TẠP CHÍ KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ Tập 45, số 5, 2007 Tr. 117--131

DAO ĐỘNG CỦA DẦM ĐÀN HỒI TỪ BIẾN

HOÀNG VĂN ĐA, TRẦN ĐÌNH SƠN

I. MỞ ĐẦU

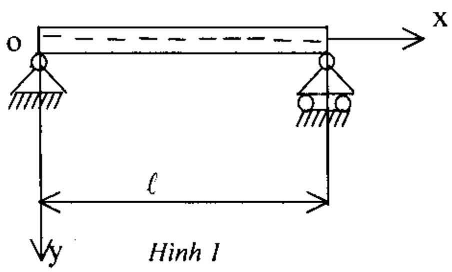
Bài toán dao động của dầm theo mô hình đàn hồi thông thường, đã có nhiều tác giả trong nước và ngoài nước nghiên cứu [1, 4, 7]. Tuy nhiên với vật rắn đàn hồi theo mô hình từ biến, có thể nói, theo tác giả công trình này, cho đến nay còn ít người nghiên cứu, nhất là ở nước ta càng rất ít.

Trong đó, bài toán dao động dầm đàn hồi từ biến khi có tải trọng di động trên đó cũng chưa được khảo sát đầy đủ.

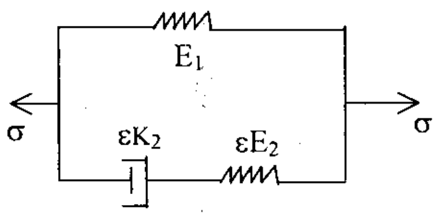
Các bài toán đó sẽ được nghiên cứu tuần tự từ đơn giản đến phức tạp trước tiên là tuyến tính sau đó là phi tuyến đối với từng loại bài toán bằng phương pháp tiệm cận đối với hệ cấp cao [2].

II ĐẶT BÀI TOÁN VÀ PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG

Bây giờ, nghiên cứu dao động của dầm đàn hồi từ biến, dài ℓ, chịu liên kết tựa tuyến tính hai đầu. Dầm chuyển động dưới tác dụng của tải trọng phân bố q = q(x, t) có phương vuông góc với trục của dầm (hình 1).



Hình 1



Hình 2

Tính chất cơ học của vật liệu khi bị kéo nén được mô tả bằng mô hình vật thể tuyến tính dạng chuẩn (hình 2) [3]. Bởi vậy phương trình trạng thái trong dạng toán tử, được viết như sau [3]

$$\sigma = E e. \tag{2.1}$$

$$E = \left[\frac{E_1 + \varepsilon K_2 \left(1 + \dfrac{E_1}{\varepsilon E_2}\right) \dfrac{\partial}{\partial t}}{\left(1 + \dfrac{K_2}{E_2} \dfrac{\partial}{\partial t}\right)} \right] \tag{2.2}$$

trong đó E_1, E_2, K_2 là các hằng số đặc trưng cho tính từ biến của vật liệu được xác định bằng thực nghiệm, $\varepsilon > 0$ - tham số bé.

Bỏ qua chuyển động quay, chuyển động trượt và bỏ qua chuyển động dọc, theo mô hình Euler- Bernoulli, chuyển động ngang của dầm đàn hồi được mô tả bằng phương trình sau:

$$m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = q(x,t) + f(x,y,\dot{y}...) \tag{2.3}$$

trong đó $I = \iint_F y^2 dF = const$, $m = \rho F = const$ là khối lượng đơn vị tiết diện ngang của dầm, ρ - mật độ khối lượng, F là diện tích mặt cắt ngang, $f = f(x,y,\dot{y}...)$ là hàm phi tuyến.

Thế mô đun đàn hồi E từ (2.2) vào phương trình (2.3) ta được:

$$m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + I\left[\frac{E_1 + \varepsilon K_2\left(1 + \frac{E_1}{\varepsilon E_2}\frac{\partial}{\partial t}\right)}{\left(1 + \frac{K_2}{E_2}\frac{\partial}{\partial t}\right)}\right]\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = q(x,t) + f(x,y,\dot{y}...),$$

$$m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\left[1 + \frac{K_2}{E_2}\frac{\partial}{\partial t}\right] + I\left[E_1 + \varepsilon K_2\left(1 + \frac{E_1}{\varepsilon E_2}\right)\frac{\partial}{\partial t}\right]\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \left[1 + \frac{K_2}{E_2}\frac{\partial}{\partial t}\right][q + f],$$

$$m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{mK_2}{E_2}\frac{\partial^3 y}{\partial t^3} + IE_1\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \varepsilon IK_2\frac{\partial^5 y}{\partial t\partial x^5} + \frac{IE_1K_2}{E_2}\frac{\partial^5 y}{\partial t\partial x^4} = \left[(q+f) + \frac{K_2}{E_2}\frac{\partial}{\partial t}(q+f)\right].$$

Nhân hai vế của phương trình trên với $\frac{E_2}{mK_2}$ (nói cách khác chia hai vế cho $\frac{mK_2}{E_2}$) ta được:

$$\frac{\partial^3 y}{\partial t^3} + \frac{E_2}{K_2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{IE_1}{m}\frac{E_2}{K_2}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \varepsilon\frac{IE_2}{m}\frac{\partial^5 y}{\partial t\partial x^4} + \frac{IE_1}{m}\frac{\partial^5 y}{\partial t\partial x^4} = \frac{E_2}{K_2 m}\left[\left((q+f) + \frac{K_2}{E_2}\frac{\partial}{\partial t}(q+f)\right)\right].$$

Đặt $$\xi = \frac{E_2}{K_2}, \qquad \omega^2 = \frac{IE_1}{m}, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial t^3} + \xi\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\omega^2\partial^5 y}{\partial t\partial x^4} + \xi\omega^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\varepsilon\omega^2\frac{E_2}{E_1}\frac{\partial^5 y}{\partial t\partial x^4} + \frac{1}{m}\left[\xi(q+f) + \frac{\partial}{\partial t}(q+f)\right]. \tag{2.5}$$

Để đơn giản giả sử rằng m = 1, q(x, t) = $\varepsilon q_0(x,t)$ và $f(x,y,\dot{y}...)$ nhỏ, khi đó phương trình (2. 5) có thể viết như sau:

$$\frac{\partial^3 y}{\partial t^3} + \xi\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \omega^2\frac{\partial^5 y}{\partial t\partial x^4} + \xi\omega^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \varepsilon\left\{-\omega^2\frac{E_2}{E_1}\frac{\partial^5 y}{\partial t\partial x^4} + \xi(q_0 + f) + \frac{\partial}{\partial t}(q_0 + f)\right\}, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial t^3}+\xi\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\omega^2\frac{\partial^5 y}{\partial t\partial x^4}+\xi\omega^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=\varepsilon F(x,y,\dot{y}...t). \tag{2.7}$$

Dầm chịu liên lết bản lề tại hai đầu như hình 1, thì tại x = o, ℓ độ võng và mô men uốn bằng không. Do đó những điều kiện biên đồng nhất thích hợp là:

$$y\Big|_{x=0}=0,\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Big|_{x=0}=0$$

$$y\Big|_{x=\ell}=0,\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Big|_{x=\ell}=0. \tag{2.8}$$

Lưu ý rằng mômen uốn tại tiết diện ngang bất kỳ được xác định bằng biểu thức:

$$M=-EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{2.9}$$

Chuyển động của hệ đàn hồi từ biến được mô tả bằng phương trình đạo hàm riêng, trong đó có đạo hàm bậc ba đối với thời gian t, điều mà chúng ta chưa thấy trong hệ đàn hồi thông thường. Có thể thành lập phương trình chuyển động của dầm theo cách khác [8] cũng đưa đến kết quả duy nhất như (2.7).

III. XÂY DỰNG NGHIỆM TIỆM CẬN VỚI HỆ Ô-TÔ-NÔM

Khi $\varepsilon = 0$, phương trình suy biến của (2.7) có dạng:

$$\frac{\partial^3 y}{\partial t^3}+\xi\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\omega^2\frac{\partial^5 y}{\partial t\partial x^4}+\xi\omega^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=0, \tag{3.1}$$

với điều kiện biên tuyến tính sau:

$$y\Big|_{x=0}=0,\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Big|_{x=0}=0,$$

$$y\Big|_{x=\ell}=0,\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Big|_{x=\ell}=0. \tag{3.2}$$

Lưu ý rằng với hệ ô- tô- nôm hàm F không phụ thuộc hiển vào thời gian t. Nghiệm của bài toán biên trên tìm trong dạng tách biến [6].

$$y_o(x,y)=Z(x)T(t) \tag{3.3}$$

Thế (3.3) vào phương trình (3.1) ta có:

$$Z(x)\frac{d^3T}{dt^3}+\xi Z(x)\frac{d^2T}{dt^2}+\omega^2\frac{d^4z}{dx^4}\frac{dT}{dt}+\xi\omega^2\frac{d^4z}{dx^4}T=0,$$

$$\left(\frac{d^3T}{dt^3}+\xi\frac{d^2T}{dt^2}\right)Z(x)+\left(\omega^2\frac{dT}{dt}+\xi\omega^2T\right)\frac{d^4z}{dx^4}=0,$$

$$\frac{\dfrac{d^3T}{dt^3}+\xi\dfrac{d^2T}{dt^2}}{\omega^2\dfrac{dT}{dt}+\xi\omega^2T}=-\frac{\dfrac{d^4z}{dx^4}}{Z(x)}=-\beta^2=\text{const.} \tag{3.4}$$

Chú ý rằng trong phương trình (3.4) vế trái là hàm số của đối số thời gian (t) còn bên phải là hàm số của đối số không gian (x) để cho hai vế đó bằng nhau với mọi t và x thì chúng phải bằng hằng số. Hơn nữa ở đây ta chú đến dao động nên hằng số đó là âm mà ta kí hiệu là $(-\beta^2)$. Từ (3,4) ta có hai phương trình sau:

$$\frac{d^3T}{dt^3}+\xi\frac{d^2T}{dt^2}+\beta^2\omega^2\frac{dT}{dt}+\beta^2\xi\omega^2T=0, \tag{3.5}$$

$$\frac{d^4Z(x)}{dx^4}-\beta^2Z(x)=0, \tag{3.6}$$

Từ (3.2) dễ dàng thấy rằng hàm $Z(x)$ phải thoả mãn các điều kiện biên sau:

$$Z(x)\Big|_{x=0,\ell}=0\qquad,\qquad \frac{d^2Z(x)}{dx^2}\Bigg|_{x=0,\ \ell}=0\ . \tag{3.7}$$

Đặt
$$\beta^2=\lambda^4, \tag{3.8}$$

Phương trình (3.6) có dạng:

$$\frac{d^4Z(x)}{dx^4}-\lambda^4Z(x) \tag{3.9}$$

Nghiệm của phương trình (3.9) được tìm dưới dạng:

$$Z(x)=C_1\sin\lambda x+C_2\cos\lambda x+C_3\mathrm{sh}\lambda x+C_4\mathrm{ch}\lambda x, \tag{3.10}$$

trong đó C_1, C_2, C_3, C_4 là các hằng số được xác định từ điều kiện biên (3.7)

$$Z(0)=C_2+C_4=0,$$

$$Z(\ell)=C_1\sin\lambda\ell+C_2\cos\lambda\ell+C_3\mathrm{sh}\lambda\ell+C_4\mathrm{ch}\lambda\ell=0,$$

$$\frac{d^2Z(0)}{dx^2}=-C_1\lambda^2.0-C_2\lambda^2+C_4\lambda^2=0,$$

$$\frac{d^2Z(\ell)}{dx^2}=-C_1\lambda^2\sin\lambda\ell-C_2\lambda^2\cos\lambda\ell+C_3\lambda^2\mathrm{sh}\lambda\ell+C_4\lambda^2\mathrm{ch}\lambda\ell=0,$$

dễ dàng xác định được các đại lực C_1, C_2, C_3, C_4

$$\left.\begin{aligned} C_2 + C_4 &= 0 \\ -C_2 + C_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \to C_2 = 0, C_4 = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} C_1 \sin\lambda\ell + C_3 \mathrm{sh}\lambda\ell &= 0 \\ -C_1\lambda^2 \sin\lambda\ell + C_3\lambda^2 \mathrm{sh}\lambda\ell &= 0 \end{aligned}\right\} + \to C_3 = 0,$$

$$C_1 \sin\lambda\ell = 0$$

$$\lambda_k \ell = k\pi, \lambda_K = \frac{k\pi}{\ell}. \qquad 3.11)$$

Vậy hàm cơ sở (3.10) bây giờ có dạng đơn giản nhất:

$$Z_k(x) = C_1^{(k)} \sin\frac{k\pi x}{\ell}, (k=1.2,\dots) \qquad (3.12)$$

$C_1^{(k)}$ là các hằng số bất kỳ khác không. Từ (3.8) ta có:

$$\beta_k^2 = \frac{k^4\pi^4}{\ell^4}, \beta_k = \frac{k^2\pi^2}{\ell^2}, (k = 1,2,\dots), \qquad (3.13)$$

β_k được gọi các giá trị riêng phụ thuộc vào điều kiện biên. Bây giờ ta giải phương trình (3.5), nghiệm của nó tìm trong dạng

$$T = e^{\lambda t} \; . \qquad (3.14)$$

Thay T vào (3.5) ta có phương trình đặc trưng, xác định các giá trị đặc trưng λ.

$$\lambda^3 + \xi\lambda^2 + \beta^2\omega^2\lambda + \xi\beta^2\omega^2 = 0,$$

$$(\lambda + \xi)(\lambda_2 + \beta^2\omega^2) = 0, \qquad (3.15)$$

Các giá trị riêng:

$$\lambda_1 = -\xi, \lambda_2 = +i\beta\omega, \lambda_3 = -i\beta\omega,$$

$$\lambda_1 = -\xi, \lambda_2^{(k)} = +i\beta_k\omega, \lambda_3^{(k)} = -i\beta_k\omega,$$

$$\lambda_1 = -\xi, \lambda_2^{(k)} = +i\Omega_k, \lambda_3^{(k)} = -i\Omega_k,$$

$$\Omega_k = \omega\beta_k = \frac{k^2\pi^2}{\ell^2}\sqrt{\frac{IE_1}{m}}. \qquad (3.16)$$

Nghiệm của phương trình (3.5) có dạng

$$T_k = C_1 e^{-\xi t} + C_2^{(k)} e^{+i\Omega_k t} + C_3^{(k)} e^{-i\Omega_k t} \quad (k=1,2,\dots) \qquad (3.17)$$

C_1 – hằng số thực, $C_2^{(k)}, C_3^{(k)}$ là các hằng số phức liên hợp. Theo công thức Euler

$$e^{+i\varphi_k} = \cos\varphi_k + i\sin\varphi_k, \quad e^{-i\varphi_k} = \cos\varphi_k - i\sin\varphi_k. \qquad (3.18)$$

$$C_2^{(k)} = a_k + ib_k, C_3^{(k)} = a_k - ib_k, \varphi_k = \Omega_k t. \qquad (3.19)$$

Thế (3.18) , (3.19) vào 3.17) ta có:

$$T_k = C_1 e^{-\xi t} + a_k\cos\varphi_k + ia_k\sin\varphi_k + ib_k\cos\varphi_k - b_k\sin\varphi_k + a_k\cos\varphi_k -$$
$$- ia_k\sin\varphi_k - ib_k\cos\varphi_k - b_k\sin\varphi_k,$$

$$T_k = C_1 e^{-\xi t} + 2a_k\cos\varphi_k - 2b_k\sin\varphi_k, D_k = 2a_k, G_k = -2b_k$$

$$T_k = C_1 e^{-\xi t} + D_k\cos\varphi_k + G_k\sin\varphi_k, \tag{3.20}$$

Từ (3.3) ta có:

$$y_0^{(k)}(x,t) = T_k Z_k,$$

$$y_0^{(k)}(x,t) = C_1 C_1^{(k)} e^{-\xi t}\sin\frac{k\pi x}{\ell} + \left[D_k C_1^{(k)}\cos\Omega_k t + G_k C_1^{(k)}\sin\Omega_k t\right]\sin\frac{k\pi x}{\ell},$$

$$y_0^{(k)}(x,t) = C_1^{(k)} e^{-\xi t}\sin\frac{k\pi x}{\ell} + A_k\cos\Omega_k t\sin\frac{k\pi x}{\ell} + B_k\sin\Omega_k t\sin\frac{k\pi x}{\ell}, \tag{3.21}$$

$C_1^{(k)}$, A_k, B_k là các hằng số thực được xác định từ điều kiện đầu; $C_1^{(k)} = C_1 C_1^{(k)}, A_k = D_k C_1^{(k)}, B_k = G_k C_1^{(k)}$. Bởi vậy đối với các hàm riêng (3.12) để thuận tiện nhiều khi người ta cho $C_1^{(k)} = 1, \forall k$ cũng không ảnh hưởng gì đến nghiệm (3.21).

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (3.1) là:

$$y_0(x,t) = \left[\sum_{k=1}^{\infty} C_1^{(k)} e^{-\xi t}\sin\frac{k\pi x}{\ell} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos\Omega_k t\sin\frac{k\pi x}{\ell} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k\sin\Omega_k t\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right]. \tag{3.22}$$

Khi $t \to \infty$ thì $e^{-\xi t} \to 0$, nên trong phạm vi gần đúng người ta chỉ lấy

$$y_0(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos\Omega_{kt}\sin\frac{k\pi x}{\ell} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k\sin\Omega_k t\sin\frac{k\pi x}{\ell}. \tag{3.23}$$

Cần xác định các hằng số A_k, B_k từ điều kiện đầu.Giả sử rằng

$$y_0(x,0) = f_1(x), \frac{\partial y_0(x,0)}{\partial t} = f_2(x). \tag{3.24}$$

Khi đó ta có, từ (3.23)

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k\sin\frac{k\pi x}{\ell} = f_1(x) \to A_k = \frac{\int_0^\ell f_1(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx}{\int_0^\ell \sin^2\frac{k\pi x}{\ell}dx},$$

$$\sin^2\frac{k\pi x}{\ell} = \left(1 - \cos\frac{2k\pi x}{\ell}\right)\Big/2 \to \int_0^\ell \sin^2\frac{k\pi x}{\ell}dx = \int_0^\ell \left(1 - \cos\frac{2k\pi x}{\ell\,2}\right)\Big/ dx = \frac{\ell}{2},$$

$$A_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f_1(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx, \tag{3.25}$$

$$\frac{\partial y_0}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} - A_k\Omega_k\sin\Omega_{kt}\sin\frac{k\pi x}{\ell} + \sum_{k=1}^{\infty} B_1\Omega_k\cos\Omega_k t\sin\frac{k\pi x}{\ell},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} y_0(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \Omega_k \sin\frac{k\pi x}{\ell} = f_2(x) \rightarrow$$

$$\mathrm{B_k} = \frac{2}{\ell\Omega_k} \int_0^{\ell} f_2(x) \sin\frac{k\pi x}{\ell} dx. \tag{3.26}$$

Như vậy là nghiệm (3.23) hoàn toàn xác định. Lưu ý rằng nếu ta vẫn lấy nghiệm (3.22) Khi đó các hằng số cần xác định là $C_1^{(k)}$, A_k, B_k.

Do đó cần ba điều kiện đầu $y_0(x, 0)$, $\frac{\partial y_0(x,0)}{\partial t}, \frac{\partial^2 y(x,0)}{\partial t^2}$.

Bây giờ chúng ta đi xác định hàm nghiệm riêng của (2.7). Giả sử rằng hệ suy biến ($\varepsilon = 0$) tồn tại nghiệm không tắt dầm Ω_1 và không có hiện tượng nội cộng hưởng đối với tần số Ω_1 tức là

$$(\Omega_k - n\Omega_1) \neq 0 \quad , \ (\mathrm{k,n} = 1, 2, \ldots) \tag{3.27}$$

Khi đó nghiệm riêng của bài toán biên (2.7), (2.8) tìm dưới dạng chuỗi

$$y(x,t) = a\cos\varphi Z_1(x) + \varepsilon U_1(x,a,\varphi) + \varepsilon U_2(x,a,\varphi) + \ldots, \tag{3.28}$$

trong đó $\varphi = (\Omega_1 t + \psi); U_1, U_2$ tuần hoàn chu kì 2π theo φ, còn a, ψ được xác định từ hệ phương trình vi phân sau:

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \ldots,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \ldots. \tag{3.29}$$

Bây giờ chúng ta phải tính các đại lượng $\frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial t^3}$ từ (3.28) chú đến (3.29) rồi thay các đại lượng đó vào (2.7) và trong xấp xỉ thứ nhất hoàn thiện ta có:

$$\frac{\partial y}{dt} = \frac{da}{dt}\cos\varphi Z_1 - a\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} Z_1 + \varepsilon\frac{\partial U_1}{\partial a}\frac{da}{dt} + \varepsilon\frac{\partial U_1}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \ldots,$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \varepsilon A_1 \cos\varphi Z_1 - a\sin\varphi\varepsilon B_1 Z_1 - a\sin\varphi\Omega_1 Z_1 + \varepsilon\Omega_1\frac{\partial U_1}{\partial\varphi},$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \varepsilon A_1 \cos\varphi Z_1 - a\Omega_1 \sin\varphi Z_1 - \varepsilon B_1 a\sin\varphi Z_1 + \varepsilon\Omega_1\frac{\partial U_1}{\partial\varphi}, \tag{3.30}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\varepsilon A_1\Omega_1 \sin\varphi Z_1 - \varepsilon A_1\Omega_1 \sin\varphi Z_1 - a\Omega_1^2 \cos\varphi Z_1 - \varepsilon B_1 a\Omega_1 \cos\varphi Z_1 - \varepsilon B_1 a\Omega_1 \cos\varphi Z_1 + \varepsilon\Omega_1^2\frac{\partial^2 U_1}{\partial\varphi^2},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -2\varepsilon A_1\Omega_1 \sin\varphi Z_1 - 2\varepsilon B_1 a\Omega_1 \cos\varphi Z_1 - a\Omega_1^2 \cos\varphi Z_1 + \varepsilon\Omega_1^2\frac{\partial U_1}{\partial\varphi^2}. \tag{3.31}$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial t^3} = -2\varepsilon A_1\Omega_1^2 \cos\varphi Z_1 + 2\varepsilon B_1 a\Omega_1^2 \sin\varphi Z_1 - \varepsilon A_1\Omega_1^2 \cos\varphi Z_1 + a\Omega_1^3 \sin\varphi Z_1 + a\varepsilon B_1\Omega_1^2 \sin\varphi Z_1 + \varepsilon\Omega_1^3\frac{\partial^3 U_1}{\partial\varphi^3},$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial t^3} = -3\varepsilon A_1\Omega_1^2\cos\varphi Z_1 + 3\varepsilon B_1 a\Omega_1^2\sin\varphi Z_1 + a\Omega_1^3\sin\varphi Z_1 + \varepsilon\Omega_1^3\frac{\partial^3 U_1}{\partial\varphi^3}. \qquad (3.32)$$

Cần phải tính một số đại lượng sau đây:

$$\omega^2\frac{\partial^5 y}{\partial x^4\partial t} = \varepsilon A_1\omega^2\frac{\pi^4}{\ell^4}\cos\varphi Z_1 - a\Omega_1\omega^2\frac{\pi^4}{\ell^4}\sin\varphi Z_1 - \varepsilon aB_1\omega^2\frac{\pi^4}{\ell^4}\sin\varphi Z_1 + \varepsilon\omega^2\Omega_1\frac{\partial^5 U_1}{\partial x^4\partial\varphi},$$

$$\omega^2\frac{\partial^5 y}{\partial x^4\partial t} = \varepsilon A_1\Omega_1^2\cos\varphi Z_1 - a\Omega_1^3\sin\varphi Z_1 - \varepsilon aB_1\Omega_1^2\sin\varphi Z_1 + \varepsilon\omega^2\Omega_1\frac{\partial^5 U_1}{\partial x^4\partial\varphi}. \qquad (3.33)$$

$$\xi\omega^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \xi\alpha\ \Omega_1^2 a\cos\varphi Z_1 + \varepsilon\xi\omega^2\frac{\partial^4 U_1}{\partial x^4}. \qquad (3.34)$$

$$\xi\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -2\varepsilon\xi A_1\Omega_1\sin\varphi Z_1 - 2\varepsilon\xi B_1 a\Omega_1\cos\varphi Z_1 - a\xi\Omega_1^2\cos\varphi Z_1 + \varepsilon\xi\Omega_1^2\frac{\partial^2 U_1}{\partial\varphi^2} \qquad (3.35)$$

Bây giờ hãy thế các đại lượng (3.31), (3.32), (3.33), (3.34), (3.35) vào phương trình (2.7) ta có:

$$-3\varepsilon A_1\Omega_1^2\cos\varphi Z_1 + 3\varepsilon B_1 a\Omega_1^2\sin\varphi Z_1 + a\Omega_1^3\sin\varphi Z_1 + \varepsilon\Omega_1^3\frac{\partial^3 U_1}{\partial\varphi^3} - 2\varepsilon\xi A_1\Omega_1\sin\varphi Z_1 -$$

$$-2\varepsilon\xi B_1 a\Omega_1\cos\varphi Z_1 - a\xi\Omega_1^2\cos\varphi Z_1 + \varepsilon\xi\Omega_1^2\frac{\partial^2 U_1}{\partial\varphi^2} + \varepsilon A_1\Omega_1^2\cos\varphi Z_1 -$$

$$-a\Omega_1^3\sin\varphi Z_1 - \varepsilon aB_1\Omega_1^2\sin\varphi Z_1 + \varepsilon\omega^2\Omega_1\frac{\partial^5 U_1}{\partial x^4\partial\varphi} + \xi\Omega_1^2 a\cos\varphi Z_1 + \varepsilon\xi\omega^2\frac{\partial^4 U_1}{\partial x^4} =$$

$$= \varepsilon F(x, a\cos\varphi Z_1, -a\Omega_1\sin\varphi Z_1, \ldots) = \varepsilon F_1, F_1 = F(x, a\cos\varphi Z_1 \ldots),$$

Sau khi đơn giản ta có:

$$-2\varepsilon A_1\Omega_1^2\cos\varphi Z_1 + 2\varepsilon B_1 a\Omega_1^2\sin\varphi Z_1 + \varepsilon\Omega_1^3\frac{\partial^3 u_1}{\partial\varphi^3} - 2\varepsilon\xi A_1\Omega_1\sin\varphi Z_1 -$$

$$-2\varepsilon\xi B_1 a\Omega_1\cos\varphi Z_1 + \varepsilon\xi\Omega_1^2\frac{\partial^2 U_1}{\partial\varphi^2} + \varepsilon\omega^2\Omega_1\frac{\partial^5 U_1}{\partial x^4\partial\varphi} + \varepsilon\xi\omega^2\frac{\partial^4 U_1}{\partial x^4} = \varepsilon F_1.$$

$$-2\varepsilon\Omega_1(\Omega_1 A_1 + \xi aB_1)\cos\varphi Z_1 - 2\varepsilon\Omega_1(\xi A_1 - \Omega_1 aB_1)\sin\varphi Z_1 +$$

$$= \varepsilon\Omega_1^3\frac{\partial^3 U_1}{\partial\varphi^3} + \varepsilon\xi\Omega_1^2\frac{\partial^2 U_1}{\partial\varphi^2} + \varepsilon\Omega_1\omega^2\frac{\partial^5 u_1}{\partial x^4\partial\varphi} + \varepsilon\xi\omega^2\frac{\partial^4 U_1}{\partial x^4} = \varepsilon F_1,$$

Cuối cùng ta có phương trình sau:

$$\Omega_1^3\frac{\partial^3 U_1}{\partial\varphi^3} + \xi\Omega_1^2\frac{\partial^2 U_1}{\partial\varphi^2} + \Omega_1\omega^2\frac{\partial^5 U_1}{\partial x^4\partial\varphi} + \xi\omega^2\frac{\partial^4 U_1}{\partial x^4} = F_1 +$$
$$+2\Omega_1(\Omega_1 A_1 + \xi aB_1)\cos\varphi Z_1 + 2\Omega_1(\xi A_1 - a\Omega_1 B_1)\sin\varphi Z_1. \qquad (3.36)$$

Trong đó $F_1 = F(x, a\cos\varphi, -a\Omega_1\sin\varphi, \ldots)$ đã biết còn $U_1 = U_1(x, a, \varphi)$ cần phải xác định phải thoả mãn các điều kiện biên sau:

$$U\Big|_{x=0} = 0 \quad , \qquad \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}\Big|_{x=0} = 0 \quad ,$$
$$U\Big|_{x=\ell} = 0 \qquad \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}\Big|_{x=\ell} = 0 . \tag{3.37}$$

Để tìm hàm U_1, ta khai triển hàm U_1 và F_1 theo các hàm riêng $\left\{\sin\frac{k\pi x}{\ell}\right\}$

$$U_1 = \sum_{k=1}^{\infty} U_{1k}(a,\varphi) Z_k(x), \tag{3.38}$$

$$F_1 = \sum_{k=1}^{\infty} F_{1k}(a,\varphi) Z_k(x), \tag{3.39}$$

$$F_{1k} = \int_0^{\ell} F_1 \sin\frac{k\pi x}{\ell} dx \bigg/ \int_0^{\ell} \sin^2\frac{k\pi x}{\ell} dx ,$$

$$F_{1k} = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} F_1 \sin\frac{k\pi x}{\ell} dx, \tag{3.40}$$

Các đại lượng (3.39) đã xác định cần xác định $U_{1k}(a,\varphi)$. Thay các đại lượng (3.38), (3.39) vào phương trình (3.36) ta có:

$$\Omega_1^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^3 U_{1k}}{\partial\varphi^3} Z_k + \xi\Omega_1^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 U_{1k}}{\partial\varphi^2} Z_k + \Omega_1\omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial U_{1k}}{\partial\varphi}\frac{\partial^4 Z_k}{\partial x^4} + \xi\omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} U_{1k}\frac{\partial^4 Z_k}{\partial x^4} =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} F_{1k} Z_k + 2\Omega_1(\Omega_1 A_1 + \xi a B_1)\cos\varphi Z_1 + 2\Omega_1(\xi A_1 - a\Omega_1 B_1)\sin\varphi Z_1 .$$

Cân bằng hệ số các hàm riêng đối với: k = 1 ta có:

$$\Omega_1^3 \frac{\partial^3 U_{11}}{\partial\varphi^3} Z_1 + \xi\Omega_1^2 \frac{\partial^2 U_{11}}{\partial\varphi^2} Z_1 + \Omega_1\omega^2 \frac{\partial U_{11}}{\partial\varphi}\frac{\pi^4}{\ell^4} Z_1 + \xi\omega^2 \frac{\pi^4}{\ell^4} U_{11} Z_1 = F_{11} Z_1 +$$
$$+ 2\Omega_1(\Omega_1 A_1 + \xi a B_1)\cos\varphi Z_1 + 2\Omega_1(\xi A_1 - a\Omega_1 B_1)\sin\varphi Z_1 \rightarrow$$

$$\Omega_1^3 \frac{\partial^3 U_{11}}{\partial\varphi^3} + \xi\Omega_1^2 \frac{\partial^2 U_{11}}{\partial\varphi^2} + \Omega_1^3 \frac{\partial U_{11}}{\partial\varphi} + \xi\Omega_1^2 U_{11} = F_{11} +$$
$$+ 2\Omega_1(\Omega_1 A_1 + \xi a B_1)\cos\varphi + 2\Omega_1(\xi A_1 - a\Omega_1 B_1)\sin\varphi \tag{3.41}$$

Với k = 2, 3, ... ta có:

$$\left[\Omega_1^3\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\partial^3 U_{1k}}{\partial\varphi^3}+\xi\Omega_1^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\partial^2 U_{1k}}{\partial\varphi^2}+\Omega_1\Omega_k^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\partial U_{1k}}{\partial\varphi}+\xi\Omega_k^2\sum_{k=2}^{\infty}U_{1k}\right]Z_k=\sum_{k=2}^{\infty}F_{1k}Z_k,$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left\{\left[\Omega_1^3\frac{\partial^3 U_{1k}}{\partial\varphi^3}+\xi\Omega_1^2\frac{\partial^2 U_{1k}}{\partial\varphi^2}+\Omega_1\Omega_k^2\frac{\partial U_{1k}}{\partial\varphi}+\xi\Omega_k^2 U_{1k}\right]Z_k\right\}=\sum_{k=2}^{\infty}F_{1k}Z_k,$$

$$\Omega_1^3\frac{\partial^3 U_{1k}}{\partial\varphi^3}+\xi\Omega_1^2\frac{\partial^2 U_{11}}{\partial\varphi^2}+\Omega_1\Omega_k^2\partial\frac{U_{1k}}{\partial\varphi}+\xi\Omega_k^2 U_{1k}=F_{1k}(a,\varphi), \tag{3.42}$$

với cách khai triển này hàm $U_1(a, \varphi, x)$ tự thoả mãn điều kiện biên (3.37).Để xác định $U_{1k}(a, \varphi)$ trong (3.38) một lần nữa hãy khai triển hàm $F_{1k}(a, \varphi)$ và $U_{1k}(a, \varphi)$ theo φ như sau:

$$U_{1k}=\sum_{n=0}^{\infty}[V_{1n}^{(k)}(a)\cos n\varphi+W_{1n}^{(k)}(a)\sin n\varphi], \tag{3.43}$$

$V_{1n}^{(k)}(a), W_{1n}^{(k)}(a)$ cần xác định

$$F_{1k}(a,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}[g_{1n}^{(k)}(a)\cos_n\varphi+h_{1n}^{(k)}(a)\sin n\varphi], \tag{3.44}$$

$$g_{10}^{(k)}(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F_{1k}(a,\varphi)d\varphi,\ g_{1n}^{(k)}(a)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F_{1k}(a,\varphi)\cos n\varphi d\varphi.$$

$$h_{1n}^{(k)}(a)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F_1(a,\varphi)\sin n\varphi d\varphi.$$

Các đại lượng $g_{1n}^{k}(a), h_{1n}^{(k)}(a)$ đã xác định. Từ phương trình (3.43) theo (3.42) cần tính các đại lượng sau:

$$\frac{\partial U_{1k}}{\partial\varphi}=\sum_{n=0}^{\infty}[-nV_{1n}^{(k)}(a)\sin n\varphi+nW_{1n}^{(k)}(a)\cos n\varphi]$$

$$\frac{\partial^2 U_{1k}}{\partial\varphi^2}=\sum_{n=0}^{\infty}[-n^2V_{1n}^{(k)}(a)\cos n\varphi-n^2W_{1n}^{(k)}(a)\sin n\varphi] \tag{3.45}$$

$$\frac{\partial^3 U_{1k}}{\partial\varphi^3}=\sum_{n=0}^{\infty}[+n^3V_{1n}^{(k)}(a)\sin n\varphi-n^3W_{1n}^{(k)}(a)\cos n\varphi]$$

với n = 1, k = 1 thay vào phương trình (3.41) ta có:

$$\begin{aligned}&+\Omega_1^3V_{11}^{(1)}(a)\sin\varphi-\Omega_1^3W_{11}^{(1)}(a)\cos\varphi-\xi\Omega_1^2V_{11}^{(1)}(a)\cos\varphi-\xi\Omega_1^2W_{11}^{(1)}(a)\sin\varphi-\Omega_1^3V_{11}^{(1)}(a)\sin\varphi+\\&+\Omega_1^3W_{11}^{(1)}(a)\cos\varphi+\xi\Omega_1^2V_{11}^{(1)}(a)\cos\varphi+\xi\Omega_1^2W_{11}^{(1)}(a)\sin\varphi=g_{11}^{(1)}(a)\cos\varphi+h_{11}^{(1)}(a)\sin\varphi+\\&+2\Omega_1(\Omega_1A_1+\xi aB_1)\cos\varphi+2\Omega_1(\xi A_1-a\Omega_1B_1)\sin\varphi\end{aligned} \tag{3.46}$$

Sau khi đơn giản dễ dàng suy ra:

$$g_{11}^{(1)}(a)\cos\varphi+h_{11}^{(1)}(a)\sin\varphi+2\Omega_1(\Omega_1A_1+\xi aB_1)\cos\varphi+2\Omega_1(\xi A_1-a\Omega_1B_1)\sin\varphi=0$$

$$2\Omega_1(\Omega_1 A_1 + \xi a B_1) = -g_{11}^{(1)}(a),$$
$$2\Omega_1(-\xi A_1 + a\Omega_1 B_1) = h_{11}^{(1)}(a). \tag{3.47}$$
$$\Omega_1 A_1 + \xi a B_1 = {-g_{11}^{(1)}(a)}\Big/{2\Omega_1},$$
$$-\xi A_1 + a\Omega_1 B_1 = {h_{11}^{(1)}(a)}\Big/{2\Omega_1}.$$
$$\xi\Omega_1 A_1 + \xi^2 a B_1 = -\xi g_{11}^{(1)}(a)/2\Omega_1,$$
$$-\xi\Omega_1 A_1 + a\Omega_1^2 B_1 = -\Omega_1 h_{11}^{(1)}(a)/2\Omega_1.$$
$$aB_1(\Omega_1^2 + \xi^2) = \frac{\Omega_1 h_{11}^{(1)}(a) - \xi g_{11}^{(1)}(a)}{2\Omega_1},$$
$$B_1 = -\frac{\left[\xi g_{11}^{(1)}(a) - \Omega_1 h_{11}^{(1)}(a)\right]}{2a\Omega_1(\xi^2 + \Omega_1^2)}. \tag{3.48}$$
$$\Omega_1^2 A_1 + \Omega_1\xi a B_1 = -\Omega_1 g_{11}^{(1)}(a)/2\Omega_1,$$
$$-\xi^2 A + \Omega_1 \xi a B_1 = +\xi h_{11}^{(1)}(a)/2\Omega_1$$
$$A_1 = -\frac{\left[\xi h_{11}^{(1)}(a) + \Omega_1 g_{11}^{(1)}(a)\right]}{2\Omega_1(\Omega_1^2 + \xi^2)}. \tag{3.49}$$

Như vậy ta đã xác định được các đại lượng A_1, B_1, trong phương trình (3.29)

$$g_{11}^{(1)}(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F_{11}(a,\varphi)\cos\varphi d\varphi,\ \ h_{11}^{(1)}(a) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F_{11}(a,\varphi)\sin\varphi d\varphi. \tag{3.50}$$

Có nhận xét rằng các đại lượng $V_{11}^{(1)}(a), W_{11}^{(1)}(a)$ có những giá trị như thế nào đi chăng nữa thì vế trái của phương trình (3.46) cũng bằng không, nói cách khác $V_{11}^{(1)}(a), W_{11}^{(1)}(a)$ không xác định. Để cho hàm $U_1(x, a, \varphi)$ có giá trị duy nhất thì ta lấy

$V_{11}^{(1)}(a) = 0, W_{11}^{(1)}(a) = 0$, có nghĩa là hàm $U_1(x, a, \varphi)$ không chứa các điều hoà thứ nhất $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, suy ra $< U_1\cos\varphi > = 0$, $< U_1\sin\varphi > = 0$.

Với (n = 2, 3, ...) thay (3.43) (3.44) vào (3.42) ta nhận được:

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\Omega_1^3 n^3 V_{1n}^{(k)}(a)\sin n\varphi - \sum_{n=0}^{\infty}\Omega_1^3 n^3 W_{1n}^{(k)}(a)\cos n\varphi - \sum_{n=0}^{\infty}\xi\Omega_1^2 n^2 V_{1n}^{(k)}(a)\cos n\varphi - \sum_{n=0}^{\infty}\xi\Omega_1^2 n^2 W_{1n}^{(k)}\sin n\varphi -$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}\Omega_1\Omega_r^2 n V_{1n}^{(k)}(a)\sin n\varphi + \sum_{n=0}^{\infty}\Omega_1\Omega_r^2 n W_{1n}^{(k)}(a)\cos n\varphi + \xi\Omega_r^2\sum_{n=0}^{\infty} V_{1n}^{(k)}(a)\cos n\varphi + \xi\Omega_r^2\sum W_{1n}^{(k)}(a)\sin n\varphi =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} g_{1n}^{(k)}(a)\cos n\varphi + \sum_{n=0}^{\infty} h_{1n}^{(k)}(a)\sin n\varphi,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[-\Omega_1^3 n^3 W_{1n}^{(k)}(a)-\xi\Omega_1^2 n^2 V_{1n}^{(k)}(a)+\Omega_1\Omega_r^2 n\text{-}W_{1n}^{(k)}(a)+\xi\Omega_r V_{1n}^{(k)}(a)\right]\cos n\varphi\right\}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[\Omega_1^3 n^3 V_{1n}^{(k)}(a)-\xi\Omega_1^2 n^2 W_{1n}^{(k)}(a)-\Omega_1\Omega_r^2 n V_{1n}^{(k)}(a)+\xi\Omega_r^2 W_{1n}^{(k)}(a)\right]\sin n\varphi\right\}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} g_{1n}^{(k)}\cos n\varphi+\sum_{n=0}^{\infty} h_{1n}^{(k)}(a)\sin n\varphi,$$

cân bằng điều hoà hệ số các cos φ, sin φ ta có:

$$\left.\begin{aligned}&-\Omega_1^3 n^3 W_{1n}^{(k)}(a)-\xi\Omega_1^2 n^2 V_{1n}^{(k)}+\Omega_1\Omega_k^2 n W_{1n}^{(k)}(a)+\xi\Omega_k^2 V_{1n}^{(k)}(a)=g_{1n}^{(k)}(a)\\&\Omega_1^3 n^3 V_{1n}^{(k)}(a)-\xi\Omega_1^2 n^2 W_{1n}^{(k)}(a)-\Omega_1\Omega_r^2 n V_{1n}^{(k)}(a)+\xi\Omega_k^2 W_{1n}^{(k)}(a)=h_{1n}^{(k)}(a),\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}&\left(\Omega_1\Omega_k^2 n-\Omega_1^3 n^3\right)W_{1n}^{(k)}(a)+(\xi\Omega_k^2-\xi\Omega_1^2 n^2)V_{1n}^{(k)}(a)=g_{1n}^{(k)}(a),\\&\xi(\Omega_k^2-n^2\Omega_1^2)W_{1n}^{(k)}(a)-\Omega_1 n(\Omega_k^2-n^2\Omega_1^2)=h_{1n}^{(k)}(a),\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}&\xi V_{1n}^{(k)}(a)+n\Omega_1 W_{1n}^{(k)}(a)=g_{1n}^{(k)}(a)/\left(\Omega_k^2-n^2\Omega_1^2\right),\\&\Omega_1 n V_{1n}^{(k)}(a)-\xi W_{1n}^{(k)}(a)=-h_{1n}^{(k)}(a)/\left(\Omega_k^2-n^2\Omega_1^2\right)\end{aligned}\right\}$$

từ hệ phương trình này dễ dàng tính được:

$$V_{1n}^{(k)}(a)=\frac{\left(\xi g_{1n}^{(k)}-n\Omega_1 h_{1n}^{(k)}(a)\right)}{(\xi^2+n^2\Omega_1^2)(\Omega_r^2-n^2\Omega_1^2)}\tag{3.51}$$

$$W_{1n}^{(k)}(a)=\frac{\left(n\Omega_1 g_{1n}^{(k)}(a)+\xi h_{1n}^{(k)}(a)\right)}{(\xi^2+n^2\Omega_1^2)(\Omega_k^2-n^2\Omega_1^2)}.\tag{3.52}$$

Thế các đại lượng đã được xác định từ (3.51), (3.52) vào (3.43) ta được:

$$U_{1k}(a,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[\xi g_{1n}^{(k)}(a)-n\Omega_1 h_{1n}^{(k)}(a)\right]\cos n\varphi+\left[n\Omega_1 g_{1n}^{(k)}(a)+\xi h_{1n}^{(k)}(a)\right]\sin n\varphi}{\left(\xi^2+n^2\Omega_1^2\right)\left(\Omega_k^2-n^2\Omega_1^2\right)}.\tag{3.53}$$

Từ (3.38), hàm U_1 được xác định như sau:

$$U_1(x,a,\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{[\xi g_{1n}^{(k)}(a)-n\Omega_1 h_{1n}^{(k)}(a)]\cos n\varphi+[n\Omega_1 g_{1n}^{(k)}(a)+\xi h_{1n}^{(k)}(a)]\sin n\varphi}{\left(\xi^2+n^2\Omega_1^2\right)\left(\Omega_k^2-n^2\Omega_1^2\right)}\right\}\sin\frac{k\pi x}{\ell}.\tag{3.54}$$

(khi k = 1, n ≠ 1)

Như vậy trong xấp xỉ thứ nhất hoàn thiện nghiệm (3.28) đã được xác định như sau:

$$y(x,t)=a\cos\varphi\sin\frac{\pi x}{\ell}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{\left[\xi g_{1n}^{(k)}(a)-n\Omega_1 h_{1n}^{(k)}(a)\right]\cos n\varphi+\left[n\Omega_1 g_{1n}^{(k)}(a)+\xi h_{1n}^{(k)}(a)\right]\sin n\varphi}{(\xi^2+n^2\Omega_1^2)+(\Omega_k^2-n^2\Omega_1^2)}\right\}\sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

(khi k = 1, n ≠ 1). (3.55)

Để thấy rõ các đặc trưng của hệ đàn hồi từ biến ta xét trường hợp khi lực kích động ngoài bằng không q(x, t) = 0 và hàm phi tuyến bằng không f(x, y, $\dot{y}$ ...) = 0, khi đó phương trình (2.7) có dạng:

$$\frac{\partial^3 y}{\partial t^3}+\xi\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\omega^2\frac{\partial^5 y}{\partial t\partial x^4}+\xi\omega^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=-\varepsilon\omega^2\frac{E_2}{E_1}\frac{\partial^5 y}{\partial t\partial x^4}. \tag{3.56}$$

trong trường hợp này hàm F_1 ở (3.36) có dạng đơn giản nhất khi thay

$$F_1=\frac{E_2}{E_1}\Omega_1^3 a\sin\varphi\sin\frac{\pi x}{\ell}$$

$$y=a\cos\varphi\sin\frac{\pi x}{\ell}=a\cos(\Omega_1 t+\psi)\sin\frac{\pi x}{\ell}$$

vào vế phải của phương trình (3.36) ta có:

$$F_1=-\frac{E_2}{E_1}\omega^2\frac{\partial^5}{\partial t\partial x^4}\left[a\cos\varphi\sin\frac{\pi x}{\ell}\right]$$

$$F_1=\frac{E_2}{E_1}\omega^2\frac{\pi^4}{\ell^4}a\sin\varphi\sin\frac{\pi x}{\ell}$$

$$F_1=\frac{E_2}{E_1}\Omega_1^3 a\sin\varphi\sin\frac{\pi x}{\ell}. \tag{3.57}$$

Theo (3.39) cần khai triển hàm $F_1(a, \varphi, x)$ theo các hàm riêng $Z_k(x)=\sin\frac{k\pi x}{\ell}$,

$F_1=\sum_{k=1}^{\infty}F_{1k}(a,\varphi)Z_k(x)$ trong trường hợp này chỉ có số hạng

$$F_1=\sum_{k=1}^{\infty}F_{1k}(a,\varphi)Z_k(x)=\frac{E_2}{E_1}\Omega_1^3 a\sin\varphi\sin\frac{\pi x}{\ell}. \tag{3.58}$$

Tức là: $\quad F_1=F_{11}(a,\varphi)Z_1(x)=\frac{E_2}{E_1}\Omega_1^3 a\sin\varphi\sin\frac{\pi x}{\ell}$

$$F_{11}(a,\varphi)=\frac{E_2}{E_1}\Omega_1^3 a\sin\varphi. \tag{3.59}$$

Cũng theo (3.44) cần khai triển hàm $F_{1k}(a, \varphi)$ thành chuỗi lượng giác

$$F_{1k}(a,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}(g_{1n}^{(k)}(a)\cos n\varphi+h_{1n}^{(k)}(a)\sin n\varphi)$$

trong trường hợp này có dạng đơn giản nhất

$$F_{1k}(a,\varphi)=F_{11}(a,\varphi)=\frac{E_2}{E_1}\Omega_1^3 a\sin\varphi.$$

Dễ dàng nhận thấy rằng:

$$g_{11}^{(1)}(a)=0\ \text{, còn}\ h_{11}^{(1)}(a)=\frac{E_2}{E_1}\Omega_1^3 a. \tag{3.60}$$

Theo các công thức (3.48), (3.49) xác định được A_1, B_1

$$A_1 = -\frac{\xi E_2 \Omega_1^2}{2E_1\left(\Omega_1^2 + \xi^2\right)} a, \quad B_1 = \frac{\Omega_1 E_2 \Omega_1^2}{2E_1(\Omega_1^2 + \xi^2)} \tag{3.61}$$

$$\frac{da}{dt} = -\varepsilon\xi\, C\, a, \quad \frac{d\psi}{dt} = \varepsilon\Omega_1 C, \; C = \frac{E_2\Omega_1^2}{2E_1(\Omega_1^2 + \xi^2)},$$

$$a = a_0\, e^{-\varepsilon\xi C t}, \qquad \varphi = \Omega_1[1 + \varepsilon\ C)t + \psi_0]. \tag{3.62}$$

a_0, ψ_0 là các hằng số được xác định từ điều kiện đầu.

Từ (3.62) dễ dàng nhận thấy rằng, mặc dù không có lực cản ngoài mà dao động tự do vẫn tắt dần khi thời gian tăng vô cùng. Chứng tỏ tính từ biến của vật liệu làm giảm biên độ dao động tương tự như lực cản nhớt và làm tăng tần số riêng một lượng nhỏ cỡ $\varepsilon(\varepsilon\ C)$.

Đó là các kết quả mới thu nhận được của hệ dao động đàn hồi từ biến khác biệt so với hệ dao động theo mô hình đàn hồi thông thường mà chúng ta đã gặp.

IV. KẾT LUẬN

Đã thiết lập được phương trình dao động ngang của dầm đàn hồi theo mô hình từ biến. Chuyển động của nó được mô tả bằng phương trình vi phân cấp 3 đối với thời gian t, điều mà trước đây ta chưa gặp theo mô hình đàn hồi thông thường.

Đã xây dựng được mô hình tìm nghiệm riêng của bài toán đó bằng phương pháp tiệm cận đối với phương trình vi phân cấp 3 đối với hệ ô-tô-nôm. Còn hệ không ô-tô-nôm sẽ được nghiên cứu ở bài báo sau.

Bước đầu đã nêu được các đặc trưng của hệ đàn hồi từ biến làm tăng tần số riêng một lượng nhỏ cỡ (ε). Tính từ biến đã tạo ra một lực cản chuyển động tương tự như cản nhớt.

Đó là các kết quả đã thu nhận được.

Lời cảm ơn. Công trình này là kết quả của đề tài NCCB do bộ Khoa học và Công nghệ tài trợ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Văn Đạo - Những phương pháp cơ bản của lý thuyết dao động phi tuyến, Nhà xuất bản ĐH và THCN, Hà Nội, 1971.
2. Nguyễn Văn Đạo - Non- linean oscillations of high order sytems, Nationl center for scientific research of Vietnam Hanoi, 1979.
3. Rgianisưn . A.P - Lí thuyết từ biến, Nhà xuất bản xây dựng Matxcova, 1968 (tiếng Nga).
4. Mitrôpônski. I U. A - Nghiệm tiệm cận của phương trình đạo hàm riêng, Nhà xuất bản Kiep, 1968.
5. Hoàng Văn Đa - Dao động thông số của bản mỏng chữ nhật đàn nhớt, Tạp chí Cơ học ứng dụng Kiep **19** (12) (1984) 120-124 .
6. S.P . Timôsenkô - Những vấn đề dao động trong kĩ thuật, Nhà xuất bản Khoa học, Hà Nội, 1963 (bản dịch tiếng Việt).

7. Nguyễn Tiến Khiêm - Cơ sở động lực học công trình" Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2004.

8. Hoàng Văn Đa - Dao động thông số của dầm tính đến từ biến của vật liệu và điều kiện biên phi tuyến, Tạp chí Cơ học ứng dụng, Romania **29** (5) (1984) 465-475.

SUMMARY

THE OSCILLATIONS OF A CREEPY ELASTIC BEAM

In this work, the authors have investigated the oscillation of creepy elastic beam homogenous linear boundary conditions.

It's motional equation which was setup. It is easy to see that the motion of the creepy is described by the partial deriving equation of third order with respect to argument t.

Solution of this equation has been found by means of an asymptotic method for higher order systems. It is the better first approximation the solution of the boundary value problem is determined. After series of simple calculations, it is easy to prove that, when taking into account the creepy property of the material the amplitude of oscillations was decreased and the natural frequency is increased

It is the new results which we now obtain.

Địa chỉ:

Trường Đại học Mỏ - Địa chất Hà Nội.

Nhận bài ngày 7 tháng 4 năm 2006