

# Xác định hệ số chiều dài tính toán của các thanh dạng thon

Determine the length coefficient of the taper struts

Hoàng Ngọc Phương

## Tóm tắt

Bài báo trình bày rõ hơn cách xác định hệ số chiều dài tính toán của các thanh dạng thon, nhằm mục đích tính toán ổn định tổng thể của nó.

**Từ khóa:** length coefficient, taper struts

## Abstract

The paper describes how to determine the length coefficient of the taper struts, to calculate the overall stability of it.

**Key words:** hệ số chiều dài tính toán, thanh dạng thon

## 1. Đặt vấn đề

Hiện nay, thanh dạng thon (là những thanh có tiết diện thay đổi dần dần) được sử dụng thường xuyên bởi sự hợp lý của yếu tố thẩm mỹ, công năng, ngoài ra tiết diện thay đổi để phù hợp với biểu đồ momen trong cấu kiện nhằm mục đích tiết kiệm vật liệu. Tuy nhiên việc tính toán cấu kiện thanh có tiết diện thay đổi lại phức tạp và khó khăn hơn so với trường hợp tiết diện không đổi, điều đó đặt ra bài toán cho người thiết kế.

## 2. Thanh có độ cứng thay đổi theo luật lũy thừa

Thanh có độ cứng thay đổi theo luật lũy thừa thường có giá trị sử dụng tương đối cao trong thực tế. Viện sĩ A.N. Đinnik là người đầu tiên nghiên cứu ổn định của những loại thanh này. Trước hết, xét thanh bị ngàm ở chân và tự do ở đỉnh (Hình 1) Giả thiết momen quán tính của tiết diện thay đổi tỷ lệ với khoảng cách từ điểm 0 nào đó (xem Hình 1) theo luật lũy thừa:

$$I_{(z)} = I_1 \left( \frac{z}{a} \right)^n \quad (1)$$

Trong đó:  $I_1$  - momen quán tính ở đầu nhỏ của thanh, số mũ  $n$  phụ thuộc hình dạng cụ thể của thanh.

$a$  - khoảng cách từ điểm 0 đến trọng tâm tiết diện đầu nhỏ (Hình 1a).

Trường hợp thanh có tiết diện đặc trong đó chiều cao  $h$  không thay đổi còn bề rộng  $b$  thay đổi bậc nhất dọc theo chiều dài thanh thì  $n=1$  (Hình 1b), nếu khi mất ổn định thanh bị uốn cong quanh trục  $y$ .

Trường hợp thanh có tiết diện rỗng, tiết diện gồm bốn thanh thép góc ghép chắc chắn với nhau bởi hệ thanh bụng, trong đó mỗi cạnh thay đổi bậc nhất dọc theo chiều dài, ta có  $n=2$  (Hình 1c). Với trường hợp này, diện tích mặt cắt ngang của thanh không thay đổi còn momen quán tính thì gần như tỷ lệ thuận với bình phương khoảng cách kể từ trọng tâm của các thép góc đến trục đối xứng của mặt cắt. Khi đó, momen quán tính tại tiết diện có tọa độ  $z$  bất kỳ được xác định như sau:

$$I_{(z)} = 4A \left( \frac{h(z)}{2} \right)^2 \quad (2) \quad A - \text{diện tích tiết diện một nhánh;}$$

$$\text{nhưng } I_{(z)} = 4A \left( \frac{h(z)}{2} \right)^2 \text{ nên: } I_{(z)} = 4A \left( \frac{h(1)}{2} \right)^2 \left( \frac{z}{a} \right)^2 = I_1 \left( \frac{z}{a} \right)^2 \quad (3)$$

Trường hợp thanh có tiết diện đặc thay đổi theo dạng hình chóp cụt hay hình nón cụt đặc, tương tự như trên có  $n=4$ .

Để giải bài toán này chọn hệ trục tọa độ như trên Hình 2, phương trình vi phân của đường đàn hồi có dạng:

$$E \cdot I_1 \cdot \left( \frac{z}{a} \right)^n \cdot \frac{d^2 y}{dz^2} = -P \cdot y \quad (4)$$

Phương trình vi phân này có hệ số thay đổi, có thể tìm nghiệm dưới dạng chuỗi vô hạn hay dưới dạng hàm Bessel. Trường hợp khi  $n=2$  và  $n=4$ , ta có thể tìm nghiệm của phương trình vi phân dưới dạng các hàm sơ cấp. Bài báo không trình bày cách giải các phương trình vi phân này, lời giải có thể xem trong tài liệu [4].

Giải phương trình vi phân có thể xác định được lực tới hạn biểu diễn dưới dạng chung như sau:

**ThS. Hoàng Ngọc Phương**

Bộ môn Kết cấu Thép - Gỗ

Khoa Xây dựng

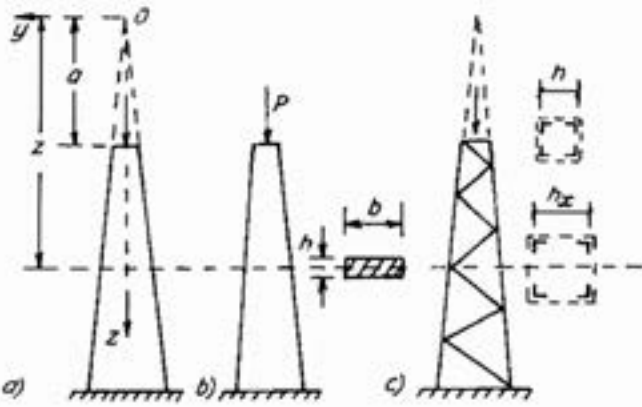
Email: hoangngocphuongkt@gmail.com

ĐT: 0968 567 234

Ngày nhận bài: 08/5/2019

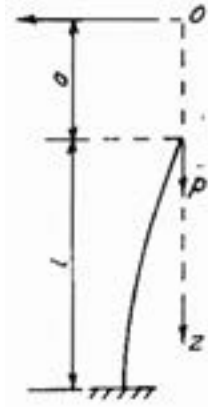
Ngày sửa bài: 22/5/2019

Ngày duyệt đăng: 18/11/2021



Hình 1. Sơ đồ thanh

a) Trục tọa độ, b) Trường hợp  $n = 1$ , c) Trường hợp  $n = 2$



Hình 2. Đường cong biến dạng đàn hồi khi thanh bị uốn dọc

Bảng 1. Giá trị hệ số K tương ứng với  $n=2$

$l_1/l_2$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
K	0,250	1,350	1,593	1,763	1,904	2,023	2,128	2,223	2,311	2,392	$\pi^2/4$

Bảng 2. Giá trị hệ số K tương ứng với  $n=4$

$l_1/l_2$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
K	1,202	1,505	1,710	1,870	2,002	2,116	2,217	2,308	2,391	$\pi^2/4$

$$P_{th} = K \frac{EI_2}{l^2} \quad (5)$$

K là hệ số phụ thuộc tỷ số độ cứng của tiết diện ở hai đầu thanh.

- Trường hợp  $n=2$  (Bảng 1).
- Trường hợp  $n = 4$  (Bảng 2).

- Có thể sử dụng mọi kết quả trên để tìm lực tới hạn cho thanh có hai đầu khớp và đối xứng qua mặt cắt chính giữa như hình 3, được kết quả trong bảng 3:

### 3. Xác định hệ số chiều dài tính toán cho thanh dạng thon

Theo phần trên có thể xác định được lực nén tới hạn theo lý thuyết ổn định đàn hồi, tuy nhiên khi áp dụng vào tính toán ổn định tổng thể cho cấu kiện chịu nén, việc sử dụng hệ số K không thuận tiện, do đó người ta đã đưa ra hệ số chiều dài tính toán. Lực tới hạn của thanh là  $P_{th} = K \frac{EI_2}{l^2}$ ; mà theo công thức của O'le ta có thể biểu diễn lực tới hạn này theo tiết diện có độ cứng lớn nhất như sau  $P_{th} = \frac{\pi^2 EI_2}{(\mu l)^2}$  (6) từ đó

$$K = \frac{\pi^2}{\mu^2} \rightarrow \mu = \pi \sqrt{K} \quad (7)$$

Sau đây đi tìm hệ số  $\mu$  cho các trường hợp cụ thể.

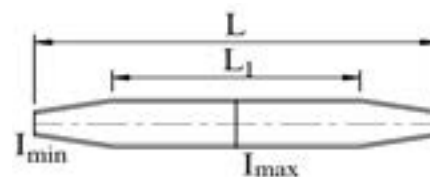
- Trường hợp  $n=2$  (Bảng 4).
- Trường hợp  $n = 4$  (Bảng 5).
- Trường hợp khác cho thanh có tiết diện thay đổi (Bảng 6).

Thực hành tính toán về ổn định tổng thể của thanh chịu nén đúng tâm có tiết diện thay đổi được tính theo công thức [1]:

$$\frac{N}{\varphi \cdot A} \leq f \cdot \gamma_c \quad (8)$$

Bảng 3. Giá trị hệ số K cho thanh như Hình 3

$l_1/l_2$	n	a/l					
		0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,1	1	6,48	7,58	8,63	9,46	9,82	$\pi^2$
	2	5,40	6,67	8,08	9,25	9,79	
	3	5,01	6,32	7,84	9,14	9,77	
	4	4,81	6,11	7,68	9,08	9,77	
0,2	1	7,01	7,99	8,91	9,63	9,82	$\pi^2$
	2	6,37	7,49	8,61	9,44	9,81	
	3	6,14	7,31	8,49	9,39	9,81	
	4	6,02	7,20	8,42	9,38	9,80	
0,4	1	7,87	8,59	9,19	9,70	9,84	$\pi^2$
	2	7,61	8,42	9,15	9,63	9,84	
	3	7,52	8,38	9,12	9,62	9,84	
	4	7,48	8,33	9,10	9,62	9,84	
0,6	1	8,61	9,12	9,55	9,76	9,85	$\pi^2$
	2	8,51	9,04	9,48	9,74	9,85	
	3	8,50	9,02	9,46	9,74	9,85	
	4	8,47	9,01	9,45	9,74	9,85	
0,8	1	9,27	9,54	9,69	9,83	9,86	$\pi^2$
	2	9,24	9,50	9,69	9,82	9,86	
	3	9,23	9,50	9,69	9,81	9,86	
	4	9,23	9,49	9,69	9,81	9,86	
1,0	$\pi^2$	$\pi^2$	$\pi^2$	$\pi^2$	$\pi^2$	$\pi^2$	$\pi^2$



Hình 3. Thanh hai đầu khớp và đối xứng qua mặt cắt chính giữa

**Bảng 4. Hệ số chiều dài tính toán ứng với  $n = 2$** 

l1/l2	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
K	0.25	1.35	1.593	1.763	1.904	2.023	2.128	2.223	2.311	2.392	2.467
$\mu$	3.14	1.35	1.24	1.18	1.14	1.10	1.08	1.05	1.03	1.02	1.00

**Bảng 5. Hệ số chiều dài tính toán ứng với  $n = 4$** 

l1/l2	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
K	1.202	1.505	1.71	1.87	2.002	2.116	2.217	2.308	2.391	2.467
$\mu$	1.43	1.28	1.20	1.15	1.11	1.08	1.05	1.03	1.02	1.00

**Bảng 6. Hệ số chiều dài tính toán  $\mu_2$  cho thanh hai đầu liên kết khớp có tiết diện thay đổi [5]**

Sơ đồ thanh	Quy luật	L1/ L2	Tỉ số lmin/lmax						
			0,01	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Đường thẳng (cột đặc có chiều dày không đổi, bề rộng biến đổi theo quy luật đường thẳng)	0 0,2 0,4 0,6 0,8		1,23 1,14 1,07 1,02 1,00	1,19 1,11 1,05 1,01 1,00	1,12 1,07 1,04 1,01 1,00	1,07 1,04 1,02 1,01 1,00	1,03 1,02 1,01 1,00 1,00	1,00
	Bậc hai (cột đặc có chiều dày không đổi, bề rộng biến đổi theo quy luật parabol hoặc cột rỗng có thanh cánh mặt cắt đều, còn bề rộng biến đổi theo quy luật đường thẳng)	0 0,2 0,4 0,6 0,8	1,69 1,45 1,23 1,07 1,01	1,35 1,22 1,11 1,03 1,0	1,25 1,15 1,07 1,02 1,0	1,14 1,08 1,04 1,01 1,0	1,08 1,05 1,02 1,01 1,0	1,03 1,02 1,01 1,0 1,0	1,00
	Bậc 3 (cột đặc có bề rộng không đổi, chiều dày biến đổi theo quy luật đường thẳng)	0 0,2 0,4 0,6 0,8	1,97 1,64 1,35 1,11 1,01	1,40 1,25 1,12 1,04 1,01	1,27 1,16 1,08 1,03 1,01	1,15 1,09 1,04 1,01 1,00	1,08 1,05 1,02 1,01 1,00	1,07 1,02 1,01 1,01 1,00	1,00
	Hình sin (cột rỗng có thanh cánh dạng hình sin và có mặt cắt không đổi)	0	1,32	1,16	1,11	1,06	1,03	1,01	1,00
	Bậc 1 Bậc 2 Bậc 3 Bậc 4	0 0 0 0		1,45 1,66 1,75 1,78	1,35 1,45 1,48 1,50	1,21 1,24 1,25 1,26	1,13 1,13 1,14 1,14	1,06 1,05 1,06 1,06	1,00 1,00 1,00 1,00

với:  $f$  - cường độ tính toán của vật liệu thép,  $\gamma_c$  - hệ số điều kiện làm việc của kết cấu.

Hệ số uốn dọc  $\varphi$  được xác định phụ thuộc vào độ mảnh:

$$\lambda = \frac{\mu_2 l}{r_{\max}} \quad (9)$$

$\mu_2$  - hệ số chiều dài tính toán của thanh có tiết diện thay đổi và hai đầu liên kết khớp, xem Bảng 6;

$r_{\max}$  - bán kính quán tính của tiết diện lớn nhất.

Đối với thanh có liên kết ở hai đầu không phải là khớp thì độ mảnh được xác định theo công thức:

$$\lambda = \frac{\mu_1 \mu_2 l}{r_{\max}} \quad (10)$$

$\mu_1$  - hệ số chiều dài tính toán của thanh có hai đầu không phải là khớp. Trường hợp thanh rỗng có tiết diện thay đổi, thì khi tính độ mảnh còn phải xét đến ảnh hưởng của thanh giằng hoặc bản giằng, xem thêm tài liệu [1].

- Theo tiêu chuẩn Việt Nam TCVN 5575: 2012 "Kết cấu thép – tiêu chuẩn thiết kế"; khi tính độ mảnh tương đương của cấu kiện rỗng đứng độc lập dạng tháp, độ mảnh lớn nhất của toàn thanh  $\lambda$  được tính theo công thức sau [2]:

+ Đối với thanh bốn mặt, có các cánh song song, hai đầu tựa khớp:

$$\lambda = \frac{2.L}{b} \quad (11)$$

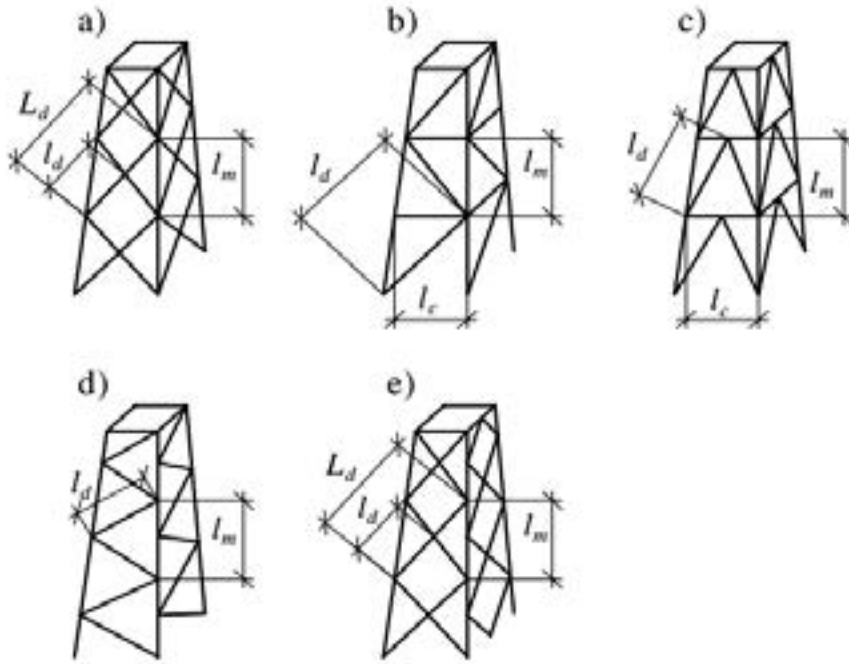
+ Đối với thanh ba mặt đều, có các cánh song song, hai đầu tựa khớp:

$$\lambda = \frac{2,5.L}{b} \quad (12)$$

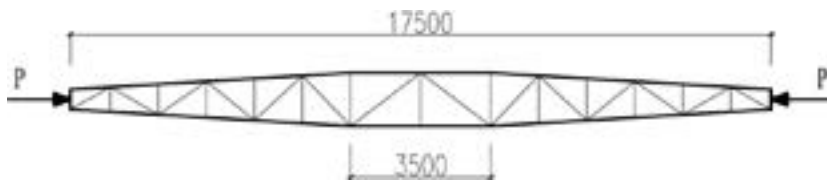
+ Đối với các thanh đứng độc lập dạng tháp như Hình 4:

$$\lambda = \frac{2.\mu_i.h}{b_d} \quad (13)$$

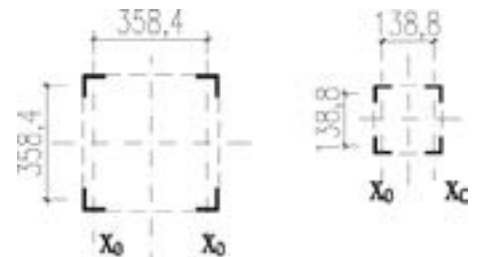
Trong đó:



**Hình 4. Sơ đồ kết cấu không gian rỗng, các thanh từ thép góc đơn**  
 a, b, c – các mặt ở hai mặt tiếp giáp trùng nhau;  
 d, e – các mặt ở hai mặt tiếp giáp không trùng nhau.



**Hình 5. Sơ đồ thanh**



**Hình 6. Tiết diện giữa và đầu thanh**

$$\mu_j = 1,25(b_l/b_d)^2 - 2,75(b_l/b_d) + 3,5 \quad (14)$$

L - chiều dài hình học của thanh rỗng;

b - khoảng cách giữa trục của các cánh song song trên mặt hẹp nhất của thanh;

h - chiều cao của thanh đứng độc lập dạng tháp;

b<sub>l</sub> và b<sub>d</sub> - khoảng cách giữa trục các cánh của thanh dạng tháp ứng với phía trên và phía dưới chân của mặt hẹp nhất.

#### 4. Ví dụ tính toán

Ví dụ 1: Xác định lực nén tới hạn cho một thanh được cấu tạo bởi 4 thép góc 75x75x6 như Hình 5. Tiết diện giữa và hai đầu như Hình 6. Cho  $E = 2,1 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$ ;  $n = 2$ .

+) Tra bảng thép hình L75x75x6, có  $A=8,78\text{cm}^2$ ;  $I_{x0} = 46,6\text{cm}^4$ ;  $z_0 = 2,06\text{cm}$ .

+) Tính đặc trưng hình học của mặt cắt ghép:

Khi mất ổn định, thanh quay xung quanh trục x-x. Do đó, momen quán tính của mặt cắt giữa và mặt cắt hai đầu đối với trục x-x là:

$$I_2 = I_{x2} = 4(46,6 + 15,94^2 \cdot 8,78) = 9110,2\text{cm}^4$$

$$I_1 = I_{x1} = 4(46,6 + 6,04^2 \cdot 8,78) = 1468\text{cm}^4$$

+) Tính  $P_{th}$ :

$$P_{th} = K \frac{EI_2}{l^2}$$

Để tìm K, xác định tỉ số  $I_1/I_2$  và  $a/l$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1468}{9110,2} = 0,161; \quad \frac{a}{l} = \frac{3,5}{17,5} = 0,2 \quad \text{và } n = 2$$

Tra Bảng 4 và nội suy, có  $K = 7$ . Do đó

$$P_{th} = K \frac{EI_2}{l^2} = 7 \cdot \frac{2,1 \cdot 10^4 \cdot 9110,2}{1750^2} = 437,3\text{KN}$$

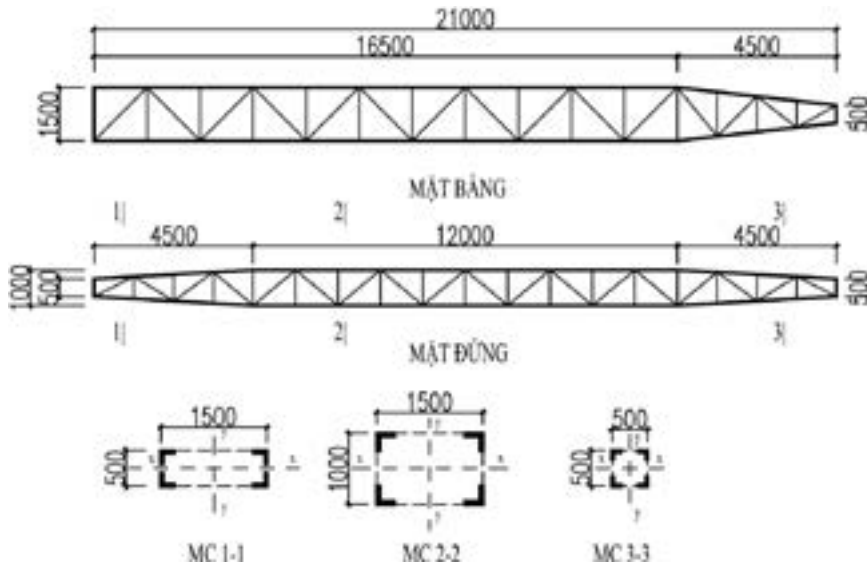
Ví dụ 2: Tính độ mảnh theo hai phương của tay vịn của cầu trục ghép bằng bốn thép góc có số hiệu L 63 x 5 và liên kết với nhau bằng thanh giằng, chiều dài của tay cân  $L = 21\text{m}$ , kích thước tiết diện tay cân xem Hình 7.

+) Tay cân được ghép bằng bốn thép góc có số hiệu L 63 x 5, diện tích tiết diện là  $A = 6 \cdot 13,4 = 80,4 \text{ cm}^2$ . Các đặc trưng hình học khác của tiết diện tại một số mặt cắt đặc trưng cho ở bảng sau:

Đặc trưng hình học của tiết diện tay cân

Mặt cắt	h (cm)	b (cm)	$I_x$ (cm <sup>4</sup> )	$I_x$ (cm <sup>4</sup> )	$i_x$ (cm)	$i_y$ (cm)
I-I	50	150	13400	132000	23	73
II-II	100	150	57200	132000	48	73
III-III	50	50	13400	13400	-	-

+) Chiều dài tính toán của tay cân đối với trục x (trục


**Hình 7. Sơ đồ tay vịn của cần trục**
**Bảng 7. Hệ số  $\mu_1$  xác định chiều dài tính toán của thanh có tiết diện không đổi [2]**

Cách liên kết và dạng tải trọng								
Hệ số $\mu$ theo lý thuyết	1,0	0,7	0,5	2,0	1,0	2,0	0,725	1,12
Hệ số $\mu$ khi các điều kiện liên kết gần sát với lý thuyết (Tham khảo)	1,0	0,8	0,65	2,1	1,2	2,0	-	-

thẳng góc với mặt phẳng nâng tải - mặt phẳng thẳng đứng):

$$L_{ox} = \mu_1 \mu_2 L = 1.1,02.21 = 21,4m$$

Trong đó  $\mu_1 = 1$  vì trong mặt phẳng nâng tải liên kết ở hai đầu tay cần ứng với liên kết khớp, còn  $\mu_2$  phụ thuộc vào:

$$\frac{I_{x\min}}{I_{x\max}} = \frac{13400}{57200} = 0,23 \text{ và } \frac{L_1}{L} = \frac{12}{21} = 0,57$$

Tra bảng được  $\mu_2 = 1,02$  (Bảng 6,  $n = 2$ ).

+ ) Chiều dài tính toán của tay cần đối với trục y:

$$L_{oy} = \mu_1 \mu_2 L = 2.1,45.21 = 61m$$

Trong đó  $\mu_1 = 2$  vì trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng nâng tải, liên kết ở đầu trong của tay cần trực ứng với liên kết ngàm, còn đầu ngoài tự do. Hệ số  $\mu_2$  phụ thuộc vào:

$$\frac{I_{y\min}}{I_{y\max}} = \frac{13400}{132000} = 0,1$$

Coi nhánh biến đổi theo quy luật đường thẳng, tra Bảng 6 được  $\mu_2 = 1,45$ .

Độ mảnh của tay cần:

$$\lambda_x = \frac{L_{ox}}{i_x} = \frac{2140}{48} = 44,6 ; \lambda_y = \frac{L_{oy}}{i_y} = \frac{6100}{73} = 83,5$$

### 5. Kết luận và kiến nghị

Bài báo đã làm sáng tỏ hơn cho việc xác định hệ số chiều dài tính toán của thanh có dạng thon, nhằm phục vụ cho bài toán thiết kế các thanh dạng này.

Trong thực tế có những thanh thay đổi tiết diện hoặc tháp có hình dạng thay đổi không theo quy luật lũy thừa... do đó cần có những nghiên cứu thêm cho những loại cấu kiện này./.

### Tài liệu tham khảo

1. Phạm Văn Hội, Nguyễn Quang Viên và nnk (2010), "Kết cấu thép - Cấu kiện cơ bản", Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.
2. Tiêu chuẩn Việt Nam TCVN 5575:2012, "Kết cấu thép - Tiêu chuẩn thiết kế", Nhà xuất bản Xây dựng, Hà Nội.
3. S. P. Timoshenko, J. M. Gere - Ổn định đàn hồi - Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội 1975.

4. Lều Thọ Trình, Đỗ Văn Bình - Ổn định công trình - Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội 2006.
5. Vũ Thành Hải, Trương Quốc Bình, Vũ Hoàng Hưng - Kết cấu thép - Nhà xuất bản Xây dựng, Hà Nội 2008.
6. S. P. Timoshenko, J. M. Gere - Theory of elastic stability - Second edition - Mc Graw - Hill Book Company, Inc. New York 1961.