

Phản xạ và khúc xạ của sóng P tại biên giữa hai bán không gian đàn hồi trục hướng nonlocal

Reflection and refraction of p- wave at an interface between two nonlocal transversely isotropic elastic half-spaces

Đỗ Xuân Tùng

Tóm tắt

Bài báo nghiên cứu sự phản xạ, khúc xạ của sóng P tại biên giữa hai bán không gian đàn hồi nonlocal đẳng hướng ngang. Bài toán biến dạng phẳng trong môi trường đàn hồi đẳng hướng ngang nonlocal được xem xét. Từ dạng nghiệm của sóng phẳng và các phương trình chuyển dịch của môi trường dẫn đến phương trình đặc trưng của sóng. Từ đó thiết lập trường chuyển dịch cho bán không gian phản xạ và khúc xạ. Điều kiện liên tục tại biên phân chia liên quan đến dịch chuyển, ứng suất pháp và ứng suất tiếp. Dựa trên các điều kiện biên này, hệ số phản xạ, khúc xạ (RTC) của các sóng đã được tìm ra. Cuối cùng, một vài ví dụ số được xét để thể hiện sự ảnh hưởng của tham số nonlocal, góc tới đối với hệ số phản xạ, khúc xạ.

Từ khóa: phản xạ, khúc xạ, nonlocal, đẳng hướng ngang

Abstract

This paper is concerned with the reflection and refraction of quasi P wave incident at an interface between two nonlocal transversely isotropic elastic half-spaces. The problem of plane strain in nonlocal transversely isotropic medium is considered. From the solution form of plane wave and the constitutive equation, the characteristic equation of plane wave is obtained. The boundary conditions depend on the quality of the interface and involve the normal, tangential displacements and the normal, tangential stresses. Based on these conditions, reflection and refraction coefficients (RTC) have been derived analytically for when a longitudinal displacement wave strikes the interface. Finally, numerical examples are provided to show the effect of the nonlocal parameter and incident angle on the reflection and transmission coefficients.

Key words: reflection, transmission, nonlocal, transversely isotropic

TS. Đỗ Xuân Tùng

Bộ môn Cơ học lý thuyết, Khoa Xây dựng

ĐT: 0984.468.136

Email: tungdx2783@gmail.com

Ngày nhận bài: 09/10/2020

Ngày sửa bài: 11/10/2020

Ngày duyệt đăng: 21/7/2023

1. Giới thiệu

Phản xạ, khúc xạ của sóng tại biên giữa 2 môi trường khác nhau là một vấn đề cơ bản trong nhiều lĩnh vực như địa chấn, địa vật lý, nghiên cứu động đất, đánh giá không phá hủy. Ngày nay, trong các lĩnh vực thông tin liên lạc, kỹ thuật y tế... yêu cầu kích thước của các thiết bị âm học ngày càng nhỏ hơn. Do đó, các lý thuyết đàn hồi cục bộ (local) và phi địa phương (nonlocal) đã được đề xuất để phân tích môi trường liên tục trong phạm vi mô- vĩ mô hoặc nano tương ứng. Một mô hình cơ học liên tục nonlocal dựa trên lý thuyết Eringen đã được đề xuất để tính toán sự phụ thuộc vào kích thước của các cấu trúc rất nhỏ [1],[2],[3]. Chakraborty [4] đã phân tích đáng điệu của sóng trong môi trường dị hướng với ảnh hưởng của tham số nonlocal bằng cách sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn phổ. Khurana và Tomar [5],[6] đã nghiên cứu sự phản xạ của sóng dọc tại biên phẳng tự do ứng suất của bán không gian nonlocal micropolar.

Nói chung, trong các nghiên cứu nói trên, các bài toán mới chỉ dừng lại ở bài toán truyền sóng, bài toán phản xạ tại biên tự do, bài toán phản xạ, khúc xạ của các sóng tại biên của 2 bán không gian đàn hồi nonlocal còn rất hạn chế. Do đó, trong bài báo này, vấn đề phản xạ, khúc xạ của sóng tại biên giữa hai bán không gian đàn hồi đẳng hướng ngang có xét đến ảnh hưởng nonlocal được xem xét. Phần đầu tiên giới thiệu ngắn gọn về lý thuyết local và các bài toán phản xạ, khúc xạ của sóng. Trong phần 2, các phương trình cơ bản được xây dựng. Phần 3 mô tả bài toán, các dạng nghiệm cho 2 bán không gian và điều kiện biên được đưa ra. Dựa vào các điều kiện liên tục tại biên, các hệ số phản xạ, khúc xạ được đưa ra trong Phần 4. Cuối cùng, trong phần 5, phần kết luận được trình bày. Kết quả số cho sự biến thiên của RTC với góc tới, tham số nonlocal được khảo sát.

2. Các phương trình cơ bản

Xét môi trường đàn hồi đẳng hướng ngang thuần nhất với mặt phẳng đối xứng trùng với mặt phẳng x_1x_3 . Trạng thái biến dạng phẳng với các thành phần chuyển dịch có dạng như sau:

$$u_i = u_i(x_1, x_3, t); \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \equiv 0; (i = 1, 3) \quad (1)$$

Mối liên hệ giữa ứng suất với các thành phần chuyển dịch có dạng [7],[8]

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{11}u_{1,1} + c_{13}u_{3,3}; \sigma_{33} = c_{13}u_{1,1} + c_{33}u_{3,3} \\ \sigma_{13} &= \sigma_{31} = c_{44}(u_{1,3} + u_{3,1}) \end{aligned} \quad (2)$$

Trong đó $c_{11}, c_{13}, c_{33}, c_{44}$ là các thành phần ứng suất, $c_{11}, c_{13}, c_{33}, c_{44}$ là các hằng số đàn hồi.

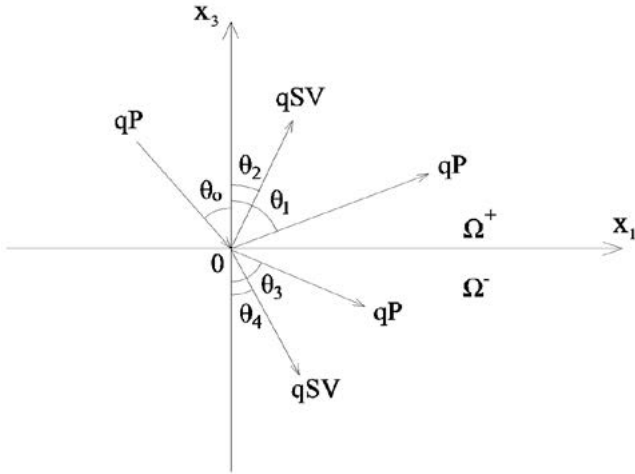
Phương trình chuyển động bỏ qua lực khối theo lý thuyết nonlocal của Eringen [1],[2],[3]

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{13,3} = (1 - \varepsilon^2 \nabla^2) \rho \ddot{u}_1; \sigma_{13,1} + \sigma_{33,3} = (1 - \varepsilon^2 \nabla^2) \rho \ddot{u}_3 \quad (3)$$

Ở đây ε là tham số nonlocal ($\varepsilon = e_0 a$) với e_0 là hằng số nonlocal. Dựa vào lý thuyết động lực học phân tử và phương trình tán sắc, Eringen đã đưa ra xấp xỉ $e_0 = 0.39$, a là độ dài đặc trưng, nó phụ thuộc vào từng vật liệu cũng như bài toán liên quan đến vật liệu đó, ∇^2 là toán tử Laplace, ρ là mật độ khối lượng.

Thay (2) vào (3) ta được hệ phương trình đối với các thành phần chuyển dịch, cụ thể

$$\begin{aligned} c_{11}u_{1,11} + c_{44}u_{1,33} + (c_{13} + c_{44})u_{3,13} &= (1 - \varepsilon^2 \nabla^2) \rho \ddot{u}_1 \\ (c_{13} + c_{44})u_{1,13} + c_{44}u_{3,11} + c_{33}u_{3,33} &= (1 - \varepsilon^2 \nabla^2) \rho \ddot{u}_3 \end{aligned} \quad (4)$$



Hình 1. Sự phản xạ, khúc xạ của sóng qP tại biên giữa hai bán không gian đàn hồi nonlocal đẳng hướng ngang

3. Thiết lập bài toán

Xét bài toán được thể hiện trong Hình 1. Bán không gian Ω^+ chiếm miền $x_3 > 0$, liên kết cơ học gắn chặt với bán không gian Ω^- chiếm miền $x_3 < 0$. Trục x_1 được lấy dọc theo mặt phân cách và trục x_3 hướng thẳng đứng lên trên.

Các nghiệm sóng phẳng của (4) trong mặt phẳng x_1x_3 có dạng [9],[10]

$$\begin{cases} u_1 = a_1 e^{ik(x_1 + \xi x_3 - ct)} \\ u_3 = a_3 e^{ik(x_1 + \xi x_3 - ct)} \end{cases} \quad (5)$$

trong đó k - thành phần x_1 của số sóng, vận tốc pha c dọc theo x_1 , ξ là tỷ số chưa biết của các thành phần vectơ sóng dọc theo phương x_3 và x_1 , a_1 , a_3 là các biên độ dịch chuyển chưa biết. Luật Snells tổng quát đã được tính đến trong (5).

Thay (5) vào (4) dẫn đến hệ 2 phương trình đối với 2 hệ số a_1 ; a_3 . Định thức ma trận các hệ số này bằng 0 dẫn đến phương trình đặc trưng có dạng

$$t_4 \xi^4 - t_2 \xi^2 + t_0 = 0 \quad (6)$$

Trong đó:

$$\begin{aligned} t_4 &= (c_{33} - \rho c^2 k^2 \varepsilon^2)(c_{44} - \rho c^2 k^2 \varepsilon^2); t_0 \\ &= (c_{44} - \rho c^2(1 + k^2 \varepsilon^2))(c_{11} - \rho c^2(1 + k^2 \varepsilon^2)) \\ t_2 &= \rho c^2(c_{33} + c_{44} + (c_{11} + c_{33} + 2c_{44})k^2 \varepsilon^2) \\ &\quad - 2\rho^2 c^4 k^2 \varepsilon^2(1 + k^2 \varepsilon^2) + c_{13}^2 - c_{11}c_{33} + 2c_{13}c_{44} \end{aligned}$$

Phương trình (6) là phương trình bậc hai của ξ^2 , mỗi nghiệm là một cặp sóng. Những sóng này là tựa sóng dọc (qP), tựa sóng ngang (qSV) truyền theo hướng ngược nhau trong mỗi môi trường.

3.1. Nghiệm sóng của 2 bán không gian

Chúng ta gọi ξ_1, ξ_2 dương và ξ_3, ξ_4 âm tương ứng với sóng phản xạ và khúc xạ trong Ω^+ và Ω^- , tương ứng. Cụ thể

+) Đối với sóng tới:

$$\begin{bmatrix} u_1^0 \\ u_3^0 \end{bmatrix} = a_0 \begin{bmatrix} 1 \\ h_0 \end{bmatrix} e^{ik(x_1 + \xi_0 x_3 - ct)} \quad (7)$$

+) Đối với các sóng phản xạ:

$$\begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_3^1 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ h_1 \end{bmatrix} e^{ik(x_1 + \xi_1 x_3 - ct)}, \quad \begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_3^2 \end{bmatrix} = a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ h_2 \end{bmatrix} e^{ik(x_1 + \xi_2 x_3 - ct)} \quad (8)$$

+) Đối với các sóng khúc xạ:

$$\begin{bmatrix} u_1^3 \\ u_3^3 \end{bmatrix} = a_3 \begin{bmatrix} 1 \\ h_3 \end{bmatrix} e^{ik(x_1 + \xi_3 x_3 - ct)}, \quad \begin{bmatrix} u_1^4 \\ u_3^4 \end{bmatrix} = a_4 \begin{bmatrix} 1 \\ h_4 \end{bmatrix} e^{ik(x_1 + \xi_4 x_3 - ct)} \quad (9)$$

ở đây a_i là biên độ dịch chuyển của các sóng, h_i là các tỉ số biên độ thành phần của mỗi sóng

$$h_i = \frac{(c_{13} + c_{44})\xi_i}{c_{44} + c_{33}\xi_i^2 - \rho c^2(1 + k^2 \varepsilon^2(1 + \xi_i^2))}$$

và $i=0,1,2,3,4$ tương ứng với sóng tới, sóng phản xạ, khúc xạ.

Để thuận lợi trong việc xem xét các điều kiện biên sau này, chúng tôi đưa ra các thành phần của ứng suất

$$\sigma_{13} = c_{44}(h + \xi); \sigma_{33} = c_{13} + c_{33}h\xi \quad (10)$$

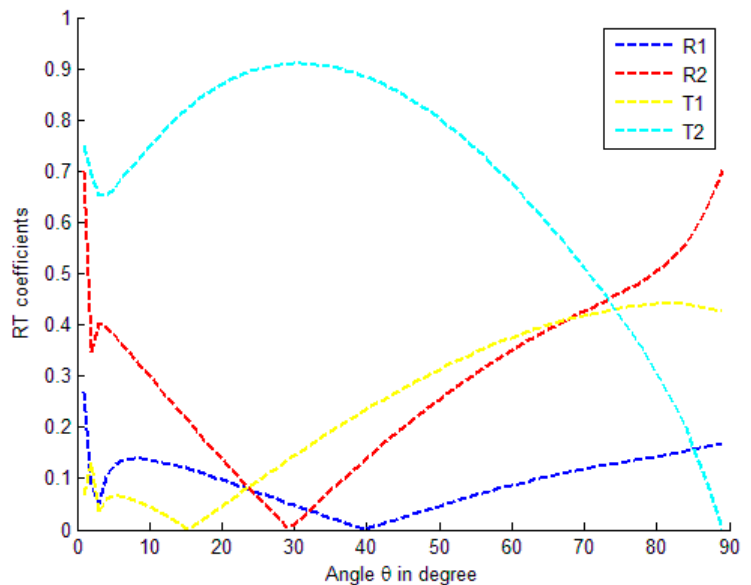
3.2. Điều kiện liên tục tại biên phân chia 2 bán không gian

Hai bán không gian được gắn chặt với nhau tại mặt phẳng $x_3=0$, các thành phần dịch chuyển và ứng suất của 2 bán không gian là liên tục, tức là

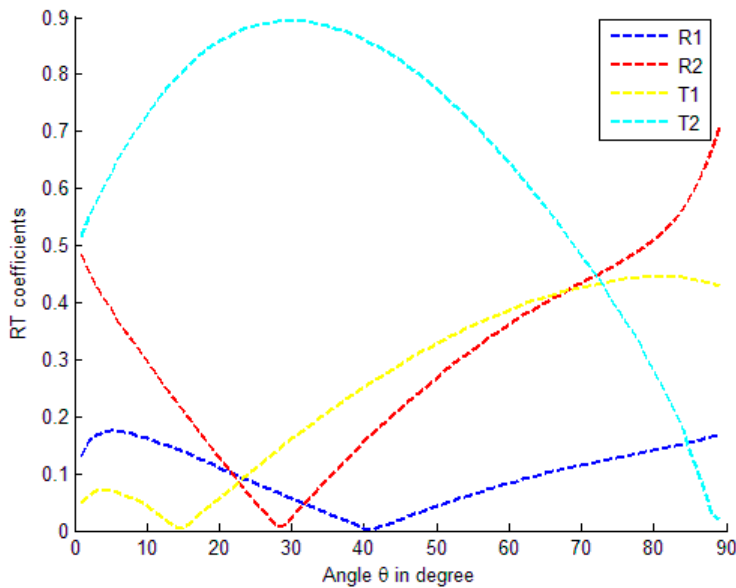
$$u_1^+ = u_1^-; u_3^+ = u_3^-; \sigma_{13}^+ = \sigma_{13}^-; \sigma_{33}^+ = \sigma_{33}^- \quad (11)$$

4. Hệ số phản xạ, khúc xạ

Thay các thành phần dịch chuyển của sóng tới, sóng phản xạ và khúc xạ từ (7) - (9) và các thành phần của ứng suất (10) vào điều kiện liên tục (11), chúng ta thu được hệ bốn phương trình tuyến tính của các biên độ dịch chuyển các sóng phản xạ, khúc xạ $a_1; a_2; a_3; a_4$ theo biên độ dịch chuyển của sóng tới a_0



Hình 2. Ảnh hưởng của hệ số phản xạ, khúc xạ của các sóng theo góc tới trong mô hình nonlocal



Hình 3. Ảnh hưởng của hệ số phản xạ, khúc xạ của các sóng theo góc tới trong mô hình local

$$\begin{cases} -a_1 - a_2 + a_3 + a_4 = a_0 \\ -h_1 a_1 - h_2 a_2 + h_3 a_3 + h_4 a_4 = h_0 a_0 \\ -c_{44}^-(h_1 + \xi_1)a_1 - c_{44}^-(h_2 + \xi_2)a_2 + c_{44}^-(h_3 + \xi_3)a_3 + c_{44}^-(h_4 + \xi_4)a_4 \\ = c_{44}^-(h_0 + \xi_0)a_0 \\ -(c_{13}^+ + c_{33}^+ h_1 \xi_1)a_1 - (c_{13}^+ + c_{33}^+ h_2 \xi_2)a_2 + (c_{13}^- + c_{33}^- h_3 \xi_3)a_3 \\ + (c_{13}^- + c_{33}^- h_4 \xi_4)a_4 = (c_{13}^+ + c_{33}^+ h_0 \xi_0)a_0 \end{cases} \quad (12)$$

Ký hiệu

$$A_1 = \frac{a_1}{a_0}; A_2 = \frac{a_2}{a_0}; A_3 = \frac{a_3}{a_0}; A_4 = \frac{a_4}{a_0}$$

Khi đó, hệ số phản xạ, khúc xạ được định nghĩa là tỉ số biên độ của sóng phản xạ, khúc xạ so với sóng tới

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{\sqrt{1+h_1^2}}{\sqrt{1+h_0^2}} A_1; R_2 = \frac{\sqrt{1+h_2^2}}{\sqrt{1+h_0^2}} A_2; \\ T_1 &= \frac{\sqrt{1+h_3^2}}{\sqrt{1+h_0^2}} A_3; T_2 = \frac{\sqrt{1+h_4^2}}{\sqrt{1+h_0^2}} A_4 \end{aligned} \quad (13)$$

Để minh họa cho kết quả đạt được ở trên, 1 ví dụ tính toán số được thực hiện với các giá trị tham số vật liệu cho 2 bán không gian được cho bởi:

+) Bán không gian Ω^+ :

$$c_{11}^+ = 9.04; c_{13}^+ = 6.2; c_{33}^+ = 9.06; c_{44}^+ = 16.82; e_0^+ = 0.39; \\ a^+ = 0.421 \cdot 10^{-9}; \rho^+ = 4700$$

+) Bán không gian Ω^- :

$$c_{11}^- = 12.0; c_{13}^- = 5.8; c_{33}^- = 6.02; c_{44}^- = 16.02; e_0^- = 0.32; \\ a^- = 0.121 \cdot 10^{-9}; \rho^- = 7400$$

Chú ý rằng các kết quả tính toán thể hiện sự ảnh hưởng của tham số nonlocal nên hệ số phản xạ, khúc xạ theo 2 mô hình local $\varepsilon \neq 0$ và nonlocal $\varepsilon \neq 0$

Từ các hình vẽ 2 và 3 chúng ta thấy rằng khi góc tới tăng thì các hệ số khúc xạ có xu hướng giảm dần, trong khi các hệ số phản xạ đạt giá trị nhỏ nhất tại 1 giá trị nào đó của góc tới rồi sau đó tăng dần khi góc tới tiến gần 90°. Cũng từ 2 hình vẽ nó cho thấy ảnh hưởng của tham số nonlocal nên hệ số phản xạ, khúc xạ.

5. Kết luận

Trong bài báo này, bài toán phản xạ, khúc xạ của sóng tại biên giữa hai bán không gian nonlocal đẳng hướng ngang được xem xét khi có 1 sóng dọc tới biên phân chia. Sử dụng điều kiện liên tục của chuyển dịch và ứng suất tại biên, biểu thức hệ số phản xạ, khúc xạ của các sóng đã được đưa ra. Dựa trên biểu thức này, ảnh hưởng của góc tới, tham số nonlocal tới RTC đã được khảo sát./.

Tài liệu tham khảo

1. Eringen. A.C, Edelen. D.G.B, "On nonlocal elasticity", *Int. J. Engng.Sci.*, 10(3), 1972, pp. 233-248.
2. Eringen.A.C, "Ondierential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves", *J. Appl. Phys.*, 54, 1983, pp. 4703-4710.
3. Goyal.S, Sahu.S, Mondal.S, "Influence of imperfect bonding on the reflection and transmission of QP-wave at the interface of two functionally graded piezoelectric materials", *Wave Motion*, 92, 2019, pp. 102431
4. Chattopadhyay A, Rik Venkateswarlu and S Saha., "Reflection of quasi-P and quasi-SV waves at the free and rigid boundaries of a fibre-reinforced medium", *Sadhana*, Vol. 27, Part 6, 2002, pp. 613-630.
5. Khurana.A and Tomar.S.K, "Reflection of plane longitudinal waves from the stress-free boundary of a nonlocal, micropolar solid half-space", *journal of mechanics of materials and structures*, Vol. 8, No.1, 2013, pp. 95-107.
6. Khurana.A and Tomar.S.K, "Waves at interface of dissimilar nonlocal micropolar elastic half-spaces", *Mechanics of advanced materials and structures*, 26(10), 2019, doi.org/10.1080/15376494.2018.1430261.
7. Achenbach.J.D, *Wave propagation in Elastic Solids*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam-New York-Oxford, 1973.
8. Chakraborty.A, "Wave propagation in anisotropic media with non-local elasticity", *International Journal of Solids and Structures*, 44, 2007, pp. 5723-5741.
9. Nayfeh.A.H, *Wave Propagation in Layered Anisotropic Media*, North-Holland, Amsterdam, 1995.
10. Pang.Y, Liu.J.X, "Reflection and transmission of plane waves at an imperfectly bonded interface between piezoelectric and piezomagnetic media", *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol 30, 2011, pp.731-740.