

Phân tích khung phẳng có nút liên kết nửa cứng bằng phương pháp phần tử hữu hạn

Analysis for plane frames with semi-rigid connections using finite element method

Trần Thị Thúy Vân⁽¹⁾, Nguyễn Hồng Cu⁽²⁾, Trương Quang Tuấn⁽³⁾

Tóm tắt

Trong tính toán thiết kế khung phẳng hiện nay, đặc biệt là trường hợp khung thép phẳng thì nút liên kết giữa dầm và cột thường được đưa về trường hợp lý tưởng để tính toán cho thuận tiện và đơn giản. Điều đó đã không thể hiện được sát với ứng xử và sự làm việc thực tế của kết cấu, do đó việc tính toán chưa được phù hợp. Khi nút liên kết dầm-cột được coi là khớp lý tưởng hay cứng hoàn toàn đều chưa tính đến sự đàn hồi của liên kết. Tuy nhiên, việc kể đến độ đàn hồi của nút liên kết trong tính toán yêu cầu cần phải có các phương pháp tính toán phù hợp để giải quyết được các khó khăn phát sinh trong mô hình tính toán có nút liên kết nửa cứng. Bài báo trình bày bài toán tính toán nội lực, chuyển vị, phân tích dao động của kết cấu khung thép phẳng có nút liên kết nửa cứng sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn. Bài báo đưa ra trình tự tính toán đối với loại bài toán cụ thể áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn, từ đó áp dụng phần mềm lập trình tính toán MathCad để thiết lập chương trình con để khắc phục những khó khăn về mặt toán học có thể phát sinh trong quá trình tính toán. Từ kết quả tính toán sẽ đưa ra được một số khuyến nghị cần thiết trong việc áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn để tính toán khung có nút liên kết nửa cứng.

Từ khóa: nút liên kết nửa cứng, phương pháp phần tử hữu hạn, phân tích tĩnh, phân tích dao động, khung phẳng

Abstract

In the modern calculations and designs of plane frames, especially steel plane frames, the beam-column connections commonly are assumed as idealized connections for simplicity of calculation. That does not reflect the actual behavior of structural systems, thereof the designs and calculations are not appropriate. When the beam-column connections are considered as ideally pinned or perfectly rigid joints, the flexibility of connections is not taken into account. However, to include the flexibility of beam-column connections, appropriate analysis methods are required to deal with the difficulties arising in modeling the system with semi-rigid connections. This paper presents the static analysis for internal forces, displacements, and vibration analysis of steel plane frames with semi-rigid connections using the finite element method, thereby, the MathCad software is adopted to establish the calculation routine to overcome the arisen mathematical difficulties. From the obtained results, some necessary recommendations will be given in applying the finite element method to analyze plane frames with semi-rigid connections.

Key words: semi-rigid connection, finite element method, static analysis, vibration analysis, plane frame

(1)TS, Giảng viên, khoa Xây dựng, ĐH Kiến trúc Hà Nội,
Email: <tthvan.hau@gmail.com>

(2)ThS, Nghiên cứu viên, Viện Khoa học công nghệ xây dựng IBST

(3)ThS, Kỹ sư, Công ty Cổ phần Tư vấn Xây dựng Quảng Bình

Ngày nhận bài: 15/04/2022

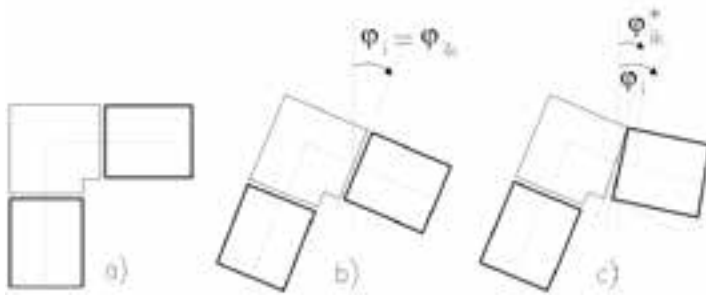
Ngày sửa bài: 06/05/2022

Ngày duyệt đăng: 5/7/2022

1. Tổng quan

Khi tính toán và thiết kế kết cấu, việc lựa chọn mô hình tính toán phù hợp với sự ứng xử thực tế của kết cấu là một khâu rất quan trọng, được nhiều nhà nghiên cứu trong nước và trên thế giới quan tâm. Điều này giúp cho người thiết kế dễ dàng kiểm soát được các ứng xử của kết cấu, từ đó đưa ra các phương án tính toán thiết kế chính xác và tiết kiệm nguyên vật liệu hơn. Đối với kết cấu khung phẳng, đặc biệt là khung thép phẳng, thông thường để đơn giản hóa tính toán nút liên kết giữa dầm và cột thường được giả thiết về các trường hợp nút liên kết lý tưởng như liên kết cứng hoặc liên kết khớp hoàn toàn. Trong trường hợp nếu giả thiết là liên kết cứng đã bỏ qua độ đàn hồi của liên kết, kết quả chuyển vị xoay tại nút nhỏ hơn so với thực tế, nhưng nội lực ở nút lại có giá trị lớn, kích thước tiết diện dầm tại nút thường lớn. Ngược lại, trường hợp giả thiết là liên kết khớp thì mômen giữa nhịp dầm đạt giá trị lớn nhất, mômen tại nút bằng không, không đúng với sự làm việc thực tế của hệ. Do đó, nếu coi nút liên kết là liên kết nửa cứng để mô phỏng liên kết dầm-cột của nút khung sẽ làm cho các thông số như nội lực và chuyển vị trong hệ kết cấu phân bố lại một cách hợp lý, phù hợp với sự làm việc thực tế của kết cấu, nói cách khác mômen lớn nhất tại nút và nhịp dầm sẽ được giảm đi. Từ đó sẽ giúp tiết kiệm vật liệu hơn. Vì thế, việc sử dụng liên kết nửa cứng tại nút khung sẽ làm cho các thông số như nội lực và chuyển vị cũng như các thông số của bài toán phân tích ổn định, phân tích dao động phù hợp với ứng xử của kết cấu thực tế hơn. Vấn đề đặt ra là việc tính toán kết cấu khung có kể đến sự đàn hồi của liên kết nửa cứng và ảnh hưởng của các liên kết nửa cứng đến nội lực, chuyển vị, đến thông số ổn định, thông số dao động của khung như thế nào? Vấn đề tính toán và thiết kế khung thép phẳng có liên kết nửa cứng đã được nghiên cứu và trình bày trong nhiều tài liệu và tiêu chuẩn thiết kế tại nhiều nước, có thể kể đến như trong [1], Eurocode3, AS 4100-1990, AISI-LRFD 1999, BS5950-2000... Tuy nhiên, tại Việt Nam việc tính toán thiết kế kết cấu khung thép phẳng mà kể đến độ đàn hồi của liên kết nửa cứng chưa có đầy đủ các chỉ dẫn tính toán cụ thể trong các tài liệu hướng dẫn thực hành tính toán. Trong các tài liệu [2, 3] cũng đã nghiên cứu về tính toán khung có liên kết đàn hồi. Bài báo trình bày việc áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn trong phân tích nội lực chuyển vị, phân tích ổn định, phân tích dao động của khung phẳng có liên kết nửa cứng. Áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn trong việc giải quyết bài toán giúp cho chúng ta có thể dễ dàng kiểm soát được các số liệu đầu vào và thay đổi chúng một cách thuận lợi, đặc biệt là trong trường hợp kết hợp với các phần mềm lập trình tính toán thì sẽ không gặp phải các khó khăn về mặt toán học khi giải quyết những hệ phức tạp.

Việc tính toán thiết kế khung thép phẳng có nút liên kết nửa cứng đã được đề cập trong nhiều nghiên cứu trên thế giới và tại Việt Nam. Trong [4-11] đã mô phỏng



Hình 1. Liên kết tại nút thứ i trước và sau khi biến dạng:
a) Liên kết tại nút i trước khi biến dạng; **b)** Xoay góc φ_i tại nút i trong trường hợp nút liên kết cứng sau khi biến dạng;
c) Xoay góc φ_i tại nút i và xoay góc φ_{ism} tại đầu i của cấu kiện trong trường hợp nút liên kết đàn hồi sau khi biến dạng.

nút liên kết nửa cứng qua 2 loại liên kết đàn hồi là liên kết đàn hồi cho phép chuyển vị xoay (rotational spring) và liên kết đàn hồi cho phép cả chuyển vị thẳng cả chuyển vị xoay (lateral-rotational spring). Nghiên cứu [12] đã trình bày quá trình khảo sát hệ có nút liên kết nửa cứng thông qua thí nghiệm của hệ kết cấu với mô hình thực tế 1:1, từ đó có thể rút ra các kết luận đúng đắn về sự hội tụ của việc áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn trong phân tích tĩnh hệ có nút liên kết nửa cứng với ứng xử thật của hệ kết cấu thông qua những số liệu thu thập được từ thí nghiệm. Trong [4,6,9,13] trình bày về phân tích ổn định, phân tích dao động của khung phẳng có nút liên kết nửa cứng, trong các nghiên cứu này đều chỉ ra rằng, việc sử dụng nút liên kết nửa cứng đều cho các kết quả thể hiện chính xác ứng xử làm việc của hệ kết cấu hơn là trong những trường hợp nút liên kết lý tưởng.

2. Phân tích tĩnh khung thép phẳng có nút liên kết nửa cứng bằng phương pháp phần tử hữu hạn

2.1. Ma trận độ cứng của phần tử thanh có nút liên kết nửa cứng cho phép chuyển vị xoay

2.1.1. Các thông số hiệu chỉnh của thanh có nút liên kết nửa cứng

Ở đây sử dụng khái niệm thông số hiệu chỉnh, hệ số hiệu chỉnh, đó chính là các thông số, hệ số kể đến sự đàn hồi của liên kết, thông số này sẽ thay đổi từ 0 trong trường hợp nút

liên kết dầm – cột là nút liên kết khớp cho đến giá trị 1 trong trường hợp nút liên kết dầm – cột là nút liên kết cứng. Các hệ số hiệu chỉnh này có quan hệ chặt chẽ với độ cứng của liên kết đàn hồi [13]:

$$\mu_{ik} = \frac{1}{1 + \frac{3}{R_{ki}}} \quad \bar{R}_{ki} = \frac{R_{ki} \cdot L_b}{EI_z} \quad (1)$$

Vì vậy, có thể thể hiện độ cứng của liên kết đàn hồi của các đầu phần tử thông qua hệ số hiệu chỉnh như sau:

$$R_{kiA}(\mu_{ik}) = \frac{3 \cdot E \cdot I_z \cdot \mu_{ik}}{(1 - \mu_{ik}^2) \cdot L_b}; \quad (2)$$

$$R_{kiA}(\mu_{ik}) = R_{kiB}(\mu_{ik})$$

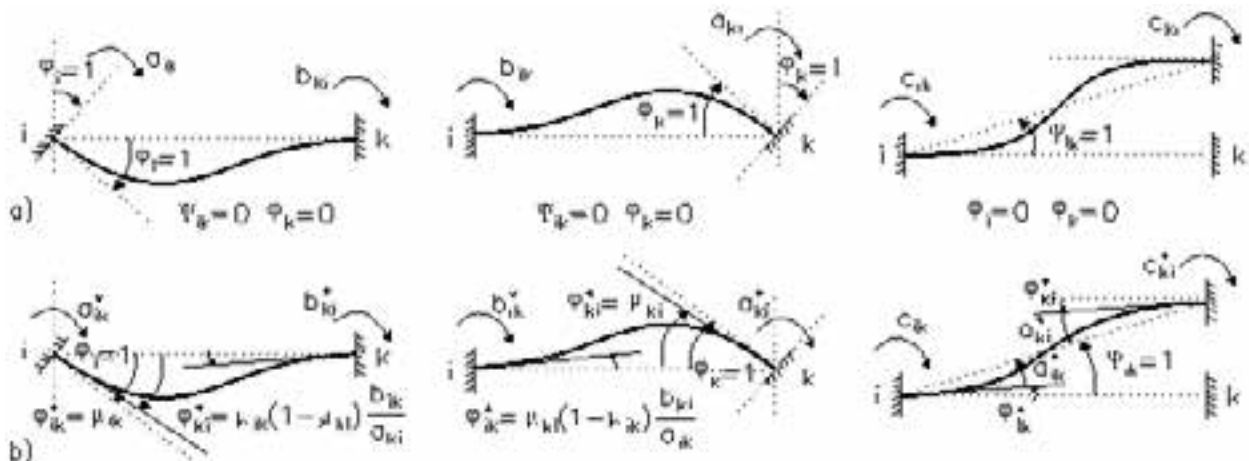
Tương tự, trong bài báo sử dụng khái niệm ma trận độ cứng hiệu chỉnh và ma trận khối lượng hiệu chỉnh được hiểu là các ma trận có chứa các thông số hiệu chỉnh tính đến sự ảnh hưởng của độ cứng liên kết đàn hồi tới giá trị các phần tử trong các ma trận đó.

Ở đây, giả thiết trong trường hợp kết cấu khung có nút liên kết đàn hồi góc xoay là φ_i và φ_k , trong khi góc xoay tại đầu tiết diện của cấu kiện là φ_i^{sm} và φ_k^{sm} (Hình 1), do đó hệ số hiệu chỉnh tại nút i được ký hiệu là μ_{ik} và tại nút k là μ_{ki} . Các hệ số này được xác định qua các công thức [13]:

$$\mu_{ik} = \frac{\varphi_{ik}^*}{\varphi_i}, \quad \mu_{ki} = \frac{\varphi_{ki}^*}{\varphi_k} \quad (3)$$

Đối với cấu kiện có nút liên kết cứng thì về mặt vật lý các hệ số a_{ik} chính là giá trị mômen tại nút thứ i do chuyển vị xoay bằng đơn vị tại nút i gây ra, còn b_{ik} là giá trị mômen tại nút thứ i do chuyển vị xoay bằng đơn vị tại nút k gây ra, tương tự như vậy a_{ki} là giá trị mômen tại nút k do chuyển vị xoay bằng đơn vị tại nút k gây ra. Trong khi đó, c_{ik} là giá trị mômen tại nút i do chuyển vị xoay của cấu kiện ik gây ra, thể hiện trên Hình 2a. Tương tự, ý nghĩa vật lý của các hệ số đối với nút có liên kết đàn hồi được ký hiệu thêm bởi hệ số "sm", thể hiện trên Hình 2b.

Theo (4) thấy rằng góc xoay của đầu tiết diện trái là $\varphi_i^{sm} = \mu_{ik}$ do chuyển vị xoay tại nút i: φ_i . Với ý nghĩa vật lý a_{ik} và b_{ik} , góc xoay của đầu cấu kiện φ_{ki}^{sm} có thể viết theo nguyên lý cộng tác dụng theo công thức:



Hình 2. Ý nghĩa vật lý của các hệ số a_{ik} , b_{ik} , a_{ki} , b_{ki} , c_{ik} và c_{ki} đối với cấu kiện:

a) với nút liên kết cứng; **b)** với nút liên kết đàn hồi

$$\varphi_{ki}^* = \mu_{ik}(1 - \mu_{ki}) \frac{b_{ik}}{a_{ki}} \quad (4)$$

Tương tự, trong trường hợp $\varphi_k=1$ tại nút k, góc xoay của đầu cầu kiện bên phải là $\varphi_{ki}^{sm}=\mu_{ik}$ và góc xoay φ_{ik}^{sm} là:

$$\varphi_{ik}^* = \mu_{ki}(1 - \mu_{ik}) \frac{b_{ik}}{a_{ki}} \quad (5)$$

Trong trường hợp trục cầu kiện xoay một góc $\varphi_{ik}=1$, góc giữa các đầu cầu kiện và tiếp tuyến tới đường đàn hồi tại vị trí đầu tiết diện cầu kiện là:

$$\begin{aligned} a_{ik}^* &= 1 - \varphi_{ik}^* = 1 - \mu_{ki}(1 - \mu_{ik}) \frac{b_{ik}}{a_{ik}}; \\ a_{ki}^* &= 1 - \varphi_{ki}^* = 1 - \mu_{ik}(1 - \mu_{ki}) \frac{b_{ik}}{a_{ki}} \end{aligned} \quad (6)$$

2.1.2. Ma trận độ cứng của phần tử có nút liên kết nửa cứng

Trong hệ khung phẳng được cấu tạo từ các cột và dầm. Xét một đoạn dầm có chiều dài l và có tiết diện không đổi, chịu uốn trong mặt phẳng xOy trong hệ tọa độ địa phương. Mômen quán tính của mặt cắt ngang dầm được ký hiệu là I và mô đun đàn hồi của vật liệu là E . Nếu ảnh hưởng của lực dọc tới chuyển vị của cầu kiện là nhỏ, ta không xét đến, thì chuyển vị tại nút i và k (thông số chuyển vị) chỉ bao gồm các thành phần chuyển vị đứng (v_i, v_k) và các thành phần chuyển vị xoay (φ_i, φ_k) tại đầu các cầu kiện, do các cầu kiện dầm có 4 bậc tự do, 2 bậc tự do mỗi đầu dầm. Các lực cắt tương ứng là (Q_i, Q_k) và mômen uốn (M_i, M_k) tại các đầu i và k. Quy ước về các dấu dương của chuyển vị và lực được biểu diễn như Hình 2.3.

Trong trường hợp dầm bị uốn trong mặt phẳng giữa chuyển vị, $v(x)$ tại bất kỳ điểm nào của trục dầm và các thông số chuyển vị tại các đầu dầm có thể dễ dàng thu được từ phương trình vi phân thuần nhất của thanh chịu uốn:

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = 0 \quad (7)$$

Nghiệm tổng quát của nó có thể được viết dưới dạng đa thức bậc ba:

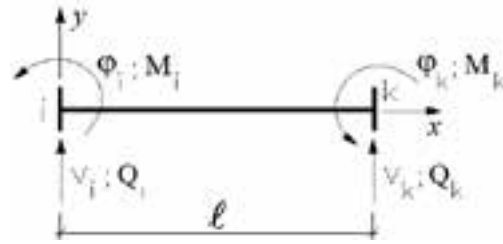
$$v(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \quad (8)$$

Các hệ số $\alpha_1, 2, 3, 4$ được xác định từ các điều kiện biên ở các đầu dầm, sau khi xử lý điều kiện biên ta có:

$$v(x) = Nu = \sum_{m=1}^4 N_m u_m \quad (9)$$

Hàm dạng $N_m(x)$ biểu diễn đường đàn hồi của dầm có liên kết cứng do chuyển vị tổng quát $u_m=1, m=1, 2, 3, 4$, trong khi tất cả các chuyển vị tổng quát khác $u_n=0, n \neq m$

Các hàm dạng cho dầm có các nút liên kết đàn hồi thể hiện trên Hình 2.5, được suy ra theo cách tương tự như đối với dầm có các đầu nút liên kết cứng. Các hàm dạng đó được xác định tương tự theo công thức (2.15), véc tơ của các hàm dạng có thể viết như sau:



Hình 3. Biểu diễn các chuyển vị và các lực ở hai đầu dầm

$$[N_{semi}] = \begin{bmatrix} N_1^{semi}(x) & N_2^{semi}(x) & N_3^{semi}(x) & N_4^{semi}(x) \end{bmatrix} \quad (10)$$

Dựa trên ý nghĩa vật lý của các hệ số $k_{ij}, i, j=1, 2, 3, 4$ được thể hiện trên Hình 4, các hệ số của ma trận độ cứng có thể được xác định như các phản lực của dầm có nút liên kết cứng (chuyển vị đơn vị và của các đầu dầm) $u_j=1$, trong khi tất cả các chuyển vị khác đều bằng 0.

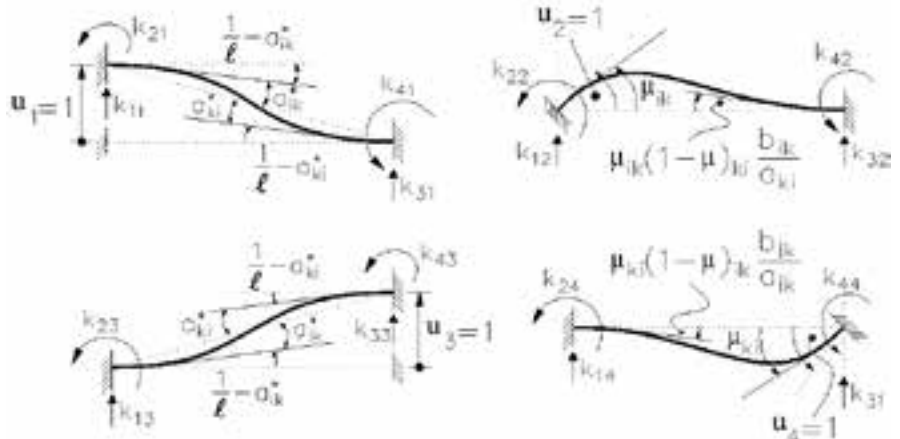
Trong đó:

$$\begin{aligned} N_1^{semi}(x) &= 1 - \left(\frac{1}{l} - \alpha_{ik}^* \right) x - \frac{2\alpha_{ik}^* + \alpha_{ki}^*}{l} x^2 + \frac{\alpha_{ik}^* + \alpha_{ki}^*}{l^2} x^3 \\ N_2^{semi}(x) &= \mu_{ik} x - \frac{2\mu_{ik} - \mu_{ki} + \alpha_{ki}^* l}{l} x^2 + \frac{\mu_{ik} - \mu_{ki} + \alpha_{ki}^* l}{l^2} x^3 \\ N_3^{semi}(x) &= \left(\frac{1}{l} - \alpha_{ik}^* \right) x + \frac{2\alpha_{ik}^* + \alpha_{ki}^*}{l} x^2 - \frac{\alpha_{ik}^* + \alpha_{ki}^*}{l^2} x^3 \\ N_4^{semi}(x) &= (\mu_{ik} - \alpha_{ik}^* l) x - \frac{2\mu_{ik} + \mu_{ki} - 2\alpha_{ki}^* l}{l} x^2 + \frac{\mu_{ik} + \mu_{ki} - \alpha_{ki}^* l}{l^2} x^3 \end{aligned} \quad (11)$$

Trên cơ sở của phép nội suy, bắt đầu từ ma trận độ cứng cơ sở của dầm liên kết nửa cứng tiếp xúc với uốn trong mặt phẳng xOy, ý nghĩa vật lý của các phần tử trong ma trận độ cứng của nó được thể hiện trong Hình 5.

Ma trận độ cứng của phần tử có nút liên kết nửa cứng

$$[K^{sm}] = EI \int_0^l \begin{bmatrix} N_1'(x) \\ N_2'(x) \\ N_3'(x) \\ N_4'(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1'(x) & N_1'(x) & N_1'(x) & N_1'(x) \end{bmatrix} dx \quad (12)$$



Hình 4. Ý nghĩa vật lý các hàm dạng của dầm có các nút liên kết đàn hồi

$$[K^{sm}] = \begin{bmatrix} k_{11}^* & k_{12}^* & k_{13}^* & k_{14}^* \\ k_{21}^* & k_{22}^* & k_{23}^* & k_{24}^* \\ k_{31}^* & k_{32}^* & k_{33}^* & k_{34}^* \\ k_{41}^* & k_{42}^* & k_{43}^* & k_{44}^* \end{bmatrix} \quad (13)$$

Đối với phần tử chịu ảnh hưởng của lực dọc tới chuyển vị của thanh, ma trận độ cứng hiệu chỉnh của cấu kiện có nút liên kết nửa cứng có thể được viết dưới dạng:

$$[K^{sm}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ & k_{11}^* & k_{12}^* & 0 & k_{13}^* & k_{14}^* \\ & & k_{22}^* & 0 & k_{23}^* & k_{24}^* \\ & & & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ \text{simetrically} & & & & k_{33}^* & k_{34}^* \\ & & & & & k_{44}^* \end{bmatrix} \quad (14)$$

Trong đó:

$$k_{mn} = EI \int_0^\ell N_m''(x) N_n''(x) dx \quad (15)$$

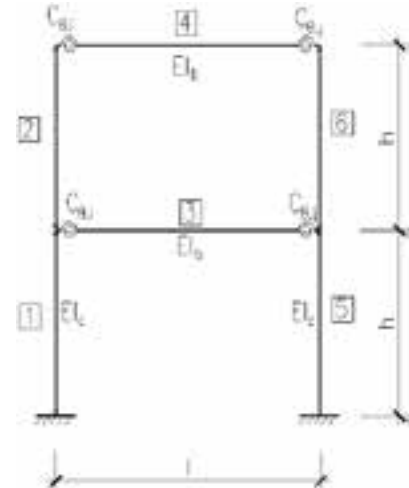
Khi phân tích cấu kiện có nút liên kết đàn hồi, trong trường hợp chuyển vị đứng $u_1=1$ tại đầu i của cấu kiện hoặc chuyển vị đứng $u_3=1$ tại đầu k của cấu kiện, các chuyển vị khác bằng 0, thì góc giữa đầu cấu kiện với tiếp tuyến tại đầu tiết diện sau khi biến dạng, có thể được thể hiện theo (7) và thực tế đây là các góc nhỏ nên $\tan \alpha \approx \alpha$, do đó:

$$\alpha_{ik}^* = \left[1 - \mu_{ki}(1 - \mu_{ik}) \frac{b_{ik}}{a_{ik}} \right] \frac{1}{\ell} \quad ; \quad \alpha_{ki}^* = \left[1 - \mu_{ik}(1 - \mu_{ki}) \frac{b_{ik}}{a_{ik}} \right] \frac{1}{\ell} \quad (16)$$

Đạo hàm các hàm dạng trong (12), ta thu được các phần tử của ma trận độ cứng hiệu chỉnh như sau:

$$\begin{aligned} k_{11}^* &= \frac{4EI}{\ell} [\alpha_{ik}^2 + \alpha_{ik}^* \alpha_{ki}^* + \alpha_{ki}^{*2}] \\ k_{12}^* &= \frac{2EI}{\ell} [2(\alpha_{ik}^* \mu_{ik}^* + \alpha_{ki}^{*2} \ell - \alpha_{ki}^* \mu_{ki}) - \alpha_{ik}^* \mu_{ki} + \alpha_{ik}^* \alpha_{ki}^* \ell + \alpha_{ki}^* \mu_{ik}] \\ k_{13}^* &= -\frac{4EI}{\ell} [\alpha_{ik}^{*2} + \alpha_{ik}^* \alpha_{ki}^* + \alpha_{ki}^{*2}] = -k_{11}^* \\ k_{14}^* &= \frac{2EI}{\ell} [2(\alpha_{ik}^* \mu_{ik} - \alpha_{ki}^{*2} \ell + \alpha_{ki}^* \mu_{ki}) + \alpha_{ik}^* \mu_{ki} - \alpha_{ik}^* \alpha_{ki}^* \ell + \alpha_{ki}^* \mu_{ik}] \\ k_{22}^* &= \frac{4EI}{\ell} [\mu_{ik}^2 + \mu_{ik} \mu_{ki} + \mu_{ki}^2 + \alpha_{ki}^* \mu_{ik} \ell - 2\alpha_{ki}^* \mu_{ki} \ell + \alpha_{ki}^{*2} \ell^2] \\ k_{23}^* &= -\frac{2EI}{\ell} [2(\alpha_{ik}^* \mu_{ik} + \alpha_{ki}^{*2} \ell - \alpha_{ki}^* \mu_{ki}) - \alpha_{ik}^* \mu_{ki} + \alpha_{ik}^* \alpha_{ki}^* \ell + \alpha_{ki}^* \mu_{ik}] = -k_{12}^* \\ k_{24}^* &= \frac{2EI}{\ell} [2(\mu_{ik}^2 - \alpha_{ik}^* \mu_{ik} \ell - \mu_{ki}^2 + \alpha_{ki}^* \mu_{ki} \ell) + \alpha_{ik}^* \mu_{ki} \ell + \alpha_{ik}^* \mu_{ik} \ell - \alpha_{ik}^* \alpha_{ki}^* \ell^2] \\ k_{33}^* &= \frac{4EI}{\ell} [\alpha_{ik}^{*2} + \alpha_{ik}^* \alpha_{ki}^* + \alpha_{ki}^{*2}] = k_{11}^* \\ k_{34}^* &= -\frac{2EI}{\ell} [2(\alpha_{ik}^* \mu_{ik} - \alpha_{ki}^{*2} \ell + \alpha_{ki}^* \mu_{ki}) + \alpha_{ik}^* \mu_{ki} - \alpha_{ik}^* \alpha_{ki}^* \ell + \alpha_{ki}^* \mu_{ik}] = -k_{14}^* \\ k_{44}^* &= \frac{4EI}{\ell} [\mu_{ik}^2 + \mu_{ik} \mu_{ki} + \mu_{ki}^2 - 2\alpha_{ik}^* \mu_{ik} \ell - \alpha_{ik}^* \mu_{ki} \ell + \alpha_{ik}^{*2} \ell^2] \end{aligned} \quad (17)$$

Trường hợp đặc biệt, với phần tử dầm 2 đầu nút cứng tại i và k thì $\mu_{ik} = \mu_{ki} = 1$



Hình 5. Khung 2 tầng với liên kết nửa cứng cho phép chuyển vị xoay tại liên kết



Hình 6. Sơ đồ tính toán khung có liên kết khớp trong phần mềm Sap2000

2.1.3. Ma trận khối lượng của thanh có nút liên kết nửa cứng

Xuất phát từ các hàm dạng của phần tử dầm có hai đầu có liên kết nửa cứng, được thể hiện trong Hình 5, các phần tử của ma trận khối lượng của dầm như vậy có thể được suy ra tương tự như trường hợp phần tử có 2 đầu nút cứng theo công thức:

$$m_{mn}^{semi} = \rho F \ell \int_0^\ell (N_m^{semi}(x))^T N_n^{semi}(x) dx ; (m, n = 1, 2, 3, 4) \quad (18)$$

Thay thế biểu thức trong (12) vào biểu thức (19), sau khi nhân và tích phân, ta sẽ thu được các thành phần của ma trận khối lượng của phần tử thanh có nút liên kết nửa cứng như sau:

$$\begin{aligned} m_{11}^* &= \frac{\rho F \ell}{420} [140 + (42\alpha_{ik}^* - 28\alpha_{ki}^*)\ell + (4\alpha_{ik}^{*2} + 4\alpha_{ki}^{*2} - 6\alpha_{ik}^* \alpha_{ki}^*)\ell^2] \\ m_{22}^* &= \frac{\rho F \ell}{210} [2(\mu_{ik}^2 + \mu_{ki}^2 + \alpha_{ki}^2 \ell^2) + 3(\mu_{ik} \mu_{ki} - m_{ik} \alpha_{ki}^* \ell) - 4\mu_{ki} \alpha_{ki}^* \ell] \ell^2 \\ m_{33}^* &= \frac{\rho F \ell}{420} [140 - (28\alpha_{ik}^* - 42\alpha_{ki}^*)\ell + (4\alpha_{ik}^{*2} + 4\alpha_{ki}^{*2} - 6\alpha_{ik}^* \alpha_{ki}^*)\ell^2] \\ m_{44}^* &= \frac{\rho F \ell}{420} [140\alpha_{ik}^{*2} \ell^2 - 252\alpha_{ik}^* \alpha_{ki}^* \ell^2 + 116\alpha_{ik}^{*2} \ell^2 - 28\ell \alpha_{ik}^* \mu_{ik} + 42\ell \alpha_{ik}^* \mu_{ki}] \ell^2 \\ &\quad + 20\ell \alpha_{ki}^* \mu_{ik} - 36\ell \alpha_{ki}^* \mu_{ki} + 4\mu_{ik}^2 - 6\mu_{ik} \mu_{ki} + 4\mu_{ki}^2 \\ m_{12}^* &= \frac{\rho F \ell^2}{420} [21\mu_{ik} + 14\mu_{ki} - (14\alpha_{ik}^* - 4\alpha_{ik}^* \mu_{ik} - 3\alpha_{ik}^* \mu_{ki} + 3\alpha_{ki}^* \mu_{ik} + 4\alpha_{ki}^* \mu_{ki})\ell] \\ &\quad - (3\alpha_{ik}^* \alpha_{ki}^* - 4\alpha_{ki}^2) \ell^2 \\ m_{13}^* &= \frac{\rho F \ell}{420} [70 - 7(\alpha_{ik}^* + \alpha_{ki}^*)\ell - (4\alpha_{ik}^{*2} + 4\alpha_{ki}^{*2} - 6\alpha_{ik}^* \alpha_{ki}^*)\ell^2] \\ m_{14}^* &= \frac{\rho F \ell}{420} [21\mu_{ik} - 14\mu_{ki} - (21\alpha_{ik}^* - 4\alpha_{ik}^* \mu_{ik} + 3\alpha_{ik}^* \mu_{ki} + 3\alpha_{ki}^* \mu_{ik} - 4\alpha_{ki}^* \mu_{ki})\ell] \\ &\quad - (4\alpha_{ik}^2 - 3\alpha_{ik}^* \alpha_{ki}^*) \ell^2 \\ m_{23}^* &= \frac{\rho F \ell}{420} [14\mu_{ik} + 21\mu_{ki} - (21\alpha_{ki}^* + 4\alpha_{ik}^* \mu_{ik} + 3\alpha_{ik}^* \mu_{ki} - 3\alpha_{ki}^* \mu_{ik} - 4\alpha_{ki}^* \mu_{ki})\ell] \\ &\quad - (4\alpha_{ki}^2 - 3\alpha_{ik}^* \alpha_{ki}^*) \ell^2 \\ m_{24}^* &= \frac{\rho F \ell}{420} [4(m_{ik}^2 - m_{ki}^2) - 4(\alpha_{ik}^* m_{ik} + 3\alpha_{ik}^* m_{ki} + 3\alpha_{ki}^* m_{ik} - 4\alpha_{ki}^* m_{ki})\ell] \\ &\quad + 3\alpha_{ik}^* \alpha_{ki}^* \ell^2 \\ m_{34}^* &= \frac{\rho F \ell}{420} [14m_{ik} - 21m_{ki} - (14\alpha_{ik}^* + 4\alpha_{ik}^* m_{ik} - 3\alpha_{ik}^* m_{ki} - 3\alpha_{ki}^* m_{ik} + 4\alpha_{ki}^* m_{ki})\ell] \\ &\quad + (4\alpha_{ik}^2 - 3\alpha_{ik}^* \alpha_{ki}^*) \ell^2 \end{aligned} \quad (19)$$

Tương tự, ma trận khối lượng của phần tử dầm có nút liên kết nửa cứng có thể viết dưới dạng ngắn gọn như sau:

$$[M_{semi}] = \begin{bmatrix} m_{11}^* & m_{12}^* & m_{13}^* & m_{14}^* \\ m_{21}^* & m_{22}^* & m_{23}^* & m_{24}^* \\ m_{31}^* & m_{32}^* & m_{33}^* & m_{34}^* \\ m_{41}^* & m_{42}^* & m_{43}^* & m_{44}^* \end{bmatrix} \quad (20)$$

Với phần tử dầm 2 đầu nút cứng tại i và k thì $\mu_{ik} = \mu_{ki} = 1$, ma trận khối lượng $[M_{sm}]$ của phần tử dầm có nút liên kết đàn hồi trở thành ma trận khối lượng của phần tử dầm có 2 đầu nút cứng:

$$\lim_{\substack{\mu_{ik} \rightarrow 1 \\ \mu_{ki} \rightarrow 1}} [M_{semi}] = \frac{\rho F \ell}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22\ell & 54 & -13\ell \\ & 4\ell^2 & 13\ell & -3\ell^2 \\ & & 156 & -22\ell \\ & & & 4\ell^2 \end{bmatrix} = [M] \quad (21)$$

symmetrically

3. Ví dụ tính toán

Cho kết cấu khung phẳng có nút liên kết nửa cứng cho phép chuyển vị xoay, có sơ đồ hình học như Hình 6. Thông số vật liệu: $E = 20 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$, tiết diện các thanh dầm C150x75, tiết diện các thanh cột I160x81x5; $l = 4\text{m}$, $h = 3,5\text{m}$. Yêu cầu xác định tần số dao động riêng và chu kỳ dao động của hệ. Khảo sát sự ảnh hưởng của độ cứng nút liên kết đàn hồi tới các thông số dao động của hệ.

Bảng 1. Thông số liên kết đàn hồi

Hệ số hiệu chỉnh: μ_{ik}	0.0001	0.1	0.2	0.3	0.4	0.6	0.7	0.85	0.999
Độ cứng liên kết: R_{ik}	0.129	130.45	269.06	425.77	615.00	1773	1773	3956	64570

Bảng 2: Bảng kết quả thông số dao động của hệ khung có nút liên kết đàn hồi

Hệ số hiệu chỉnh μ_{ik}	Trị riêng λ_i (rd2/s2)			Tần số dao động riêng (rd/s)		
	Dạng 1	Dạng 2	Dạng 3	Dạng 1	Dạng 2	Dạng 3
1 (cứng)	18.765	22.621	610.66	4.62	4.7562	24.71
0.8	18.765	22.6	510.30	4.618	4.701	22.56
0.6	18.764	22.40	450.61	4.615	4.675	21.89
0.4	18.7635	21.34	398.89	4.608	4.621	18.6
0.3	18.763	21.1	320.81	4.606	4.589	17.56
0.1	18.762	20.95	260.63	4.602	4.553	16.32
0 (khớp)	18.762	20.48	225.33	4.60	4.52	15.01

Biết độ cứng liên kết đàn hồi được cho trong bảng 1:

Bảng 3. Bảng so sánh kết quả tính toán giữa phần mềm MathCad và Sap2000

Hệ số hiệu chỉnh μ_{ik}	Tần số dao động riêng dạng thứ nhất ω_1 (rd/s)		
	MathCad	Sap2000	Sai lệch Δ (%)
1 (cứng)	4.62	4.34	6.1
0 (khớp)	4.60	4.33	5.9

Thực hiện phân tích tính toán dao động trên phần mềm Sap2000v14, với các thông số đầu vào cho khung như trong ví dụ tính toán bằng phần mềm lập trình MathCad. Mô hình tính toán được thể hiện như sau:

So sánh kết quả phân tích tính toán từ phần mềm SAP2000v14 với phần mềm MathCad, ta thu được bảng sau:

Từ Bảng 3 thấy rằng, kết quả tính toán theo phần mềm Sap2000v14 và tính toán theo lập trình bằng phần mềm MathCad tương đối trùng khớp thể hiện độ tin cậy của kết quả tính toán, tuy nhiên cũng có sai số nhất định. Điều này có thể lý giải vì khi phân tích dao động, phần mềm Sap2000 đã xét tới ảnh hưởng của lực cắt và độ đàn hồi của nút khung,

còn trong tính toán bằng lập trình MathCad thì phần mềm chỉ sử dụng siêu phần tử bằng lý thuyết dao động của thanh chịu uốn thuần túy.

4. Kết luận

Trong nghiên cứu này đã thiết lập được trình tự tính toán khung thép phẳng có nút liên kết nửa cứng bằng phương pháp phần tử hữu hạn sử dụng phần mềm lập trình MathCad cho phép khảo sát sự ảnh hưởng của độ đàn hồi nút liên kết tới kết quả phân tích tính toán mà không gặp phải những khó khăn về mặt toán học.

Từ kết quả tính toán trong nghiên cứu thấy rằng độ đàn hồi của liên kết ảnh hưởng đáng kể tới các thông số tĩnh và dao động của hệ. Nút có độ cứng liên kết đàn hồi càng cao thì tần số dao động riêng của hệ càng tăng và chu kỳ dao động càng giảm. Kết quả tính toán bằng phần mềm lập trình được so sánh với kết quả tính toán bằng phần mềm Sap2000 đối với 2 trường hợp nút khung là cứng và nút khung là khớp, thể hiện độ tin cậy trong kết quả tính toán. Kết quả tính toán có thể áp dụng để khảo sát giá trị của độ cứng đàn hồi sao cho thu được kết quả thông số dao động phù hợp, từ đó có thể khống chế được hiện tượng cộng hưởng xảy ra đối với hệ kết cấu./.

Tài liệu tham khảo

1. Chen W F, Kishi N, Komuro M. *Semi-rigid connections handbook*. J. Ross Publishing Inc., 2011
2. Vũ Quốc Anh (2002). *Phương pháp tính nội lực và chuyển vị khung thép có xét đến độ đàn hồi của liên kết*. Tuyển tập công trình khoa học Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ VII, tr:45-51.
3. Vũ Quốc Anh (2013). *Tính toán và thiết kế khung thép liên kết đàn hồi*. Nxb Xây Dựng, Hà Nội.
4. Ozturk A U. *Dynamic analysis of semi-rigid connected frames*. Ms.Thesis. Izmir Dokuz Eylul University, 2000.
5. Salatic R and Sekilovic M. *Nonlinear analysis of frames with flexible connections*. *Computers and Structures* 79 pp 1097-1107, 2001.
6. Fu Z, Ohi K, Takanashi K and Lin X. *Seismic behavior of steel frames with semi-rigid connections and braces*. *Journal of Constructional Steel Research* 46 pp 440-61, 1998.
7. Kattner M and Crisinel M. *Finite element modeling of semirigid composite joints*. *J.Computers & Structures* 78 pp 341-53, 2000.
8. Kim S E and Choi S H. *Practical advanced analysis for semirigid space frames*. *J. of Solids and Structures* 38 pp 9111-31, 2001.
9. Lui E M and Lopes A. *Dynamic analysis and response of semi rigid frame*. *Journal of Engineering Structures* 19 pp 644-654, 1997.
10. Ozturk A U and Yesilce Y. *The statical analysis of semi-rigid frames by different connection type*. Izmir Dokuz Eylul University, 2005.
11. Folc R. *Links and connections of precast reinforced buildings, Precast civil engineering structures (Ekonomika, Belgrade in Serbian)* pp 117-67, 1988.
12. Slavko Zdravković, Tomislav Igić, Biljana Mladenović, Dragan Zlatkov, Dragana Turnić. *Static design of systems with semi-rigid connections based on experimental investigation of the full scale structure*. *International Balkans Conference on Challenges of Civil Engineering, EPOKA University, Albania*, pp.2, 2011.
13. Tomislav Igić, Slavko Zdravković, Dragan Zlatkov, Srđan Živković, Nikola Stojić. *Stability design of structures with semi-rigid connections*. *FACTA UNIVERSITATIS. Architecture and Civil Engineering* Vol. 8, No 2, 2010, pp. 261 – 275. DOI: 10.2298/FUACE1002261I