

Sử dụng phần mềm lập trình MathCad giải bài toán xác định trạng thái ứng suất biến dạng trong Cơ học môi trường liên tục

Determining the stress tensor – the strain tensor in Continuum mechanics using MathCad

Nguyễn Thị Thùy Liên

Tóm tắt

MathCad là một chương trình tính toán đa năng, dễ tiếp cận và sử dụng. Chương trình MathCad được sử dụng rộng rãi và hiệu quả trong giảng dạy các môn học kỹ thuật bậc đại học. Trong bài báo, tác giả giới thiệu về việc sử dụng MathCad để xác định trạng thái ứng suất- trạng thái biến dạng trong Cơ học môi trường liên tục.

Từ khóa: Cơ học môi trường liên tục, MathCad

Abstract

MathCad is a computer software program, which is versatile, easy to use, and accessible. That program has been widely and intensively used in teaching various areas of Engineering at the university level. In the paper, the author presents the use of the MathCad program in determining the stress tensor – the strain tensor in Continuum mechanics.

Key words: Continuum mechanics, MathCad

1. Đặt vấn đề

Lý thuyết xây dựng trong Cơ học môi trường liên tục là lý thuyết tổng quát để giải các dạng kết cấu khác nhau, là phương pháp chung để giải các bài toán trong cơ học. Vì vậy, cách đặt vấn đề về mặt toán học trong môn học này là chặt chẽ và chính xác hơn so với các môn học như Sức bền vật liệu, Cơ học kết cấu v.v... Nội dung giảng dạy của môn học trên được chia thành hai phần: cơ sở lý thuyết; áp dụng lý thuyết để phân tích và giải các bài toán cụ thể.

Có nhiều loại bài toán trong Cơ học môi trường liên tục. Trong đó, bài toán xác định trạng thái ứng suất- trạng thái biến dạng cho biết khả năng chịu lực và biến dạng tại các điểm trong môi trường, là cơ sở cho việc tính toán, thiết kế các cấu kiện trong các môn học chuyên ngành. Tuy nhiên, bài toán vẫn được giải bằng phương pháp “thủ công”, sinh viên mất nhiều thời gian vào các thao tác toán học phức tạp mà đôi khi quên mất bản chất cơ học của bài toán.

Hiện nay có rất nhiều phần mềm hỗ trợ lập trình giải các bài toán cơ học công trình như Matlab, MathCad... Việc sử dụng các phần mềm này vào việc lập trình giải các bài toán cơ học công trình đã được đưa vào chương trình giảng dạy của nhiều trường đại học trên thế giới. Đặc điểm của các phần mềm này là không quá khó sử dụng như các ngôn ngữ lập trình chuyên nghiệp. Trình tự lập trình giải các bài toán cho phép người học hiểu rõ bản chất cơ học của bài toán.

Trong bài báo dưới đây, tác giả sẽ ứng dụng phần mềm lập trình Mathcad để xác định trạng thái ứng suất – trạng thái biến dạng trong môi trường. Qua bài toán ứng dụng này để thấy rõ, việc áp dụng các phần mềm hỗ trợ lập trình vào việc phân tích và giải các bài toán là cần thiết, đúng với xu hướng phát triển của khoa học kỹ thuật hiện đại, là tiền đề cho việc đổi mới phương pháp và nội dung giảng dạy môn Cơ học môi trường liên tục.

2. Một số thiết lập cơ bản trong Mathcad được dùng trong bài toán

2.1. Nhập phương trình theo dấu phương trình gán giá trị (:=)

Dấu phương trình gán giá trị (:=) dùng để gán các giá trị cho các biến mà sẽ dùng trong các công thức sau đó, có thể được thể hiện trong ví dụ như trên hình 1.

2.2. Sử dụng hàm Given/Find để giải phương trình và hệ phương trình tuyến tính hoặc phi tuyến với nhiều ẩn số khác nhau.

Khi dùng hàm này để giải phương trình, thì yêu cầu là phải cho trước các giá trị gần đúng ban đầu của các biến số, vì nghiệm của hệ được xác định theo hàm này bằng phương pháp nội suy. Áp dụng hàm Given/Find trong việc giải phương trình và hệ phương trình thường được tiến hành theo các bước như sau:

$$\begin{aligned}x &:= 3 \\ y &:= 5 \\ x^2 + y^2 &= 34\end{aligned}$$

Hình 1. Ví dụ về dấu “=” gán giá trị

$$\begin{aligned}x &:= 1 & y &:= 1 & z &:= 1 \\ \text{Given} \\ 2x + y^2 - 3z &= 5 \\ x^2 + 3y + z &= 0 \\ x + y + 3z &= 1 \\ \text{Nghiệm} &:= \text{Find}(x, y, z) & \text{Nghiệm} &= \begin{pmatrix} 1.9 \\ -1.241 \\ 0.114 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Hình 2. Ví dụ giải hệ phương trình bằng hàm Given/Find

ThS. Nguyễn Thị Thùy Liên

Bộ môn Sức bền vật liệu – Cơ học kết cấu,
Khoa Xây dựng

Email: thuylienxd@gmail.com

ĐT: 0913800661

Ngày nhận bài: 17/5/2021

Ngày sửa bài: 28/5/2021

Ngày duyệt đăng: 22/5/2023

- Cho trước các giá trị gần đúng ban đầu của các biến số;
- Gõ lệnh Given;
- Nhập các phương trình và hệ phương trình phía bên phải hoặc phía dưới lệnh Given. Dấu "=" đậm có thể chọn bằng tổ hợp phím Ctrl+= hoặc từ thanh công cụ có sẵn trên màn hình;

- Nhập biểu thức chứa hàm Find để xác định nghiệm phương trình hoặc hệ phương trình: Find($x_1, x_2, x_3, \dots$) với $x_1, x_2, x_3, \dots$ là các biến số. Số lượng biến số phải bằng số phương trình. Ví dụ giải phương trình được thể hiện như trên hình 2.

2.3. Ma trận và véc tơ

- Đánh số các thành phần trong ma trận

Trật tự việc đánh số các thành phần trong ma trận được quản lý bằng biến có sẵn trong hệ thống (built-in variable) ORIGIN. Theo mặc định của chương trình ORIGIN=0, điều đó có nghĩa là thành phần đầu tiên của ma trận được đánh số 0. Tuy nhiên người sử dụng có thể quy định trật đánh số các thành phần trong ma trận bắt đầu từ một số bất kỳ.

$$D1 := \begin{pmatrix} a1 & a2 & a3 \\ b1 & b2 & b3 \\ c1 & c2 & c3 \end{pmatrix} \quad D2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Hình 3. Ví dụ nhập các phần tử trong ma trận

- Thiết lập ma trận

Cách đơn giản nhất để tạo ma trận hay véc tơ (ma trận có một cột) là tạo một mảng trống sau đó nhập các phần tử vào trong ma trận như sau:

- Đặt tên ma trận và nhập toán tử gán giá trị (:=)

$D :=$

- Chọn từ menu Insert ► Matrix hoặc từ thanh công cụ để tạo mảng số trống với số hàng (rows) và cột (columns) do người sử dụng định nghĩa.

$$D := \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

- Nhập giá trị bằng số hoặc ký tự (symbolic) vào trong mảng số đã tạo lập như trên hình 3.

- Các phép tính cơ bản của ma trận

MathCad cho phép thực hiện tất cả các phép tính cơ bản, chuyển trí, nghịch đảo, xác định định thức, tìm trị riêng và véc tơ trị riêng... cho ma trận dưới dạng số và Symbolics. Khi thực hiện các phép tính của ma trận cần lưu ý các ma trận phải có kích thước tương thích.

3. Bài toán xác định trạng thái ứng suất- trạng thái biến dạng trong Cơ học môi trường liên tục

Nội dung của bài toán bao gồm:

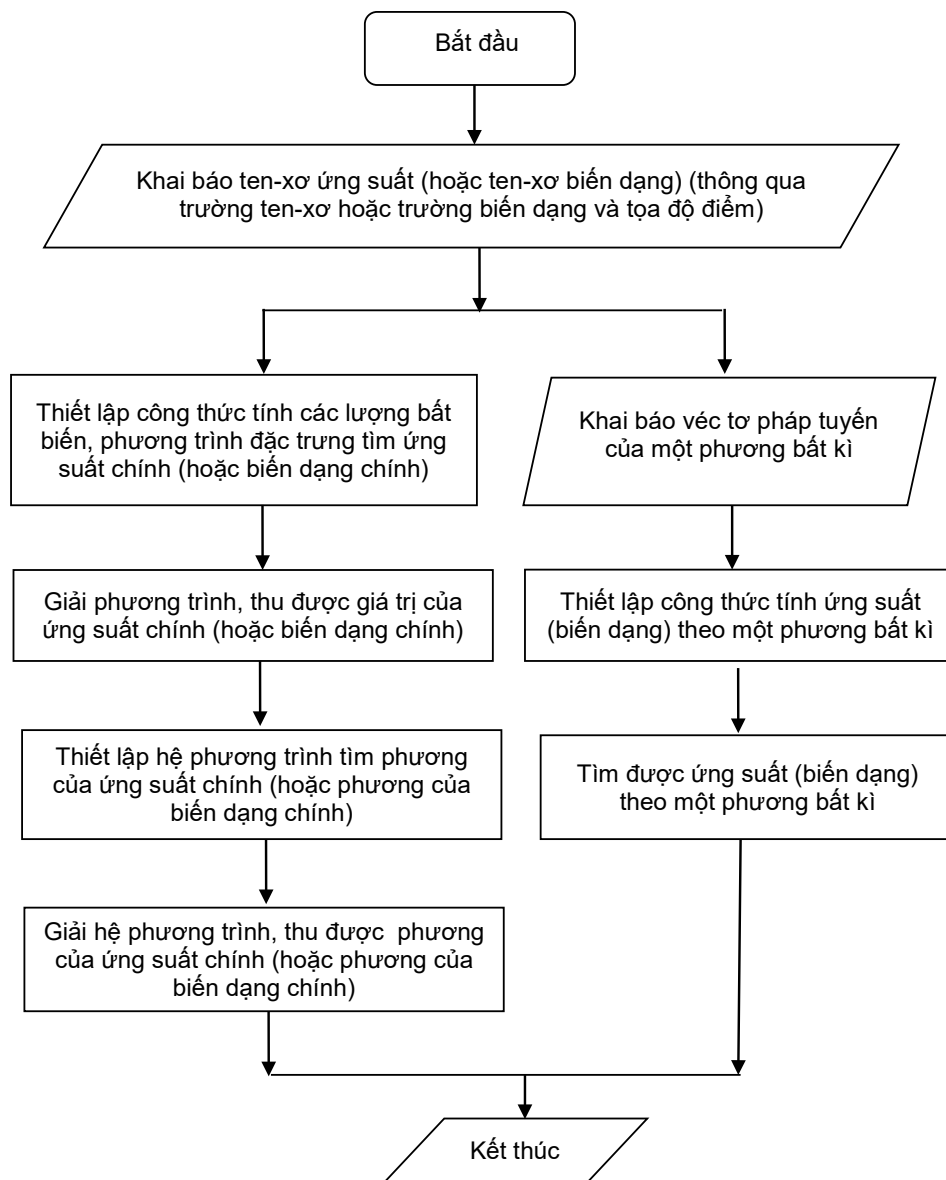
- Lập ten- xơ ứng suất (hoặc ten- xơ biến dạng) tại một điểm.

Đối với hệ đàn hồi tuyến tính, thông qua định luật Hooke về mối quan hệ giữa ứng suất và biến dạng để xác định được đại lượng ứng suất (hoặc biến dạng) theo yêu cầu.

- Xác định giá trị và phương của ứng suất chính (hoặc biến dạng chính).

- Xác định ứng suất (hoặc biến dạng) theo một phương bất kì.

Trình tự của bài toán xác



Hình 4. Sơ đồ khối bài toán xác định trạng thái ứng suất- trạng thái biến dạng bằng phần mềm lập trình Mathcad

định trạng thái ứng suất- trạng thái biến dạng tại một điểm bằng phần mềm lập trình Mathcad được triển khai theo sơ đồ khối thể hiện ở trên hình 4.

4. Ví dụ

Trạng thái ứng suất tại điểm K của môi trường trong hệ tọa độ Đề-các cho bởi ten-xơ:

$$T_{\sigma,K} = \begin{bmatrix} 8 & -4 & 1,6 \\ -4 & 11,2 & 0,8 \\ 1,6 & 0,8 & 4,8 \end{bmatrix} (\text{kN} / \text{cm}^2)$$

Yêu cầu:

- Xác định giá trị ứng suất chính thứ nhất và phương của ứng suất này tại điểm K.
- Xác định ứng suất toàn phần trên mặt nghiêng đi qua tại K và có véc tơ pháp tuyến:

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{11}} \vec{e}_1 + \frac{3}{\sqrt{11}} \vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{11}} \vec{e}_3$$

Lời giải

$$\text{ORIGIN} := 1 \quad \text{TOL} := 10^{-14}$$

Nhập các hệ số của ten- xơ ứng suất tại điểm K:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &:= 8 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} & \sigma_{22} &:= 11,2 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} & \sigma_{33} &:= 4,8 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \\ \sigma_{12} &:= -4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} & \sigma_{13} &:= 1,6 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} & \sigma_{23} &:= 0,8 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \end{aligned}$$

Nhận được:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad T_{\sigma} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 1,6 \\ -4 & 11,2 & 0,8 \\ 1,6 & 0,8 & 4,8 \end{pmatrix} \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

- Xác định giá trị ứng suất chính thứ nhất và phương của ứng suất này tại điểm K

Tính các bất biến của trạng thái ứng suất tại điểm K:

$$\begin{aligned} I_1 &:= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} & I_1 &= 24 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \\ I_2 &:= \left| \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{13} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \right| \rightarrow \frac{162,56 \text{ kN}^2}{\text{cm}^4} & I_2 &= 162,56 \left(\frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \right)^2 \\ I_3 &:= \left| \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \right| \rightarrow \frac{309,248 \text{ kN}^3}{\text{cm}^6} & I_3 &= 309,248 \left(\frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \right)^3 \end{aligned}$$

Lập phương trình đặc trưng để tìm các ứng suất chính:

$$I(\sigma) := \sigma^3 - \left(\frac{I_1}{\frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}} \right) \sigma^2 + \left[\frac{I_2}{\left(\frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \right)^2} \right] \sigma - \left(\frac{I_3}{\left(\frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \right)^3} \right)$$

Giải phương trình, tìm các ứng suất chính:

$$\begin{aligned} \text{Given } \sigma_1 &:= 20 & \sigma_2 &:= 2 & \sigma_3 &:= -45 \\ I(\sigma_1) &:= 0 & I(\sigma_2) &:= 0 & I(\sigma_3) &:= 0 \\ \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} &:= \text{Find}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = \begin{pmatrix} 13.914 \\ 3.253 \\ 3.253 \end{pmatrix} \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} & \sigma_1 &= 13.914 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \end{aligned}$$

Lập và giải hệ phương trình để tìm phương của ứng suất chính thứ nhất (σ_1):

$$\begin{aligned} \text{Given } L_1 &:= 0.5 \quad L_2 := 0.1 \quad L_3 := 0.2 \\ (\sigma_{11} - \sigma_1) \cdot L_1 + \sigma_{12} \cdot L_2 + \sigma_{13} \cdot L_3 &:= 0 \\ \sigma_{12} \cdot L_1 + (\sigma_{22} - \sigma_1) \cdot L_2 + \sigma_{23} \cdot L_3 &:= 0 \\ L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 &:= 1 \\ \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} &:= \text{Find}(L_1, L_2, L_3) = \begin{pmatrix} 0.565 \\ -0.825 \\ 0.027 \end{pmatrix} \quad L_1 = 0.565 \quad L_2 = -0.825 \quad L_3 = 0.027 \end{aligned}$$

b) Xác định ứng suất toàn phần trên mặt nghiêng đi qua tại K và có véc tơ pháp tuyến

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{11}} \vec{e}_1 + \frac{3}{\sqrt{11}} \vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{11}} \vec{e}_3$$

Nhập các cô-sin chỉ phương của phương v :

$$L_{1v} := \frac{1}{\sqrt{11}} \quad L_{2v} := \frac{3}{\sqrt{11}} \quad L_{3v} := \frac{1}{\sqrt{11}}$$

Ứng suất toàn phần tại K:

$$\begin{aligned} p_v &:= T_\sigma \cdot \begin{pmatrix} L_{1v} \\ L_{2v} \\ L_{3v} \end{pmatrix} \quad p_v = \begin{pmatrix} -0.724 \\ 9.166 \\ 2.653 \end{pmatrix} \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \\ P_v &:= \sqrt{(p_{v1})^2 + (p_{v2})^2 + (p_{v3})^2} = 9.57 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \end{aligned}$$

5. Nhận xét

Phần mềm MathCad có giao diện trực quan, dễ tiếp cận và sử dụng, các phép tính sử dụng các ký hiệu toán học quen thuộc. Việc sử dụng MathCad đã loại bỏ được các khó khăn về mặt toán học, giúp việc giải bài toán phức tạp nếu giải theo phương pháp truyền thống trở nên đơn giản. Từ đó, người học có thể nắm chắc được bản chất cơ học của bài toán mà không mất thời gian trong việc thực hiện các phép tính toán, nhất là đối với các bài toán phức tạp. Do đó có thể thấy, việc sử dụng phần mềm lập trình MathCad phù hợp, hiệu quả trong giảng dạy và học tập môn Cơ học môi trường liên tục cũng như các môn kỹ thuật khác./.

Tài liệu tham khảo

1. Lê Ngọc Hồng - Lê Ngọc Thạch, Cơ học môi trường liên tục và lý thuyết đàn hồi, NXB Khoa học và kỹ thuật, 2002.
2. Đào Huy Bích - Nguyễn Đăng Bích, Cơ học môi trường liên tục, NXB Đại học Quốc Gia, 2003.
3. G. Thomas Mase, George E. Mase, "Continuum mechanics for engineers". Publisher "CRC Press LLC", 1999.
4. Michael Lai, Erhard Krempf, David Rubin, "Continuum mechanics", Butterworth-Heinemann publications, 2010
5. Lawrence E. Malvern, "Introduction to the mechanics of a continuous medium", Prentice Hall, 1969.
6. Brent Maxfield, Essential MathCAD for Engineering, Science, and Math, USA, 2009.