 1 + 3t' \end{cases}$. Xét hệ phương trình tuyến tính 2 ẩn

$\begin{cases} t + t' = -4 \\ 2t - 2t' = -2 \\ t + 3t' = 8 \end{cases}$. Ta có ma trận hệ số và ma trận bổ sung

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix} \text{ và } \overline{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -4\\ 2 & -2 & -2\\ 1 & 3 & 8\end{pmatrix}.$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} & rank\left(\overline{A}\right)\\ &= rank\begin{pmatrix}1 & 1 & -4\\ 2 & -2 & -2\\ 1 & 3 & 8\end{pmatrix}\\ &= rank\begin{pmatrix}1 & 1 & -4\\ 0 & -4 & 6\\ 0 & 2 & 12\end{pmatrix}\\ &= rank\begin{pmatrix}1 & 1 & -4\\ 0 & -4 & 6\\ 0 & 0 & 30\end{pmatrix}\\ &= 3.\end{aligned}$$

Suy ra $2=rank\left(A\right)<rank\left(\overline{A}\right)=3$. Vậy d_1 và d_2 chéo nhau. Chọn đáp án D.

Ví dụ 4.3.3. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ và $d_2:\begin{cases}x=5+2t'\\ y=1-t'\\ z=5-t'\end{cases}$.

A. d_1 chéo d_2. **B.** $d_1\equiv d_2$.

C. d_1 cắt d_2. **D.** $d_1\parallel d_2$.

Giải. Phương trình tham số của đường thẳng d_1 là $\begin{cases}x=3-2t\\ y=-3+t\\ z=1+t\end{cases}$.

Xét hệ phương trình tuyến tính 2 ẩn $\begin{cases}2t+2t'=-2\\ t+t'=4\\ t+t'=4\end{cases}$. Ta có ma trận hệ số và ma trận bổ sung

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \text{ và } \overline{A}=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}.$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} & rank\left(\overline{A}\right)\\ &= rank\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 4\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}\\ &= rank\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}\\ &= rank\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\ 0 & 0 & -10\end{pmatrix}\\ &= 2.\end{aligned}$$

Suy ra $1=rank\left(A\right)<rank\left(\overline{A}\right)=2$. Vậy $d_1\parallel d_2$. Chọn đáp án D.

Ví dụ 4.3.4. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$ và $\Delta_2:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{1}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. Δ_1 và Δ_2 trùng nhau.

B. Δ_1 và Δ_2 chéo nhau.

C. Δ_1 và Δ_2 song song.

D. Δ_1 và Δ_2 cắt nhau.

Giải. Phương trình tham số của Δ_1 và Δ_2 lần lượt là

$$\Delta_1:\begin{cases}x=2+t\\ y=1+3t\\ z=1-t\end{cases} \text{ và } \Delta_2:\begin{cases}x=-1+3t'\\ y=-1+2t'\\ z=t'\end{cases}.$$

Xét hệ phương trình tuyến tính 2 ẩn $\begin{cases}t-3t'=-3\\ 3t-2t'=-2\\ t+t'=1\end{cases}$. Ta có ma trận hệ số và ma trận bổ sung

$$A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 3 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix} \text{ và } \overline{A}=\begin{pmatrix}1 & -3 & -3\\ 3 & -2 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} & rank\left(\overline{A}\right) \\ &= rank\begin{pmatrix}1 & -3 & -3\\ 3 & -2 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \\ &= rank\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -3 & -3\\ 3 & -2 & -2\end{pmatrix} \\ &= rank\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & -4\\ 0 & -5 & -5\end{pmatrix} \\ &= rank\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & -4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Suy ra, $rank(A)=rank\left(\overline{A}\right)=2$. Vậy Δ_1 và Δ_2 cắt nhau. Chọn đáp án D.

5. Kết luận.

Trong bài viết này, chúng tôi đã trình bày một phương pháp giải bài toán xét vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng, giữa đường thẳng với mặt phẳng và giữa hai đường thẳng trong không gian bằng cách áp dụng định lý Kronecker-Capelli thông qua việc tính hạng của các ma trận hệ số và mở rộng. Kết quả bài viết này cung cấp cho giáo viên, sinh viên toán và học sinh trung học phổ thông có thêm một cách giải khác cho bài toán xét vị trí tương đối, từ đó góp phần nâng cao hiệu quả dạy và học môn toán ở trường phổ thông và khoa toán các trường đại học.

Qua bài viết trên, chúng ta thấy rằng có thể sử dụng kiến thức Đại số tuyến tính mà sinh viên được học ở chương trình đại học vào việc giải một số bài toán trong chương trình trung học phổ thông.

Trong thời gian tới, chúng tôi sẽ tiếp tục khai thác các ứng dụng của định thức nói riêng và đại số tuyến tính nói chung để giải một số bài toán về điều kiện thẳng hàng, điều kiện đồng phẳng, tính thể tích khối chóp, khối hộp, khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau… trong chương trình toán trung học phổ thông.

Lời cám ơn: Nghiên cứu này được hỗ trợ bởi đề tài nghiên cứu khoa học sinh viên của Trường Đại học Đồng Tháp mã số SPD2020.02.05./.

Tài liệu tham khảo

Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên), Văn Như Cương (Chủ biên), Phạm Khắc Ban, Lê Huy Hùng và Tạ Mân. (2012). *Hình học nâng cao 12*. Hà Nội: NXB Giáo dục Việt Nam.

Đoàn Quỳnh (Chủ biên), Khu Quốc Anh, Nguyễn Anh Kiệt, Tạ Mân và Nguyễn Doãn Tuấn. (2005). *Giáo trình Đại số tuyến tính và Hình học giải tích*. Hà Nội: NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

Nguyễn Hữu Việt Hưng. (2004). *Đại số tuyến tính*. Hà Nội: NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

Nguyễn Viết Đông, Lê Thị Thiên Hương, Nguyễn Anh Tuấn và Lê Anh Vũ. (2009). *Toán cao cấp tập 2,* Hà Nội: NXB Giáo dục Việt Nam.

Leon S. J. (2015). *Linear algebra with applications.* University of Massachusetts, Dartmouth.

Trần Trọng Huệ. (2004). *Giáo trình Đại số tuyến tính và hình học giải tích (Tập I).* Hà Nội: NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.