

Điều kiện tồn tại của sóng Rayleigh trong vật liệu Micropolar đẳng hướng

The condition for existence of Rayleigh waves in isotropic micropolar material

Phạm Thị Hà Giang

Tóm tắt

Lý thuyết đàn hồi micropolar hiện nay được sử dụng rộng rãi để mô tả ứng xử cơ học của các vật liệu cấu trúc trong. Để đánh giá các tham số vật liệu, các nhà khoa học giải bài toán ngược từ các phương trình tán sắc dạng hiện mà công thức vận tốc sóng là dạng đơn giản nhất. Công thức vận tốc sóng Rayleigh trong vật liệu micropolar đàn hồi đẳng hướng được đưa ra gần đây bởi Vinh và Giang [1] bằng phương pháp hàm biến phức. Trong bài báo này, các tác giả cũng đã chứng minh sự tồn tại duy nhất của sóng. Tuy nhiên, trong [1] điều kiện tồn tại của sóng Rayleigh chưa được thiết lập. Mục tiêu chính của bài báo là thiết lập điều kiện cần và đủ để tồn tại sóng Rayleigh trong vật liệu micropolar đàn hồi đẳng hướng.

Từ khóa: micropolar, sóng mặt Rayleigh, vận tốc sóng Rayleigh, phương pháp hàm biến phức, điều kiện tồn tại, tính duy nhất

Abstract

Micropolar elastic theory is now widely used to describe mechanical behavior in internal structural materials. To evaluate the material parameters, the scientists solved the inverse problem from the explicit secular equations, of which the formula of velocity is the simplest form. Using the complex function method Vinh and Giang [1] have established the formula for velocity of Rayleigh wave in isotropic micropolar material recently. In addition, the uniqueness of Rayleigh wave is proofed. However, the condition for the existence was not established in [1]. The main purpose of this paper is to establish the necessary and sufficient condition for existence of the Rayleigh wave in elastic micropolar material.

Key words: Rayleigh waves; Rayleigh wave velocity; the complex function method; the existent condition, the uniqueness

TS. Phạm Thị Hà Giang

Bộ môn Cơ học lý thuyết, Khoa Xây dựng

Email: hagiang813@gmail.com

ĐT: 0336904700

Ngày nhận bài: 9/7/2020

Ngày sửa bài: 21/9/2020

Ngày duyệt đăng: 20/12/2022

1. Giới thiệu

Ngày nay, vật liệu có cấu trúc trong (internal structure hay microstructure) xuất hiện ngày càng nhiều trong các ứng dụng thực tế, như vật liệu xốp (porous materials) [2], vật liệu đất gia cường (reinforced soils) [3], hoặc vật liệu hạt nhỏ (granular materials) [4]. Xương (người và động vật) cũng được xem như là vật liệu (tự nhiên) có cấu trúc micropolar trong [5]. Lý thuyết đàn hồi cổ điển không đủ để mô tả ứng xử động học của loại vật liệu này. Để mô tả chuyển động của chúng, Eringen [6, 7] đã đưa ra lý thuyết đàn hồi micropolar. Sử dụng lý thuyết này Eringen [7] nghiên cứu sự lan truyền của sóng Rayleigh trong môi trường đàn hồi micropolar đẳng hướng và phương trình tán sắc (dạng hiện) đã được tìm ra. Công thức vận tốc sóng được thiết lập gần đây bởi Vinh và Giang [1]. Tuy nhiên, trong [1] các tác giả chưa chứng minh sự tồn tại và duy nhất của Sóng Rayleigh trong môi trường micropolar.

Vì vậy, mục tiêu chính của bài báo chứng minh sự tồn tại và duy nhất của sóng Rayleigh trong vật liệu micropolar đẳng hướng. Để thuận lợi cho việc chứng minh, trong bài báo này sẽ trình bày một cách ngắn gọn cách dẫn ra công thức vận tốc sóng.

2. Công thức vận tốc sóng

Phương trình tán sắc đối với vận tốc không thứ nguyên $x = \frac{c^2}{c_T^2}$ (xem [1])

$$(2 + \varepsilon - x)^2 - (2 + \varepsilon)^2 \left(1 - \frac{x}{\frac{1}{\gamma} + \varepsilon}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{x}{1 + \varepsilon}\right)^{1/2} = 0. \quad (1)$$

Trong mặt phẳng phức C , ta xét phương trình

$$f(z) \equiv (2 + \varepsilon - z)^2 + (2 + \varepsilon)^2 \sqrt{z - \left(\frac{1}{\gamma} + \varepsilon\right)} \sqrt{z - (1 + \varepsilon)} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\gamma} + \varepsilon\right)(1 + \varepsilon)}} = 0, \quad (2)$$

trong đó, $\sqrt{z - \left(\frac{1}{\gamma} + \varepsilon\right)}, \sqrt{z - (1 + \varepsilon)}$ được chọn là các nhánh chính của căn thức. Đối với các giá trị thực của $z \in (1 + \varepsilon, \frac{1}{\gamma} + \varepsilon)$ phương trình (2) tương đương với phương trình (1).

Ký hiệu

$$L = [1 + \varepsilon, \frac{1}{\gamma} + \varepsilon], S = \{z \in C, z \notin L\}, N(z_0) = \{z \in S : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$$

với ε là một số dương đủ nhỏ, z_0 là một điểm nào đó trong mặt phẳng phức. Nếu hàm $\Omega \subset C$ là chỉnh hình trong miền $\Omega \subset C$ thì chúng ta viết $\varphi(z) \in H(\Omega)$. Từ phương trình (2) ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 1:

$$f(z) \in H(S)$$

$f(z)$ là hàm bị chặn trong $N(1 + \varepsilon)$ và $N(1 + \varepsilon)$

$$(f_3) \quad f(z) = O(z^2) \text{ khi } |z| \rightarrow \infty.$$

(f_4) $f(z)$ là một hàm liên tục từ bên trái và bên phải của L [8], với các giá trị biên từ bên phải của $f(z)$ là $f^+(z)$ và các giá trị biên từ bên trái của $f(z)$ là $f^-(z)$ được xác định như sau:

$$f^\pm(t) = (2 + \varepsilon - t)^2 \pm i(2 + \varepsilon)^2 \frac{\gamma}{\sqrt{(1 + \varepsilon)(\frac{1}{\gamma} + \varepsilon)}} \frac{(\frac{1}{\gamma} + \varepsilon - t)^{1/2}(t - (1 + \varepsilon))^{1/2}}{\gamma}, t \in L. \quad (3)$$

Xét hàm $g(t)$

$$g(t) = \frac{f^+(t)}{f^-(t)}, t \in L.$$

Hiển nhiên ta thấy từ phương trình trên

$$f^+(t) = g(t)f^-(t), t \in L.$$

Xét hàm $\Gamma(z)$ được định nghĩa như sau

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\log g(t)}{t - z} dt. \quad (4)$$

Mệnh đề 2:

$$(\gamma_1) \Gamma(z) \in H(S)$$

$$\Gamma(\infty) = 0$$

$$(\gamma_3) \Omega_0(z)(\Omega_1(z))$$

với

$$z \in N(1 + \varepsilon), \Gamma(z) = \Omega_1(z)$$

với

$$z \in N(\frac{1}{\gamma} + \varepsilon) \quad \Omega_0(z)(\Omega_1(z))$$

là hàm bị chặn trong $N(1 + \varepsilon)(N(\frac{1}{\gamma} + \varepsilon))$

và có các giá trị hữu hạn tại $z = 1 + \varepsilon(z = \frac{1}{\gamma} + \varepsilon)$.

Để chứng minh được γ_3 ta phải chú ý rằng [8]

$$\log g(1 + \varepsilon) = 0, \log g(\frac{1}{\gamma} + \varepsilon) = 0.$$

Xét hàm $\Phi(z)$ sau:

$$\Phi(z) = \exp \Gamma(z). \quad (5)$$

Mệnh đề 3:

$$(\phi_1) \Phi(z) \in H(S)$$

$$(\phi_2) \Phi(z) \neq 0 \forall z \in S$$

$$(\phi_3) \Phi(z) = O(1) \text{ khi } |z| \rightarrow \infty$$

$$(\phi_4) \Phi(z) = \exp \Omega_0(z)$$

với $z \in N(1 + \varepsilon), \Phi(z) = \exp \Omega_1(z)$

với $z \in N(\frac{1}{\gamma} + \varepsilon)$

Theo công thức Plemelj [8] ta có thể suy ra ngay hàm $\Phi(z)$ thỏa mãn các điều kiện biên:

$$\Phi^+(t) = g(t)\Phi^-(t), t \in L. \quad (6)$$

Bây giờ ta xét hàm

$$P(z) = f(z) / \Phi(z). \quad (7)$$

Trong [1] các tác giả đã chứng minh được $P(z)$ là một đa thức bậc 2

$$P(z) = A_2 z^2 + A_1 z + A_0 \quad (8)$$

Trong đó

$$A_2 = 1, \quad A_1 = I_0 + 4 - 2\varepsilon + \frac{(2 + \varepsilon)^2}{\sqrt{1 + \varepsilon} \sqrt{\frac{1}{\gamma} + \varepsilon}} \quad (9)$$

Với I_0 được tính bởi (11).

Mệnh đề 4:

Phương trình $f(z) = 0 \Leftrightarrow P(z) = 0$ trong miền

$$S \cup \{1 + \varepsilon\} \cup \{\frac{1}{\gamma} + \varepsilon\}$$

Chú ý:

(i) Do tính không liên tục của hàm $f(z)$ trong khoảng $(1 + \varepsilon, \frac{1}{\gamma} + \varepsilon)$

nên phương trình $f(z)=0$ không có nghiệm trong khoảng này. Điều này có nghĩa là nghiệm của phương trình $f(z)=0$ nằm trong miền $S \cup \{1 + \varepsilon\} \cup \{\frac{1}{\gamma} + \varepsilon\}$.

$$(ii) \forall 0 < \Phi(t)^\pm < \infty \forall t \in (1 + \varepsilon, \frac{1}{\gamma} + \varepsilon)$$

nên, theo (i), hai nghiệm của phương trình $P(z)=0$ cũng nằm trong miền $S \cup \{1 + \varepsilon\} \cup \{\frac{1}{\gamma} + \varepsilon\}$.

(iii) Theo mệnh đề 3 thì thay vì tìm nghiệm của phương trình siêu việt $f(z)=0$ ta sẽ tìm nghiệm phương trình bậc hai

$$P(z)=0 \text{ trong miền } S \cup \{1 + \varepsilon\} \cup \{\frac{1}{\gamma} + \varepsilon\}.$$

Phương trình này đơn giản hơn rất nhiều phương trình ban đầu.

Từ các chú ý trên ta đi đến định lý sau:

Định lý: Nếu sóng Rayleigh tồn tại thì nó là duy nhất và bình phương vận tốc không thứ nguyên của nó $x_r = \frac{c^2}{c_2^2}$

được tính bởi công thức sau

$$x_r = 4 + 2\varepsilon - \frac{(2 + \varepsilon)^2}{\sqrt{(1 + \varepsilon)(\frac{1}{\gamma} + \varepsilon)}} - I_0, \quad (10)$$

Trong đó

$$I_0 = \frac{1}{\pi} \int_{1 + \varepsilon}^{1/\gamma + \varepsilon} \theta(t) dt, \quad (11)$$

Và

$$\theta(t) = \text{atan} \frac{(2+\varepsilon)^2 \sqrt{-t + \frac{1}{\gamma} + \varepsilon} \sqrt{t - (1+\varepsilon)}}{(2+\varepsilon-t)^2 \sqrt{\left(\frac{1}{\gamma} + \varepsilon\right)(1+\varepsilon)}}. \quad (12)$$

3. Điều kiện cần và đủ để tồn tại sóng Rayleigh

Mệnh đề 5: $P(z)$ không có nghiệm trong khoảng

$$\left(1 + \varepsilon, \frac{1}{\gamma} + \varepsilon\right)$$

Chứng minh: Giả sử $P(z)$ có nghiệm trong khoảng

$$\left(1 + \varepsilon, \frac{1}{\gamma} + \varepsilon\right).$$

Điều này có nghĩa là tồn tại giá trị

$$z_0 \in \left(1 + \varepsilon, \frac{1}{\gamma} + \varepsilon\right)$$

thỏa mãn $P(z_0)=0$.

Từ (7) suy ra $f(z_0)=0 \Rightarrow f^+(z_0) = f^-(z_0) = 0$.

Điều này là không thể vì hàm $f(z)$ mất liên tục trên đoạn

$$\left(1 + \varepsilon, \frac{1}{\gamma} + \varepsilon\right).$$

Vậy $P(z)$ không có nghiệm trong đoạn $\left(1 + \varepsilon, \frac{1}{\gamma} + \varepsilon\right)$.

Mệnh đề 6: $P(z) \Leftrightarrow f(z) \forall z \in C$.

Chứng minh:

Từ (ϕ_4) , (2) ta có

$$P(1+\varepsilon) \neq 0, P\left(\frac{1}{\gamma} + \varepsilon\right) \neq 0, f(1+\varepsilon) \neq 0, f\left(\frac{1}{\gamma} + \varepsilon\right) \neq 0,$$

$f(z)$ và $P(z)$ đều không có nghiệm trong đoạn $\left(1 + \varepsilon, \frac{1}{\gamma} + \varepsilon\right)$

Kết hợp với mệnh đề 3 ta có $P(z) \Leftrightarrow f(z) \forall z \in C$.

Định lý 2: Điều kiện cần và đủ để tồn tại sóng trong môi trường micropolar là $A_1 < 0$ hay

$$A_1 = I_0 - 4 - 2\varepsilon + \frac{(2+\varepsilon)^2}{\sqrt{1+\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{\gamma} + \varepsilon}} < 0 \quad (13)$$

Chứng minh:

Để chứng minh được định lý trên ta cần chỉ ra

$A_1 < 0$ thì sóng Rayleigh không tồn tại.

$A_1 < 0$ thì sóng Rayleigh tồn tại.

Trường hợp 1: $A_1=0$. Từ định lý Vi-et và $P(0)=0$ ta có $P(z)$ có 2 nghiệm đồng thời bằng 0. Từ mệnh đề 4 ta có $f(z)$ cũng chỉ 2 nghiệm đồng thời bằng 0. Điều này chỉ ra rằng sóng Rayleigh không tồn tại.

Trường hợp 2: $A_1>0$, vì $A_2=1$. Từ định lý Vi-et và $P(0)=0$ ta có $P(z)$ có 2 nghiệm $z_1 = 0, z_2 < 0$. Từ mệnh đề 4 ta có $f(z)$ cũng chỉ 2 nghiệm $z_1 = 0, z_2 < 0$. Theo (2) thì $f(1)>0$ và theo (7) $P(1)>0$. Do vậy $P(1)>0 \Rightarrow 0 < z_2 < 1$. Vậy z_2 chính là nghiệm của phương trình tán sắc tương ứng với sóng Rayleigh $x_r = z_2$ thỏa mãn $0 < x_r < 1$. Điều này chỉ ra rằng sóng Rayleigh tồn tại trong trường hợp này.

Trường hợp 3: $A_1<0$, vì $A_2=1$. Từ định lý Vi-et và $P(0)=0$ ta có $P(z)$ có 2 nghiệm $z_2 > 0, z_2 > 0$. Từ mệnh đề 4 ta có $f(z)$ cũng chỉ 2 nghiệm $z_1 = 0, z_2 > 0$. Theo (2) thì $f(1)>0$ và theo (7) $P(1)>0$. Do vậy $P(1)>0 \Rightarrow 0 < z_2 < 1$. Vậy z_2 chính là nghiệm của phương trình tán sắc tương ứng với sóng Rayleigh $x_r = z_2$ thỏa mãn $0 < x_r < 1$. Điều này chỉ ra rằng sóng Rayleigh tồn tại trong trường hợp này.

4. Kết luận

Trong bài báo [1] các tác giả đã chứng minh được phương trình tán sắc siêu việt tương đương với phương trình đa thức bậc hai $P(z)=0$ trong trường số phức. Bằng việc khảo sát hàm đa thức bậc hai $P(z)$ và sử dụng định lý Vi-et tác giả đã thiết lập được điều kiện cần và đủ để tồn tại sóng Rayleigh trong vật liệu micropolar đẳng hướng./.

Tài liệu tham khảo

1. P.C. Vinh và P.T.H. Giang, "Công thức vận tốc sóng Rayleigh trong bán không gian đàn hồi micropolar", Hội nghị cơ học toàn quốc lần thứ X, pp 1410-1418.
2. R.S. Lakes. "Experimental microelasticity of two porous solids", Int. J. Solids Struct., 22, 1986, 55-63.
3. G. Hassen, P. De Buhan, "A two-phase model and related numerical tool for the design of soil structures reinforced by stiff linear inclusions", Eur. J. Mech. A Solids., 24, 2005, 987-1001.
4. N.P. Krut, "On weak and strong contact force network in granular materials", Int. J. Solids Struct., 92(93), 2016, 135-140.
5. J.F.C. Yang, R.S. Lakes. "Experimental study of micropolar and couple stress elasticity in compact bone in bending", J. Biomech. 15, 1982, 91-98.
6. A.C. Eringen, "Linear theory of micropolar elasticity", J. Math. Mech., 15(6), 1966, 909-923.
7. C. Eringen, Theory of microcontinuum Field theories, Springer, 1999.
8. N.I. Muskhelishvili. Singular integral equations, Noordhoff-Groningen, 1953.