

Tính ổn định hệ thanh phẳng theo phương pháp phần tử hữu hạn trong Matlab

Finite element method for calculating the stability of beam system using matlab software

Nguyễn Vũ Thiêm⁽¹⁾, Phạm Văn Trung⁽²⁾

Tóm tắt

Phương pháp Phần tử hữu hạn (PTHH) là một phương pháp số được áp dụng có hiệu quả để giải các bài toán kết cấu trên máy tính. Đa số các phần mềm tính toán kết cấu hiện nay đều được xây dựng trên cơ sở phương pháp PTHH. Các bài toán tính toán độ bền và độ cứng bằng phương pháp PTHH đã được trình bày rất nhiều và khá chi tiết, song bài toán tính độ ổn định của hệ kết cấu theo phương pháp PTHH còn hạn chế. Tác giả đã xây dựng thành công ma trận độ cứng của các phần tử chịu uốn cộng kéo (nén) và ma trận độ cứng của cả hệ kết cấu. Bằng cách lập trình tính toán trong Matlab, tác giả đã giải quyết hai bài toán tính ổn định của khung 1 tầng nhíp chịu một tải trọng và nhiều tải trọng. Bài toán khung chịu một tải trọng có kết quả $P_{th}=7.7856EI/L^2$ trùng khớp với ví dụ 3.1 trong giáo trình cho thấy độ tin cậy của phương pháp tính. Bài toán khung chịu nhiều tải trọng có kết quả $P_{th}=3.4438EI/L^2$ cho thấy khả năng tính toán của phương pháp.

Từ khóa: ổn định, phương pháp phần tử hữu hạn, hệ thanh phẳng, Matlab

Abstract

Finite element method is a numerical method that is effectively applied to the structural problem solution on computers. Most of the current structural calculation software is built on the basis of finite element method. Many calculating problems for structural strength and stiffness have been presented in detail. However, there is a limitation of calculating problems for the stability of structural systems by finite element method. The author has successfully built the stiffness matrix of the elements subjected to flexural plus tensile (compression) and the stiffness matrix of the whole structural system. By computational programming in Matlab, the author has solved two stability problems of single-storey single-span frame bearing one load and many loads. The one-load bearing frame problem has the result $P_{th}=7.7856EI/L^2$ coincides with example 3.1 in the textbook showing the reliability of the calculation method. The problem of the frame bearing many loads with the result $P_{th}=3.4438EI/L^2$ shows the computational ability of the method.

Key words: stability, finite element method, beam system, Matlab

1. Tổng quan

Phương pháp Phần tử hữu hạn (PTHH) là một phương pháp số được áp dụng có hiệu quả để giải các bài toán kết cấu trên máy tính. Đa số các phần mềm tính toán kết cấu hiện nay đều được xây dựng trên cơ sở phương pháp PTHH. Các bài toán tính toán độ bền và độ cứng bằng phương pháp PTHH đã được trình bày rất nhiều và khá chi tiết, song bài toán tính độ ổn định của hệ kết cấu theo phương pháp PTHH còn hạn chế. Các phương trình ổn định là các phương trình siêu việt rất phức tạp khó có lời giải chính xác bằng thủ công. Trong nghiên cứu này nhóm tác giả trình bày nội dung phương pháp PTHH tính ổn định hệ thanh phẳng và lập trình tính toán bằng phần mềm Matlab.

1.1. Nội dung phương pháp PTHH tính ổn định hệ thanh phẳng

Xét phần tử thanh lăng trụ trong hệ tọa độ địa phương như hình 1, Các độ cứng của thanh là EA và EI không thay đổi, chiều dài thanh là L, chịu lực nén P với quy ước chiều dương và thứ tự tọa độ như hình 1a.

Gọi: $\{\delta\}_i$ - Là ma trận chuyển vị nút của phần tử thứ i, đây là ma trận cột kích thước 6×1 , biểu thị chuyển vị nút của phần tử thứ i.

$$\{\delta\}_i = \{u_j \quad v_j \quad \varphi_j \quad u_k \quad v_k \quad \varphi_k\}_i^T = \{\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3 \quad \delta_4 \quad \delta_5 \quad \delta_6\}_i^T \quad (1)$$

$\{F\}_i$ - Là ma trận ứng lực nút của phần tử thứ i, đây là ma trận cột kích thước 6×1 , biểu thị ứng lực nút của phần tử thứ i.

$$\{F\}_i = \{F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad F_4 \quad F_5 \quad F_6\}_i^T \quad (2)$$

Trong đó:

δ_1 ; F_1 và δ_4 ; F_4 - chuyển vị thẳng và ứng lực nút tương ứng theo phương trục x tại nút đầu trái và đầu phải của phần tử i theo chiều dương của trục x.

δ_2 ; F_2 và δ_5 ; F_5 - chuyển vị thẳng và ứng lực nút tương ứng theo phương trục y tại nút đầu trái và đầu phải của phần tử i theo chiều dương của trục y.

δ_3 ; F_3 và δ_6 ; F_6 - chuyển vị xoay và ứng lực nút tương ứng theo phương trục z tại nút đầu trái và đầu phải của phần tử i theo chiều dương của trục z được biểu thị bằng mũi tên kép.

Từ điều kiện cân bằng và động học ta có:

$$\begin{aligned} F_1 &= P; & F_4 &= -P; & e &= -(\delta_4 - \delta_1); \\ F_2 &= -\frac{M_A + M_B}{L}; & F_5 &= \frac{M_A + M_B}{L}; & \theta_A &= \delta_3 + \frac{\delta_5 - \delta_2}{L}; \\ F_3 &= M_A; & F_6 &= M_B; & \theta_B &= \delta_6 + \frac{\delta_5 - \delta_2}{L}; \end{aligned} \quad (3)$$

Các mối liên hệ (3) có thể viết dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ M_A \\ M_B \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} e \\ \theta_A \\ \theta_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & 1 & 0 & \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

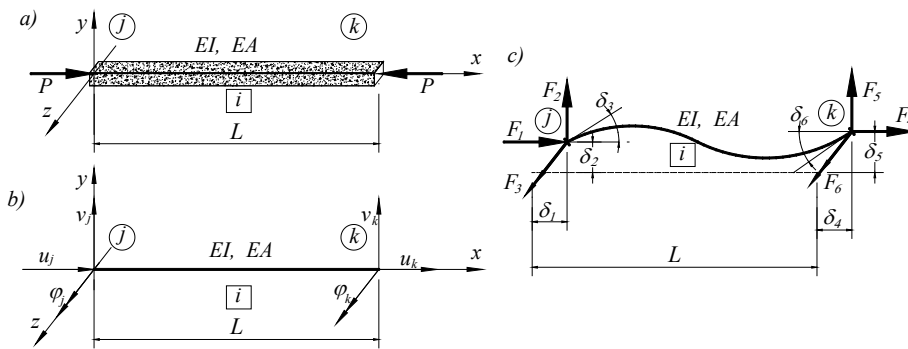
⁽¹⁾ ThS, Giảng viên, khoa Xây dựng, ĐH Kiến trúc Hà Nội, Email: <thiemnv@hau.edu.vn>

⁽²⁾ TS, Giảng viên chính, khoa Xây dựng, ĐH Kiến trúc Hà Nội, Email: <trungpv@hau.edu.vn>

Ngày nhận bài: 30/7/2022

Ngày sửa bài: 05/8/2022

Ngày duyệt đăng: 22/5/2023



Hình 1. Mô hình phân tử thanh hai đầu ngàm

Phương trình (4) có mối liên hệ với nhau như sau:

$$P = \frac{EA}{L}e; \quad M_A = \frac{EI}{L}(s_{ii}\theta_A + s_{ij}\theta_B); \quad M_B = \frac{EI}{L}(s_{ji}\theta_A + s_{jj}\theta_B) \quad (5)$$

Trong đó: s_{ii} ; s_{ij} ; s_{ji} ; và s_{jj} là các hàm ổn định được tính theo [8]

$$s_{ii} = s_{jj} = c_{11} \frac{L}{EI} = c_{22} \frac{L}{EI} = \frac{v \sin v - v^2 \cos v}{2 - \cos v - v \sin v}; \quad s_{ij} = s_{ji} = c_{12} \frac{L}{EI} = c_{21} \frac{L}{EI} = \frac{v^2 - v \sin v}{2 - \cos v - v \sin v} \quad (6)$$

Với $c_{11}, c_{22}, c_{12} = c_{21}$ là các hàm siêu việt

$$c_{11} = c_{22} = \frac{EI}{L} \left[\frac{v \sin v - v^2 \cos v}{2 - \cos v - v \sin v} \right]; \quad c_{12} = c_{21} = \frac{EI}{L} \left[\frac{v^2 - v \sin v}{2 - \cos v - v \sin v} \right]; \quad (7)$$

Công thức (5) là các liên hệ: lực dọc trục P với chuyển vị dọc trục e của cấu kiện; Mô men đầu thanh với chuyển vị xoay đầu thanh. Đặt phương trình (5) ở dạng ma trận, ta có:

$$\begin{Bmatrix} P \\ M_A \\ M_B \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} A/I & 0 & 0 \\ 0 & s_{ii} & s_{ij} \\ 0 & s_{ji} & s_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e \\ \theta_A \\ \theta_B \end{Bmatrix}; \quad (8)$$

Thay thế phương trình (8) thành phương trình (4), và sau đó thay thế vào phương trình kết quả, chúng ta có liên hệ các lực tác dụng tại đầu phần tử với các chuyển vị tại đầu phần tử là:

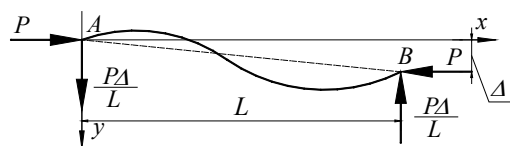
$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix}_\theta = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} A/I & 0 & 0 & -A/I & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s_{ii} + s_{jj}}{0.5L^2} & -\frac{(s_{ii} + s_{jj})}{L} & 0 & -\frac{s_{ii} + s_{jj}}{0.5L^2} & -\frac{s_{ii} + s_{jj}}{L} \\ 0 & -\frac{s_{ii} + s_{jj}}{L} & s_{ii} & 0 & \frac{s_{ii} + s_{jj}}{L} & s_{ij} \\ -A/I & 0 & 0 & A/I & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{s_{ii} + s_{jj}}{0.5L^2} & -\frac{s_{ii} + s_{jj}}{L} & 0 & \frac{s_{ii} + s_{jj}}{0.5L^2} & \frac{s_{ii} + s_{jj}}{L} \\ 0 & -\frac{s_{ii} + s_{jj}}{L} & s_{ij} & 0 & \frac{s_{ii} + s_{jj}}{L} & s_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix}; \quad (9)$$

Ta có thể viết gọn phương trình (9) như sau:

$$\{F\}_\theta = [K]_\theta \{\delta\}; \quad (9^*)$$

Trong đó chỉ số con θ được sử dụng ở đây chỉ ra rằng ta mới kể đến chuyển vị xoay ở đầu thanh. Nếu kể đến chuyển vị thẳng ở hai đầu thanh, tương ứng một lực cắt bổ sung bằng PA/L với Δ cho trước hình 2:

$$\Delta = \delta_2 - \delta_5. \quad (10)$$



Hình 2. Mô hình phân tử thanh chịu chuyển vị tương đối đầu thanh.

Chúng ta có thể liên hệ lực cắt bổ sung này cho ma trận độ cứng như sau:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P/L & 0 & 0 & P/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P/L & 0 & 0 & -P/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix}; \quad (11)$$

Ta có thể viết gọn phương trình (11) như sau:

$$\{F\}_\Delta = [K]_\Delta \{\delta\}; \quad (12)$$

Bằng cách kết hợp phương trình (9*) và phương trình (12), ta thu được mối quan hệ lực chuyển vị đầu thanh là:

$$\{F\} = [K] \{\delta\}. \quad (13)$$

Trong đó:

$$\{F\} = \{F\}_\theta + \{F\}_\Delta; \quad [K] = [K]_\theta + [K]_\Delta. \quad (14)$$

Với $[K]$ là ma trận độ cứng PT thanh hai đầu ngàm chịu uốn có kể đến ảnh hưởng của lực nén hoặc kéo.

$$[K] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} A/I & 0 & 0 & -A/I & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2s_{ii} + 2s_{ij} - v^2}{L^2} & \frac{-s_{ii} - s_{ij}}{L} & 0 & \frac{2s_{ii} - 2s_{ij} + v^2}{L^2} & \frac{-s_{ii} - s_{ij}}{L} \\ 0 & \frac{-s_{ii} - s_{ij}}{L} & s_{ii} & 0 & \frac{s_{ii} + s_{ij}}{L} & s_{ij} \\ -A/I & 0 & 0 & A/I & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-s_{ii} + s_{ij}}{0.5L^2} & \frac{-s_{ii} + s_{ij}}{L} & 0 & \frac{2s_{ii} + 2s_{ij} - v^2}{L^2} & \frac{s_{ii} + s_{ij}}{L} \\ 0 & \frac{-s_{ii} - s_{ij}}{L} & s_{ij} & 0 & \frac{s_{ii} + s_{ij}}{L} & s_{ii} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Bằng cách đặt các hàm Φ_i ($i=1, 2, 3$ và 4) [8]. Thay thế các biểu thức cho các hàm ổn định (s_{ii}, s_{ij}) trong phương trình (15) và đơn giản hóa, ta thu được:

$$[K] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} A/I & 0 & 0 & -A/I & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{L^2} \Phi_1 & -\frac{6}{L} \Phi_2 & 0 & -\frac{12}{L^2} \Phi_1 & -\frac{6}{L} \Phi_2 \\ 0 & -\frac{6}{L} \Phi_2 & 4\Phi_3 & 0 & \frac{6}{L} \Phi_2 & 2\Phi_3 \\ -A/I & 0 & 0 & A/I & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{L^2} \Phi_1 & \frac{6}{L} \Phi_2 & 0 & \frac{12}{L^2} \Phi_1 & \frac{6}{L} \Phi_2 \\ 0 & -\frac{6}{L} \Phi_2 & 2\Phi_3 & 0 & \frac{6}{L} \Phi_2 & 4\Phi_3 \end{bmatrix}; \quad (16)$$

1.2. Các ma trận độ cứng của phần tử chịu uốn cùng nén (kéo)

Phần tử hai đầu ngàm

Các hàm Φ_i ($i=1, 2, 3$ và 4) được khai triển dưới dạng chuỗi Taylor. Nếu chỉ lấy đến số hạng thứ 2 trong khai triển Taylor, ma trận độ cứng (15) được viết lại như sau:

$$[K] = [K]_B + [K]_P; \quad (17)$$

Trong đó: $[K]_B$ là ma trận độ cứng đàn hồi tuyến tính như ma trận độ cứng phần tử khi tính toán độ bền, $[K]_P$ là ma trận độ cứng có xét đến ảnh hưởng của lực dọc trục thanh P tới độ cứng chống uốn của phần tử:

$$[K]_{NN} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} A/I & 0 & 0 & -A/I & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & 0 & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ 0 & -\frac{6}{L} & 4 & 0 & \frac{6}{L} & 2 \\ -A/I & 0 & 0 & A/I & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & 0 & \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ 0 & -\frac{6}{L} & 2 & 0 & \frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix} \mp \frac{P}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} & 0 & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} & 0 & \frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Phần tử đầu ngàm - đầu khớp và phần tử đầu khớp - đầu ngàm

Thực hiện tương tự cho phần tử đầu ngàm - đầu khớp ta có:

$$[K]_{NK} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} A/L & 0 & 0 & -A/L & 0 \\ 0 & \frac{3}{L^2} & \frac{3}{L} & 0 & -\frac{3}{L^2} \\ 0 & \frac{3}{L} & 3 & 0 & -\frac{3}{L} \\ -A/L & 0 & 0 & A/L & 0 \\ 0 & -\frac{3}{L^2} & -\frac{3}{L} & 0 & \frac{3}{L^2} \end{bmatrix} \mp \frac{P}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{L}{5} & 0 & -\frac{6}{5} \\ 0 & \frac{L}{5} & \frac{L^2}{5} & 0 & -\frac{L}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{L}{5} & 0 & \frac{6}{5} \end{bmatrix}; \quad (19)$$

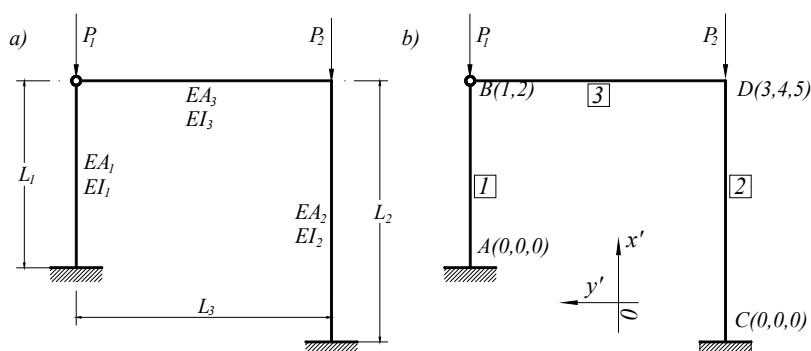
Thực hiện tương tự cho phần tử đầu khớp - đầu ngàm ta có:

$$[K]_{KN} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} A/L & 0 & -A/L & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{L^2} & 0 & -\frac{3}{L^2} & \frac{3}{L} \\ -A/L & 0 & A/L & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{L^2} & 0 & \frac{3}{L^2} & -\frac{3}{L} \\ 0 & \frac{3}{L} & 0 & -\frac{3}{L} & 3 \end{bmatrix} \mp \frac{P}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{L}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{L}{5} \\ 0 & \frac{L}{5} & 0 & -\frac{L}{5} & \frac{L^2}{5} \end{bmatrix} \quad (20)$$

2. Nghiên cứu lập trình tính toán trong Matlab

2.1. Tóm tắt giải bài toán hệ thanh theo phương pháp PTHH

Xây dựng phương trình ổn định cho hệ kết cấu khung chịu lực như hình 3a bằng phương pháp PTHH.



Hình 3. Sơ đồ tính và sơ đồ rời rạc hóa hệ kết cấu.

Bước 1. Rời rạc hệ kết cấu.

Bước 2. Lập bảng mã có xử lý điều kiện biên.

Bước 3. Vector chuyển vị nút của toàn bộ kết cấu $\{\delta^*\}$.

TT	PHẦN TỬ	α	Mã cục bộ					
			1	2	3	4	5	6
			Mã tổng thể					
1	AC 	0°	0	0	0	1	2	
2	CD 	0°	0	0	0	3	4	5
3	BD 	-90°	1	2	3	4	5	

$$\{\delta^*\} = \{u_C \quad v_C \quad u_D \quad v_D \quad \varphi_D\}^T$$

$$= \{\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3 \quad \delta_4 \quad \delta_5\}^T \quad (21)$$

Bước 4. Thiết lập ma trận độ cứng của toàn hệ.

Với cách chọn hệ tọa độ chung như hình vẽ ta có: PT1 và PT2 có trục x song song với trục x', nên không cần phải xoay trục. Phần tử 2 có trục x vuông góc với trục x' nên phải xoay trục, hơn nữa thanh này không chịu nén nên việc xoay trục cũng đơn giản.

- Thiết lập ma trận độ cứng của từng phần tử trong hệ tọa độ địa phương.

Phần tử số 1: Đầu ngàm – đầu khớp, Chịu lực nén P_1 ; Độ cứng EI_1 ; EA_1 ; Chiều dài L_1 . Thông số ổn định $v_1 = v$, áp dụng công thức (19) ta có ma trận độ cứng của phần tử 1.

Phần tử số 2: hai đầu ngàm, Chịu lực nén P_2 ; Độ cứng EI_2 ; EA_2 ; Chiều dài L_2 . Thông số ổn định $v_2 \neq v$, áp dụng công thức (18) ta có ma trận độ cứng của phần tử 2.

Phần tử số 3: Đầu khớp – đầu ngàm, không chịu lực nén; Độ cứng EI_3 ; EA_3 ; Chiều dài L_3 . Dùng ma trận độ bền ta có K_3 .

- Thiết lập ma trận độ cứng của cả hệ kết cấu trong hệ tọa độ chung.

Ghép nối các ma trận theo chỉ số hoặc theo ma trận định

vị ta có ma trận độ cứng của hệ kết cấu có xét đến ảnh hưởng của lực dọc trục thanh.

Bước 5. Giải phương trình ổn định, tìm lực tới hạn.

Trong phương trình ổn định có đại lượng P. Cách giải tốt nhất là đổi biến:

$$P = \lambda \frac{EI}{L^2} \quad (22)$$

Thay vào giải phương trình ta được λ từ đó ta có Pth

$$P_{th} = \lambda \frac{EI}{L^2}, \quad (23)$$

2.2. Sơ đồ khối (như hình 4)

2.3. Thuật toán

- Số liệu đầu vào:

Đặc trưng động lực học hệ kết: Số nút; Số phần tử; Chiều dài phần tử; Độ cứng phần tử; Liên kết hai đầu phần tử...

Số thanh chịu nén, thông số ổn định từng thanh.

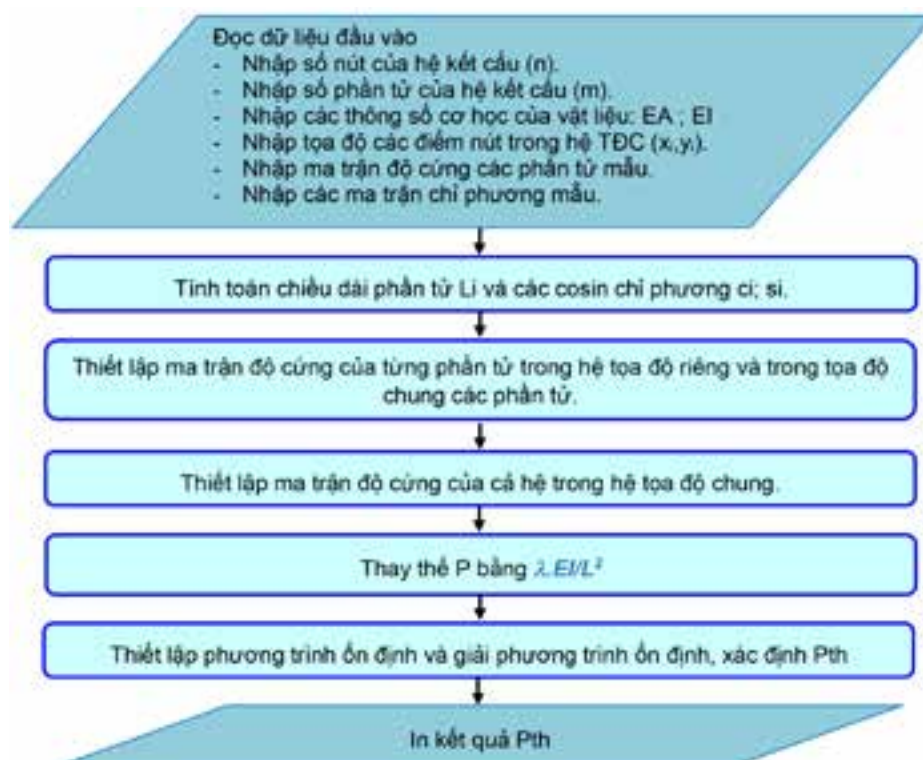
- Số liệu đầu ra:

Thông số ổn định, Lực tới hạn.

Bước 1: Chuẩn bị số liệu của bài toán:

Khai báo thông số ổn định (Biến số của bài toán)

Khai báo các hằng số của bài toán (số liệu đã cho)



Hình 4. Sơ đồ khối lập trình tính toán

Bước 2: Thiết lập ma trận độ cứng của cả hệ kết cấu.

Thiết lập ma trận độ cứng phần tử trong hệ tọa độ riêng và hệ tọa độ chung.

Ghép nối các ma trận độ cứng của cả hệ kết cấu.

Bước 3: Thiết lập phương trình ổn định.

Bước 4: Giải phương trình ổn định.

2.4. Chương trình

syms P x EI; L=6; EA=108*EI/L^2;

KB1=[EA/EI 0 0 -EA/EI 0; 0 3/L^2 3/L 0 -3/L^2; 0 3/L 3 0 -3/L; -EA/EI 0 0 EA/EI 0; 0 3/L^2 -3/L 0 3/L^2];

KP1=(x/L^2)*[0 0 0 0; 0 6/5 L/5 0 6/5; 0 L/5 L^2/5 0 -L/5; 0 0 0 0; 0 -6/5 -L/5 0 6/5];

KB2=[EA/EI 0 -EA/EI 0; 0 3/L^2 0 -3/L^2 3/L; -EA/EI 0 EA/EI 0; 0 3/L^2 0 3/L^2 -3/L; 0 3/L 0 -3/L 3];

KB3=[EA/EI 0 0 -EA/EI 0; 0 12/L^2 6/L 0 -12/L^2 6/L; 0 6/L 4 0 -6/L 2; -EA/EI 0 0 EA/EI 0; 0 -12/L^2 -6/L 0 12/L^2 -6/L; 0 6/L 2 0 -6/L 4]; KP3=(1.44*x/L^2)*[0 0 0 0; 0 6/5 L/10 0 -6/5 L/10; 0 L/10 2*L^2/15 0 -L/10 -L^2/30; 0 0 0 0; 0 -6/5 -L/10 0 6/5 -L/10; 0 L/10 -L^2/30 0 L/10 L^2/30];

T2=[0 -1 0 0; 1 0 0 0; 0 0 0 -1; 0 0 1 0; 0 0 0 0 1]; H1=[0 0 0 0; 0 0 0 0; 0 0 0 0; 1 0 0 0; 0 1 0 0]; H3=[0 0 1 0; 0 0 0 1; 0 0 0 0; 1 0 0 0; 0 0 0 0]; K11=(H1.'*KB1*H1; K12=(H1.'*KP1*H1; K21=(T2.'*KB2*T2; K31=(H3.'*KB3*H3; K32=(H3.'*KP3*H3; KB=K11+K21+K31; KP=K12+K32; KK=KP-KB; y=det(KK)

3. Ví dụ tính toán

3.1. Bài toán 1. Xác định lực tới hạn tác dụng lên hệ kết cấu cho như hình 5a

Rời rạc hệ kết cấu và đánh số PT như hình 5b. Áp dụng chương trình tính. Đặt $P=\lambda \cdot EI/L$;

Thay vào và rút gọn ta được phương trình ổn định

$$(8957\lambda)/1296 - 139429/2592=0;$$

$$\rightarrow \lambda = 7.785599356395816$$

$$\rightarrow P_{th} = \lambda \frac{EI}{L^2} = 7.785599 \frac{EI}{L^2}.$$

3.2. Bài toán 2. Xác định lực tới hạn tác dụng lên hệ kết cấu cho như hình 6a

Rời rạc hệ kết cấu và đánh số PT như hình 5b. Áp dụng chương trình tính.

Đặt $P=\lambda \cdot EI/L$; Với $k_1 = \dots$

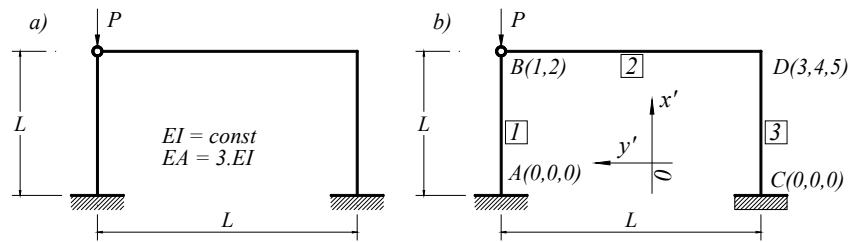
Thay vào và rút gọn ta được phương trình ổn định

$$(137\lambda^3)/50000 - (294451\lambda^2)/540000 + (707353\lambda)/40500 - 139429/2592=0$$

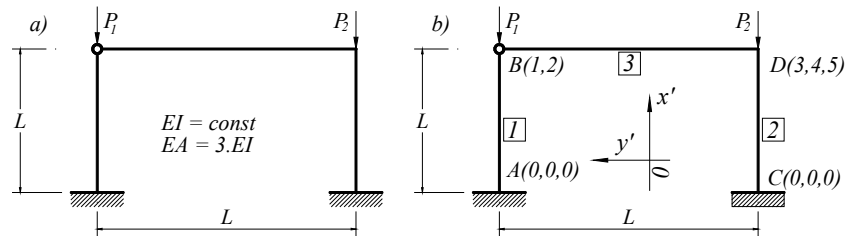
Giải phương trình trên ta có nghiệm nhỏ nhất

$$\lambda = 3.443750619$$

$$P_{th} = \lambda \frac{EI}{L^2} = 3.443750 \frac{EI}{L^2}.$$



Hình 5. Sơ đồ tính và sơ đồ rời rạc hóa bài toán 1



Hình 6. Sơ đồ tính và sơ đồ rời rạc hóa bài toán 2

4. Kết luận và khuyến nghị

Nhóm tác giả đã xây dựng thành công các ma trận độ cứng của phần tử thanh chịu uốn cùng nén (kéo) trong trường hợp tổng quát và các trường hợp riêng.

Nhóm tác giả đã xây dựng thuật toán, sơ đồ khối và lập trình tính toán bài toán ổn định của hệ thanh phẳng theo phương pháp PTHH trong matlab.

Vận dụng chương trình của nhóm tác giả tính toán bài toán 1 ($P_{th}=7.785599EI/L^2$) và so sánh với kết quả trình bày trong giáo trình (ví dụ 3.1 [3] trang 98 $P_{th}=7.78 EI/L^2$) cho thấy độ tin cậy của phương pháp mà nhóm rtacs giả đề xuất.

Trong báo cáo còn trình bày thêm kết quả tính toán bài toán 2 có độ phức tạp hơn bài toán 1 (vì có nhiều thanh chịu nén với các thông số ổn định v khác nhau) cũng cho kết quả tin cậy cao.

Với kết quả nghiên cứu trên, nhóm tác giả khuyến nghị đưa nghiên cứu này vào bài giảng cho hệ đào tạo trình độ Đại học và Sau Đại học cũng như các nghiên cứu khoa học khác..

Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Hoàng Hải, Nguyễn Việt Anh. Lập trình Matlab và ứng dụng. NXB KHK, 2015.
2. Trần Quang Khánh, Giáo trình cơ sở Matlab ứng dụng. NXB KHK, 2015.
3. Lê Thọ Trình, Đỗ Văn Bình. Ổn định công trình. NXB KHK, 2005.
4. Trần Ích Thịnh, Ngô Như Khoa, Phương pháp phần tử hữu hạn lý thuyết và bài tập. NXB KHK, Hà Nội, 2007.
5. Nguyễn Trâm, Trần Quốc Ca. Phương Pháp Phần Tử Hữu Hạn Và Các Ứng Dụng Trong Tính Toán Kỹ Thuật. NXB Xây dựng, 2010.
6. Nguyễn Thời Trung, Nguyễn Xuân Hùng. Phương pháp phần tử hữu hạn sử dụng matlab. NXB Xây dựng, 2015.
7. Japan Road Association. The Specifications of Railing Design. Maruzen Press, Tokyo, Japan, 2004.
8. Chen W. F., Lui E. M. Structural Stability – Theory and implementation. Elsevir Publishing Co, America, 1987.