TẠP CHÍ KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ Tập 45, số 6(ĐB), 2007 Tr. 141-178

TÓM TẮT MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO SUY RỘNG VÀ ỨNG DỤNG

NGUYỄN TOÀN THẮNG, NGUYỄN THÚY ANH, NGUYỄN NGỌC SAN

GIỚI THIỆU

Vai trò của đại cương hóa ánh xạ nói chung và của ma trận nói riêng đang được xác lập trong các ngành khoa học khác nhau và là mục tiêu nghiên cứu của một trong các tác giả. Bài báo trình bày tóm tắt những vấn đề thuộc lí luận cơ bản về nghịch đảo suy rộng và một số ứng dụng đã được các tác giả đề xuất để xử lí các bài toán nhận dạng hệ động học thuộc lí thuyết hệ thống.

I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO SUY RỘNG

1.1. Sự tồn tại của ma trận nghịch đảo suy rộng

1.1.1. Hệ các phương trình Penrose

Năm 1955, Penrose chỉ ra rằng tất cả các ma trận A có kích thước hữu hạn, có các thành phần thực hay phức đều tồn tại một ma trận nghịch đảo suy rộng duy nhất X thoả mãn đồng thời bốn biểu thức sau:

$$AXA = A \tag{1.1.1}$$

$$XAX = X \tag{1.1.2}$$

$$(AX)^{*} = AX \tag{1.1.3}$$

$$(XA)^{*} = XA \tag{1.1.4}$$

trong đó, dấu "*" biểu thị chuyển vị phức của ma trận trong dấu (.). Do tính duy nhất của *ma trận nghịch đảo suy rộng* thoả mãn cả bốn phương trình trên được E. H. Moore nghiên cứu trước đó nên X thường được biết đến là *nghịch đảo Moore-Penrose* hay *tựa nghịch đảo* và được kí hiệu là A .

Ta thường quan tâm tới các ma trận nghịch đảo suy rộng thoả mãn một vài chứ không phải toàn bộ bốn phương trình trên. Vì mỗi loại nghịch đảo suy rộng có các tính chất khác nhau, nên ta có thể quy ước các tên gọi riêng thường gặp trong các tài liệu tham khảo chuyên ngành như sau:

(i). *Một nghịch đảo suy rộng chung* của A là $X = A^{g} = A^{(1)} \in A\{1\}$ thoả mãn (1.1.1).

(ii). *Một nghịch đảo suy rộng phản thân* (reflexive) của A là $X = A^{r} = A^{(1,2)} \in A\{1,2\}$ thoả mãn (1.1.1) và (1.1.2).

(iii). *Một nghịch đảo suy rộng trái yếu* (left weak) của A là $X = A^{w} = A^{(1,2,3)} \in A\{1,2,3\}$ thoả mãn (1.1.1), (1.1.2) và (1.1.3).

(iv). *Một nghịch đảo suy rộng phải yếu* (right weak) của A là $X = A^{n} = A^{(1,2,4)} \in A\{1,2,4\}$ thoả mãn (1.1.1), (1.1.2) và (1.1.4).

Để tiện, kí hiệu C^{mxn} hoặc [R^{mxn}] hay C_r^{mxn} hoặc [R_r^{mxn}] biểu thị lớp các ma trận có các thành phần phức hoặc [thực], kích thước *mxn* đối với trường hợp không nói tới hạng hay có hạng *r*.

1.1.2. Sự tồn tại và tính chất của các nghichj đảo {1}

Định nghĩa 1.1.1: *Một ma trận trong C_r^{mxn} hoặc [R_r^{mxn}] được gọi là có dạng Hermite chuẩ hay dạng bậc thang theo các hàng nếu:*

(i). Mỗi một trong r hàng đầu tiên chứa ít nhất một thành phần khác 0; các hàng còn lại ch chứa các thành phần bằng 0.

(ii). r cột đầu tiên của ma trận đơn vị I_m xuất hiện trong các cột $c_1, c_2, \ldots, c_r$.

Bằng cách áp dụng phép hoán vị thích hợp các cột, một ma trận có dạng chuẩn Herimt $H \in C_r^{mxn}$ có thể được phân thành khối như sau:

$$H = \begin{bmatrix} I_r & K \\ O & O \end{bmatrix} \quad (1.1.5$$

trong đó, O biểu diễn khối có tất cả các thành phần bằng 0.

Định lí 1.1.1: *Cho $A \in C_r^{mxn}$, $E \in C_r^{mxm}$ và $P \in C_r^{nxn}$, sao cho:*

$$EAP = \begin{bmatrix} I_r & K \\ O & O \end{bmatrix} \quad (1.1.6$$

với bất kì $L \in C^{(n-r)x(m-r)}$, ma trận kích thước nxm có dạng như sau:

$$X = P\begin{bmatrix} I_r & K \\ O & L \end{bmatrix}E \quad (1.1.7$$

là một nghịch đảo {1} của A.

Chứng minh: Biểu thức (1.1.6) có thể được viết thành $A = E^{-1}\begin{bmatrix} I_r & K \\ O & L \end{bmatrix}P^{-1}$. Từ đó ta thấy bấ kể X nào xác định bởi (1.1.7) đều thoả mãn (1.1.1).

Bổ đề 1.1.1: *Cho $A \in C^{mxn}$, $\lambda \in C$ thì:*

(a). $(A^{(1)})^* \in A^*\{1\}$,

(b). *Nếu A không suy biến thì $A^{(1)} = A^{-1}$,*

(c). $\lambda^+ A^{(1)} = (\lambda A)\{1\}$,

(d). *Hạng $A^{(1)} \geq$ hạng A,*

(e). *Nếu S và T không suy biến, $T^{-1}A^{(1)}S^{-1} = SAT\{1\}$,*

(f). *$AA^{(1)}$ và $A^{(1)}A$ là đẳng luỹ và có hạng bằng hạng của A.*

Chứng minh: Các điều kiện về hạng thu được nhờ bất đẳng thức Sylvester về hạng của ma trậ tích đem lại.

Đối với một ma trận A kích thước *mxn*, các nghịch đảo [1] là nghịch đảo trái nếu có hạng đầy đủ theo cột và là nghịch đảo phải nếu có hạng đầy đủ theo hàng.

Bổ đề 1.1.2: *Cho $A \in C_r^{mxn}$, thì:*

(a). *$A^{(1)}A = I_n$ khi và chỉ khi $r = n$,* (b). $AA^{(1)} = I_m$ *khi và chỉ khi r = m.*

Chứng minh: Dùng Bổ đề 1.1.1.

1.1.3. Cơ sở của không gian xác định và của không gian không

Với $A \in C^{mxn}$ bất kì, ta sử dụng kí hiệu:

$\mathcal{R}(A) = \{y = C^m : y = Ax \text{ với } x \in C^m\}$ là không gian xác định của A,

$\mathcal{N}(A) = \{x = C^n : Ax = 0\}$ là không gian không của A.

1.1.4. Sự tồn tại và cấu trúc của các ngịc đảo {1,2}

Bjerhammar đã chỉ ra sự tồn tại nghịch đảo {1} của A bất kì ám chỉ sự tồn tại nghịch đảo {1,2} của ma trận đó và được thể hiện ở bổ đề sau đây.

Bổ đề 1.1.3: *Cho $Y, Z \in A\{1\}$ và cho $X = YAZ$. Thì $X \in A\{1,2\}$.*

Chứng minh: Do A và X xuất hiện đối xứng nhau trong các phương trình Pensore nên $X \in A\{1,2\}$ và $A \in X\{1,2\}$.

Định lí 1.1.2: *Cho A và $X \in A\{1\}$, thì $X \in A\{1,2\}$ khi và chỉ khi hạng của X bằng hạng của A.*

Chứng minh: Dùng bổ đề 1.1.1.(f) chứng minh khi và bổ đề 1.1.2 chứng minh chỉ khi.

1.1.5. Sự tồn tại và cấu trúc của nghịch đảo {1,2,3}, {1,2,4}, {1,2,3,4}

Đối với một ma trận bất kì A có kích thước hữu hạn, sự tồn tại nghịch đảo {1,2,3} và nghịch đảo {1,2,4} của ma trận đó có nghĩa là sự không rỗng của $A\{1,2,3\}$ và $A\{1,2,4\}$.

Định lí 1.1.3: *Với ma trận bất kì A có kích thước hữu hạn thì:*

$$Y = (A^*A)^{(1)}A^* \in A\{1,2,3\} \tag{1.1.8}$$

và

$$Z = A^*(AA^*)^{(1)} \in A\{1,2,4\} \tag{1.1.9}$$

Chứng minh: Dùng Bổ đề 1.1.1.(d) và Định lí 1.1.2 để chứng tỏ hạng Y bằng hạng A và AY, AZ có dạng Hermite.

Định lí 1.1.4: *Với ma trận A có kích thước hữu hạn thì:*

$$A^{(1,4)}AA^{(1,3)} = A^+ \tag{1.1.10}$$

Chứng minh: Kí hiệu bên trái của (1.1.10) là X. Từ Bổ đề 1.1.3, $X \in A\{1,2\}$. Hơn nữa, $AX = AA^{(1,3)}$, $XA = A^{(1,4)}A$, cả hai đều dạng Hermite. Vì vậy, $X \in A\{1,2,3,4\}$ và duy nhất.

1.1.6. Thừa số hóa A^+

Bổ đề 1.1.4: *Cho $A \in C_r^{mxn}$, r>0. Thì tồn tại ma trận $F \in C_r^{mxr}$ và $G \in C_r^{rxn}$ sao cho:*

$$A = FG \tag{1.1.11}$$

Chứng minh: Chọn F có các cột là một cơ sở của $\mathcal{R}(A)$ thì $F \in C_r^{mxn}$, $G \in C_r^{mxn}$ được xác định duy nhất vì mỗi cột của A chỉ có thể được biểu diễn bởi một tổ hợp tuyến tính duy nhất theo các cột của F và có hạng là r. Biểu thức (1.1.11) được biết đến là *thừa số hoá theo toàn hạng của A*.

Định lí 1.1.5: *Nếu* $A \in C_r^{mxn}$, *r>0, có thừa số hoá theo toàn hạng dạng* (1.1.11) *thì:*

$$A^+ = G^*(F^*AG^*)^{-1}F^* \qquad (1.1.1$$

Chứng minh: Trước hết dùng Bổ đề 1.1.4 ($F^*AG^*=(F^*F)(GG^*)$) để chỉ ra F^*AG^* không suy bi Sau đó đặt $X = G^*(GG^*)^{-1}(F^*F)^{-1}F^*$ và dễ thấy X thoả mãn (1.1.1) - (1.1.4). Do A^+ là thành ph duy nhất của $A\{1,2,3,4\}$ nên (1.1.12) được thiết lập.

1.1.7. Khái niệm về các chuẩn và bán kính không gian ánh xạ

Định nghĩa 1.1.2: *Đối với p ≥ 1, hàm số* $\|x\|_p = \left\{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right\}^{1/p}$ *là một chuẩn véctơ trên* C^n *được gọi là chuẩn* l_p *của vectơ.*

Chuẩn phổ biến nhất khi $p = 1, 2$ và ∞. Chuẩn l_1: $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$, l_2 hay Eucli $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2} = (x^*x)^{1/2}$ và l_∞ hay Tchebycheff: $\|x\|_\infty = \max\{|x_j| : j = 1, 2, ..., n\}$.

Nếu tồn tại hai giá trị vô hướng $\alpha = \inf\{\|x\|_2 : \|x\|_1 = 1\}$, $\beta = \sup\{\|x\|_2 : \|x\|_1 = 1\}$ sao c $\alpha\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \beta\|x\|_1$ thì chuẩn $\| \ \|_1$ và $\| \ \|_2$ tương đương nhau trên C^m. Hai chuẩn bất kì t C^m đều tương đương nếu $\lim_{k\to\infty}\|x_k\| = 0$.

Định nghĩa 1.1.3: *Một hàm thực* $\| \ \|$ *trên* C^{nxm} *gọi là chuẩn ma trận nếu thoả mãn:*

(a). $\|A\| \ge 0$, $\|A\| = 0$ *chỉ khi* $A = 0$,

(b). $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$, *với mọi* $\alpha \in C$,

(c). $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$ *với tất cả A, B* $\in C^{nxm}$,

(d). $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$ *khi ma trận tích AB xác định.*

Tương tự như chuẩn véctơ, chuẩn ma trận $\|A\|_p$ thường gặp nhất khi $p = 1, 2$ và ∞.

Định nghĩa 1.1.4: *Một véctơ x và một ma trận A được gọi là chuẩn tự hợp nếu Ax xác định* $\|Ax\| \le \|A\|\|x\|$ *và* $\|A\|_* = \sup_{x\ne 0}\frac{\|Ax\|_*}{\|x\|_*}$.

Định nghĩa 1.1.5: *Bán kính ánh xạ* $\rho(A)$ *của ma trận vuông* $A \in C_r^{nxn}$ *là giá trị tuyệt đối lớn n trong r giá trị riêng của A;* $\rho(A) = \max\{|\lambda_i|$: λ_i *là một giá trị riêng của A*$\}$.

Định nghĩa 1.1.6: *Một ma trận vuông A được gọi là hội tụ nếu* $A^k \to 0$ *khi* $k \to 0$*, h* $\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j A^j = (I + A)^{-1}$ *hoặc* $\sum_{j=0}^{\infty}(+1)^j A^j = (I - A)^{-1}$.

1.2. Đặc tính cơ bản của các loại nghịch đảo suy rộng

1.2.1. Nghiệm của các hệ phương trình tuyến tính

1.2.1.1. Tính chất của nghịch đảo {1}

Định lí 1.2.1: *Cho $A \in C^{mxn}$, $B \in C^{pxq}$, $D \in C^{mxq}$. Thì:* $AXB = D$ (1.2.1)

có nghiệm khi và chỉ khi với một số $A^{(1)}$, $B^{(1)}$ hợp thức theo nghĩa:

$$AA^{(1)}DB^{(1)}B = D \tag{1.2.2}$$

và nghiệm tổng quát có dạng: $X = A^{(1)}DB^{(1)} + Y - A^{(1)}AYB^{(1)}B, \quad \forall y \in C^{pxq}$ (1.2.3)

Chứng minh: Nếu (1.2.2) đúng thì $X = A^{(1)}DB^{(1)}$ là một nghiệm của (1.2.1). Ngược lại, nếu X là một nghiệm của (1.2.1) thì $D = AXB = AA^{(1)}AXBB^{(1)}B = AA^{(1)}DBB^{(1)}$. Hơn nữa, từ (1.2.2) và định nghĩa $A^{(1)}$ và $B^{(1)}$ suy ra rằng tất cả X có dạng (1.2.3) đều thoả mãn (1.2.1). Mặt khác nếu X là một nghiệm bất kì của (1.2.1), $X = A^{(1)}DB^{(1)} + X - A^{(1)}AXBB^{(1)}$ có dạng của (1.2.3).

Hệ quả 1.2.1: *Cho $A \in C^{mxn}$, $A^{(1)} \in A\{1\}$. Thì:* $A\{1\} = \{A^{(1)} + Z - A^{(1)}AZAA^{(1)} : Z \in C^{nxm}\}$ (1.2.4)

Chứng minh: Tập mô tả bên vế phải thu được bằng cách viết $Y = A^{(1)} + Z$.

Định lí 1.2.2: *Các phương trình ma trận:* $AX = B, XD = E$ (1.2.5)

có nghiệm chung khi và chỉ khi mỗi phương trình riêng lẻ có một nghiệm và $AE = BD$.

Chứng minh: (+) Khi: Với $A^{(1)}$, $D^{(1)}$ bất kì thì $X = A^{(1)}B + ED^{(1)} - A^{(1)}AED^{(1)}$ là một nghiệm chung của (1.2.5) khi $AE = BD$ và $AA^{(1)}B = B$, $ED^{(1)}D = E$. Theo định lí 1.2.1, hai phương trình sau tương đương với sự thoả mãn của các phương trình (1.2.4) khi được viết riêng. (+) Chỉ khi: Hiển nhiên.

1.2.1.2. Tính chất của nghịch đảo {1,3} và {1,4}

Định lí 1.2.3: *Tập $A\{1,3\}$ bao gồm tất cả các nghiệm X của* $AX = AA^{(1,3)}$ (1.2.6)
trong đó, $A^{(1,3)}$ là một thành phần bất kì của $A\{1,3\}$.

Chứng minh: Nếu X thoả mãn (1.2.6) thì $AXA = AA^{(1,3)}A = A$. Vì $AA^{(1,3)}$ là một Hermite nên $X \in A\{1,3\}$. Mặt khác, nếu $X \in A\{1,3\}$, thì

$$AA^{(1,3)} = AXAA^{(1,3)} = (AX)^{*}AA^{(1,3)} = X^{*}A^{*}(A^{(1,3)})^{*}A^{*} = X^{*}A^{*} = AX.$$

Hệ quả 1.2.2: $A \in C^{mxn}$, $A^{(1,3)} \in A\{1,3\}$. *Thì:* $A\{1,3\} = \{A^{(1,3)} + (I - A^{(1,3)}A)Z : Z \in C^{nxm}\}$ (1.2.7)

Chứng minh: Áp dụng định lí 1.2.1 đối với (1.2.6) rồi thay Y bằng $Z + A^{(1,3)}$.

Định lí 1.2.4: *Tập $A\{1,4\}$ gồm tất cả các nghiệm X của* $XA = A^{(1,4)}A$ (1.2.8)
trong đó, $A^{(1,4)}$ là một thành phần bất kì của $A\{1,4\}$.

Chứng minh: Tương tự như chứng minh Định lí 1.2.3.

__Hệ quả 1.2.3__: Cho $A \in C^{mxn}$, $A^{(1,4)} \in A\{1,4\}$. Thì:

$$A\{1,4\} = \{A^{(1,4)} + Y(I - AA^{(1,4)}): Y \in C^{nxm}\} \qquad (1.2.9$$

Chứng minh: Tương tự như Hệ quả 1.2.2, áp dụng Định lí 1.2.1 đối với (1.2.8).

1.2.1.3. Tính chất của nghịch đảo {2}, {1,2} và các tập con của {2}

Biểu thức (1.1.2), $XAX = X$, có tính phi tuyến đối với X, nên ta không thể thu được tín chất của $A\{2\}$ nếu chỉ áp dụng Định lí 1.2.1.

__Định lí 1.2.5__: Cho $A \in C_r^{mxn}$, $r \geq s > 0$. Nếu dùng s để chỉ hạng của tập con ta có:

$$A\{2\}_s = \{YZ: Y \in C^{nxs}, Z \in C^{sxm}, ZAY = I_s\} \qquad (1.2.10$$

Chứng minh: Cho $X = YZ$ là phép thừa số hoá đủ theo hạng thì Y, Z và X có hạng bằng s. Hơ nữa, $XAX = YZAYZ = YZ = X$. Mặt khác, đặt $X \in A\{2\}_s$, thì $Y \in C_s^{nxs}$, $Z \in C_s^{sxm}$ và $YZAYZ = YZ$ Ngoài ra, nếu $Y^{(1)}$, $Z^{(1)}$ là các nghịch đảo {1} bất kì thì $Y^{(1)}Y = ZZ^{(1)} = I_s$. Từ đó ta có $ZAY = I_s$.

__Hệ quả 1.2.4__: Cho $A \in C_r^{mxn}$. Thì: $A\{1,2\} = \{YZ: Y \in C^{nxr}, Z \in C^{rxm}, ZAY = I_r\}$ (1.2.11

Chứng minh: Theo Định lí 1.1.2 thì $A\{1,2\} = A\{2\}_r$.

__Định lí 1.2.6__: Cho $A \in C_r^{mxn}$, $r \geq s > 0$. Nếu dùng s để chỉ hạng của tập con ta có:

$$A\{2,3\}_s = \{Y(AY)^+: AY \in C_s^{mxs}\} \qquad (1.2.12$$

$$A\{2,4\}_s = \{(AY)^+Y: YA \in C_s^{sxn}\} \qquad (1.2.13$$

Chứng minh: Tương tự như chứng minh Định lí 1.2.5.

1.2.2. Ma trận đẳng luỹ và phép chiếu

1.2.2.1. Ma trận đẳng luỹ

__Định nghĩa 1.2.1__: Ma trận A có tính chất $A^2 = A$ thì được gọi là ma trận đẳng luỹ.

__Bổ đề 1.2.1__: Đối với ma trận đẳng luỹ $E \in C^{nxn}$, thì:

(a). *E^* và $(I - E)$ là đẳng luỹ,*

(b). *Các trị riêng của E là 0 và 1. Số trị riêng có giá trị 1 là hạng của E,*

(c). *Hạng của E bằng trace E,*

(d). *$E(I - E) = (I - E)E = 0$,*

(e). *$Ex = x$ khi và chỉ khi $x \in \mathcal{R}(E)$,*

(f). *$E \in E\{1,2\}$,*

(g). *$\mathcal{N}(E) = \mathcal{R}(I - E)$.*

Chứng minh: Từ (a) tới (f) rút ra từ định nghĩa về tính không đổi. (g) thu được từ việc phương trình $Ex = 0$.

***Bổ đề 1.2.2**: Cho ma trận vuông E được thừa số hoá đủ theo hạng $E = FG$. Thì E là đẳng luỹ khi và chỉ khi $GF = I$.*

Chứng minh: Nếu $GF = I$, thì $(FG)^2 = FGFG = FG$. Mặt khác, do F có hạng đầy đủ theo cột, G có hạng đầy đủ theo hàng, nên $F^{(1)}F = GG^{(1)} = I$.

1.2.2.2. Phép chiếu

Với hai tập bất kì L, M trên C^n, định nghĩa tổng của L và M như sau:

$$L + M = \{y + z: y \in L, z \in M\}.$$

Nếu L, M là các không gian con của C^n, thì $L+M$ cũng là không gian con của C^n. Hơn nữa, nếu $L \cap M = \{0\}$ thì $L+M$ được gọi là *tổng trực tiếp* và kí hiệu là $L \oplus M$. Hai không gian L và M của C^n được gọi là *bù nhau* nếu $C^n = L \oplus M$, khi đó có thể biểu diễn mỗi $x \in C^n$ một cách duy nhất $x = y + z$ ($y \in L$, $z \in M$) và y được biết đến là *hình chiếu của x trên L theo phương M*. Kí hiệu $P_{L,M}$ là *hình chiếu trên L theo M*.

$Ax = y$ với $A \in C^{m \times n}$, $x \in C^n$, $y \in C^m$ có thể được coi như phép biến đổi tuyến tính A thực hiện ánh xạ x vào y.

1.2.2.3. Quan hệ giữa ma trận đẳng luỹ và phép chiếu

***Định lí 1.2.7**: Với mỗi ma trận đẳng luỹ $E \in C^{n \times n}$, $\mathcal{R}(E)$ và $\mathcal{N}(E)$ là các không gian con bù với nhau:*

$$E = P_{\mathcal{R}(E), \mathcal{N}(E)} \tag{1.2.14}$$

Ngược lại, nếu L và M là các không gian con bù nhau, thì tồn tại một ma trận đẳng luỹ duy nhất $P_{L,M}$ sao cho $\mathcal{R}(P_{L,M}) = L$, $\mathcal{N}(P_{L,M}) = M$.

Chứng minh: Giả sử E là một ma trận đẳng luỹ bậc n. Dùng Bổ đề 1.2.1.(e), (g) và hai phương trình $x = Ex + (I - E)x$ và $Ex = (I - E)y$ để suy ra tương ứng $\mathcal{R}(E) \oplus \mathcal{N}(E) = C^n$ và $\mathcal{R}(E) \cap \mathcal{N}(E) = \{0\}$. Nghĩa là $\mathcal{R}(E)$ và $\mathcal{N}(E)$ bù nhau và Ex là phép chiếu của x trên $\mathcal{R}(E)$ theo phương $\mathcal{N}(E)$.

Gọi $\{x_1, x_2, \ldots, x_l\}$ và $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ là các cơ sở của L và M. Nếu $P_{L,M}$ tồn tại thì sẽ được xác định duy nhất bởi $\begin{cases} P_{L,M}x_i = x_i \left(i = 1, 2, \ldots, l\right) \\ P_{L,M}y_i = x_i \left(i = 1, 2, \ldots, m\right) \end{cases}$, hay $P_{L,M}[XY] = [XO]$. Vì $[XY]$ không suy biến, $P_{L,M} = [XO][XY]^{-1}$ nên $P_{L,M}[XO] = [XO]$ hay $P_{L,M}$ không đổi.

***Hệ quả 1.2.5**: Nếu A và X là các nghịch đảo $\{1,2\}$ của nhau, thì AX là phép chiếu trên $\mathcal{R}(A)$ theo phương $\mathcal{N}(X)$, và XA là phép chiếu trên $\mathcal{R}(X)$ theo phương $\mathcal{N}(A)$.*

Chứng minh: Hiển nhiên.

***Định lí 1.2.8**: Cho $A \in C_r^{m \times n}$, $\mathcal{R}(A) = L$, $\mathcal{N}(A) = M$, $L \oplus S = C^m$ và $M \oplus T = C^n$. Thì:*

(a). *X là một nghịch đảo* $\{1\}$ *của A sao cho* $\mathcal{N}(AX) = S$ *và* $\mathcal{R}(XA) = T$ *khi và chỉ khi* $AX = P_{L,S}$, $XA = P_{T,M}$,

(b). *Biểu thức tổng quát:* $X = P_{T,M}A^{(1)}P_{L,S} + (I_n - A^{(1)}A)Y(I_m - AA^{(1)})$, *trong đó,* $A^{(1)}$ *là một thành phần ngẫu nhiên của* $A\{1\}$ *và Y là một thành phần tuỳ ý của* C^{nxm},

(c). $A^{(1,2)}_{T,S} = P_{T,M}A^{(1)}P_{L,S}$ *là nghịch đảo* $\{1,2\}$ *duy nhất của A có không gian xác định T và không gian không S.*

Chứng minh: Dùng Định lí 1.2.7 và các phần (e), (f) và (d) của Bổ đề 1.2.1. Trong đó, chú ý $X = P_{T,M}A^{(1)}P_{L,S}$ là nghịch đảo $\{1\}$ của A, có hạng bằng hạng của $P_{L,S}$ là r nên X là nghịch đảo $\{1,2\}$ của A và có miền T và không gian không S thoả mãn $XAX = X$. Nghĩa là, cả (a), (b) và (c) có một nghiệm chung.

Định lí 1.2.9: *Cho* $A \in C_r^{mxn}$, $U \in C^{nxp}$, $V \in C^{qxm}$ *và* $X = U(VAU)^{(1)}V$, *với* $(VAU)^{(1)}$ *là thành phần không đổi, bất kì của* $(VAU)\{1\}$ *thì:*

(a). $X \in A\{1\}$ *khi và chỉ khi hạng của VAU bằng r,*

(b). $X \in A\{2\}$ *và* $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(U)$ *khi và chỉ khi hạng của VAU bằng hạng của U,*

(c). $X \in A\{2\}$ *và* $\mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(V)$ *khi và chỉ khi hạng của VAU bằng hạng của V,*

(d). $X = A^{(1,2)}_{\mathcal{R}(U),\mathcal{N}(V)}$ *khi và chỉ khi hạng của U bằng hạng của V bằng hạng của VAU và bằng r.*

Chứng minh: Hiển nhiên. Có thể sử dụng định lí này để chứng minh Định lí 1.2.8 với các nghịch đảo $\{2\}$ khác, không chỉ các nghịch đảo $\{1,2\}$.

Định lí 1.2.10: *Cho* $A \in C_r^{mxn}$, *T kích thước* $s \le r$ *là không gian con của* C^n *và S kích thước (m-s) là không gian con của* C^m. *Thì A có một nghịch đảo* $\{2\}$ *duy nhất kí hiệu X sao cho* $\mathcal{R}(X) = T$ *và* $\mathcal{N}(X) = S$ *khi và chỉ khi* $AT \oplus S = C^m$.

Chứng minh: Vì VAU không suy biến nên $X = U(VAU)^{-1}V$ là một nghịch đảo $\{2\}$ của A, có không gian xác định T và không gian không S. Hơn nữa, $AT = \mathcal{R}(AX)$ và $S = \mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(AX)$. Sau đó dùng phép chiếu để chứng minh tính duy nhất đối với các nghịch đảo $\{2\}$ của A có miền T và không gian không S.

Hệ quả 1.2.6: *Cho* $A \in C_r^{mxn}$, *T là không gian con của* C^n *có kích thước r và đặt S là không gian con của* C^m *có kích thước (m-r). Thì ba phát biểu dưới đây là tương đương:*

(a). $AT \oplus S = C^m$,

(b). $\mathcal{R}(A) \oplus S = C^m$ *và* $\mathcal{N}(A) \oplus T = C^n$, (1.2.15)

(c). *Tồn tại một* $X \in A\{1,2\}$ *sao cho* $\mathcal{R}(X) = T$ *và* $\mathcal{N}(X) = S$. (1.2.16)

Chứng minh: Hiển nhiên từ Định lí 1.2.10.

1.2.2.4. Phép chiếu trực giao

Có một véctơ $x \in C^n$ và một không gian con L của C^n. Thì tồn tại trong L một véctơ u_x gần nhất với x theo nghĩa khoảng cách $\|x - u\|$ là nhỏ nhất khi $u = u_x$. Rõ ràng, $x - u_x$ là trực giao với u_x được kí hiệu bởi $(x - u_x) \perp u_x$ và véctơ gần nhất u_x được gọi là hình chiếu trực giao của x lên L.

Phép biến đổi từ mỗi véctơ $x \in C^n$ tới phép chiếu trực giao của véctơ đó trên L được gọi là phép chiếu trực giao trên L và kí hiệu là P_L. Như vậy, có thể biểu diễn phép chiếu trực giao bởi một ma trận vuông, có tính đẳng luỹ và trong trường hợp ở đây còn là Hermite.

***Định lí 1.2.11 (Pitago)**: Cho Y và Z là các không gian con của C^n. Thì $Y \perp Z$ khi và chỉ khi $\|y + z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$ với mọi $y \in Y$, $z \in Z$.*

Chứng minh: (+) Khi: Cho $y \in Y$, $z \in Z$, ta có $(y,y) + (z,z) = \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|y + z\|^2$, trong khi $(y + z, y + z) = (y,y) + (z,z) + (y,z) + (z,y)$ nên $(y,z) + (z,y) = 0$. Thay $z = iz$ (cùng trong không gian Z) ta lại có $(y,z) - (z,y) = 0$. Vì vậy, $(y,z) = (z,y) = 0$. Nghĩa là $y \perp z$. (+) Chỉ khi: Cho $Y \perp Z$. Khi đó, với bất kì $y \in Y$, $z \in Z$ ta có $\|y + z\|^2 = (y + z, y + z) = (y,y) + (z,z) = \|y\|^2 + \|z\|^2$ do $(y,z) = (z,y) = 0$.

1.2.3. Phần phát triển mở rộng

1.2.3.1. Tóm tắt những tính chất hiệu dụng của các nghịch đảo suy rộng

Như trình bày, $A\{1\}$ đóng vai trò trong việc giải các hệ phương trình tuyến tính, $A\{1,2\}$ đóng vai trò đối ngẫu trong mối quan hệ đối xứng với $X\{1,2\}$ trong hệ bốn phương trình của Penrose, và $A\{1,3\}$, $A\{1,4\}$ trong các bài toán tối ưu có ràng buộc. Tóm tắt mang tính hiệu dụng các kết quả đã trình bày:

$$A\{1\} = \left\{A^{(1)} + Z - A^{(1)}AZA^{(1)} : Z \in C^{nxm}\right\}. \quad (1.2.17)$$

Rõ ràng, $A^{(1)}$ là thành phần cố định, nhưng $A\{1\}$ gồm cả các thành phần tuỳ ý, trong đó, $A \in C^{mxn}$. Như vậy, nếu cho $F \in C_{n-r}^{nx(n-r)}$, $K^* \in C_{m-r}^{mx(m-r)}$, $B \in C_r^{nxr}$ ứng với các cột cơ sở của $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{N}(A^*)$ và $\mathcal{R}(A^{(1)}A)$ thì ta có thể chứng tỏ nghiệm tổng quát của (1.1.1) là:

$$X = A^{(1)} + FY + BZK \quad (1.2.18)$$

trong đó, $Y \in C^{(n-r)xm}$ và $Z \in C^{rx(m-r)}$ là tuỳ ý.

Khi $AF = 0$ và $KA = 0$, vế phải của (1.2.18) thoả mãn (1.1.1). Vì $\mathcal{R}(I_n - A^{(1)}A) = \mathcal{N}(A)$ và $\mathcal{R}(I_m - AA^{(1)})^* = \mathcal{N}(A^*)$ nên tồn tại duy nhất G, H và D sao cho các tích $FG = I_n - A^{(1)}A$, $HK = I_m - AA^{(1)}$, $BD = A^{(1)}A$ không đổi nên $GF = DB = I_n$, $KH = I_m$, $GB = 0$, $DF = 0$. Từ đó thu được:

$$Y = G(X - A^{(1)}), Z = D(X - A^{(1)})H \quad (1.2.19)$$

Khi cho X là thành phần tuỳ ý của $A\{1\}$, thấy (1.2.19) thoả mãn (1.2.18). Thực chất (1.2.16) là nghiệm tổng quát của (1.1.1). Nói cách khác, (1.2.18) cho ta tính duy nhất của X theo Y và Z, còn (1.2.19) cho Y, Z duy nhất theo X.

Như $A\{1\}$, nếu các cột của F là một cơ sở của $\mathcal{N}(A)$ thì có thể viết lại (1.2.6):

$$A\{1,3\} = \left\{A^{(1,3)} + FY : Y \in C^{(n-r)xm}\right\} \qquad (1.2.20)$$

Rõ ràng biểu thức này hiệu quả hơn so với (1.2.6) và (1.2.18) vì khi Y thay đổi trên toàn bộ không gian C^{nxm}, số các tham số tuỳ ý chỉ còn là $m(n-r)$. Khi $r = m$, tất cả các nghịch đảo suy rộng {1} là nghịch đảo suy rộng {1,3}.

Tương tự, nếu các cột của K^* là một cơ sở của $\mathcal{N}(A^*)$ thì có thể viết lại (1.2.9):

$$A\{1,4\} = \left\{A^{(1,4)} + YK : Y \in C^{n\times(m-r)}\right\} \qquad (1.2.21)$$

trong đó, $A^{(1,4)}$ cố định nhưng có các thành phần tuỳ ý của $A\{1,4\}$.

Để thấy tính hiệu quả của $A\{1,2\}$, ta cho $A^{(1,2)}$ là một thành phần cố định nhưng tuỳ ý của $A\{1,2\}$ và giả thiết rằng $A^{(1,2)} = Y_0Z_0$ là một phân tích theo hạng đầy đủ. Cho các cột của F và K^* ứng với các cơ sở của $\mathcal{N}(A)$ và $\mathcal{N}(A^*)$. Thấy X thoả mãn (1.1.1) và (1.1.2) nếu:

$$A\{1,2\} = \left\{(Y_0 + FU)(Z_0 + VK) : U \in C^{(n-r)xr}, V \in C^{rx(m-r)}\right\}. \qquad (1.2.22)$$

Hơn nữa, nếu $FG = I_n = A^{(1,2)}A$, $HK = I_m = AA^{(1,2)}$ thì $U = GXAY_0$, $V = Z_0AXH$, vế phải của biểu thức trên chỉ còn có X. Biểu thức (1.2.22) chứa $r(m+n-2r)$ tham số, nhỏ hơn $(m-r)(n-r)$ của $A\{1\}$ trong (1.2.18). Khi A có đủ hạng thì mỗi nghịch đảo {1} là một nghịch đảo {1,2}.

1.2.3.2. Các nghịch đảo suy rộng có điều kiện ràng buộc

Trong thực tế, nhiều khi đòi hỏi $Ax = b$, với $A \in C^{mxn}$, $b \in C^m$ có nghiệm x thuộc một không gian con S đã biết của C^n, dẫn đến một phương trình tuyến tính có điều kiện ràng buộc. Về nguyên tắc, phương trình tuyến tính có ràng buộc vừa nêu tương đương với hệ phương trình tuyến tính không ràng buộc sau:

$$\begin{bmatrix} A \\ P_{S^\perp} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ với } P_{S^\perp} = I - P_S \text{ hay } A_{[S]}x = Ax,\ x \in S \qquad (1.2.23)$$

trong đó, $A_{[S]}$ kí hiệu phép biến đổi tuyến tính giới hạn của A tới không gian trong S.

Ngược lại, phép biến đổi tuyến tính giới hạn A tới không gian con trong S, sau đó được mở rộng tới C^n dẫn đến sự mở rộng $A_{[S]} \in L(C^n, C^m)$, kí hiệu $ext(A_{[s]}) = AP_S$ và được xác định như sau:

$$ext(A_{[s]})x = \begin{cases} Ax & khi \quad x \in S \\ 0 & khi \quad x \in S^\perp \end{cases} \qquad (1.2.24)$$

nên, nghiệm tổng quát của (1.2.23) là:

$$x = P_S(AP_S)^{(1)}b + P_S\left(I - (AP_S)^{(1)}\right)y \qquad (1.2.25)$$

với $(AP_S)^{(1)} \in (AP_S)\{1\}$ bất kì và $y \in C^n$.

Từ (1.2.25) thấy chính $P_S(AP_S)^{(1)}$ chứ không phải $A^{(1)}$ đóng vai trò nghịch đảo suy rộng{1} khi xử lí với phương trình tuyến tính có điều kiện ràng buộc. Như vậy, cần thiết khảo sát nghịch đảo suy rộng của $ext(A_{[s]}) = AP_S$.

Định nghĩa 1.2.2: *Cho $A \in C^{mxn}$ và không gian con S của C^n. Ma trận $X \in C^{mxn}$ là một nghịch đảo* {i, j, ..., l} *ràng buộc S của A khi:*

$$X = P_S(AP_S)^{(i,j,...,l)} \tag{1.2.26}$$

với bất kể $(AP_S)^{(i,j,...,l)} \in (AP_S)(i,j,...,l)$ tuỳ ý.

Khi xem xét hệ phương trình có điều kiện ràng buộc:

$$Ax + y = b, \quad x \in L, \quad y \in L^{\perp} \tag{1.2.27}$$

với $A \in C^{nxn}$, $b \in C^n$ và một không gian con L của C^n, thì nghiệm duy nhất thu được:

$$x = P_L(AP_{L^\perp} + P_{L^\perp})^{-1}b, \quad y = b - Ax \tag{1.2.28}$$

trong đó, $P_L(AP_{L^\perp} + P_{L^\perp})^{-1}$ được biết đến là *nghịch đảo ràng buộc của A*.

Định nghĩa 1.2.3: *Cho $A \in C^{mxn}$ và không gian con L của C^n. Nếu $(AP_L + P_{L^\perp})$ không suy biến, nghịch đảo Bott-Duffin của A tương ứng với L là nghịch đảo có ràng buộc của A và được kí hiệu là $A_{(L)}^{(-1)} = P_L(AP_{L^\perp} + P_{L^\perp})^{-1}$.*

Định lí 1.2.12: *Cho $(AP_L + P_{L^\perp})$ không suy biến. Khi đó:*

- (a). *Phương trình* (1.2.27) *có nghiệm duy nhất* (1.2.28) *với mọi b,*

(b). *Quan hệ giữa A, P_L và $A_{(L)}^{(-1)}$ được thể hiện bởi các biểu thức cần phải thoả mãn sau:*

$$P_L = A_{(L)}^{(-1)}AP_{L^\perp} = P_{L^\perp}AA_{(L)}^{(-1)} \text{ và } A_{(L)}^{(-1)} = P_{L^\perp}A_{(L)}^{(-1)} = A_{(L)}^{(-1)}P_{L^\perp}$$

Chứng minh: (+). Kết quả (a) thu được từ việc chuyển tương đương từ phương trình tuyến tính có ràng buộc sang tuyến tính không ràng buộc; (+). Định nghĩa của nghịch đảo Bott-Duffin ($P_LA_{(L)}^{(-1)} = A_{(L)}^{(-1)}$) nên $A_{(L)}^{(-1)}AP_L = P_L$. Do đó, $A_{(L)}^{(-1)}P_{L^\perp} = 0$ và $A_{(L)}^{(-1)}P_L = A_{(L)}^{(-1)}$. Nhân biểu thức $y = (I - AA_{(L)}^{(-1)})b$ với P_L thu được $(P_L - P_LAA_{(L)}^{(-1)})b = 0$ với mọi b. Vì thế $P_L = P_LAA_{(L)}^{(-1)}$.

Từ các kết quả trên thấy rằng khi nghịch đảo Bott-Duffin $A_{(L)}^{(-1)}$ tồn tại thì nghịch đảo {1,2} của $(P_LAP_{L^\perp})$ sẽ có miền L và không gian không $L^\perp$.

Bổ đề 1.2.3: *Nếu $(AP_L + P_{L^\perp})$ không suy biến, thì:*

(a). $A_{(L)}^{(-1)} = (AP_L)_{L,L^\perp}^{(1,2)} = (P_LA)_{L,L^\perp}^{(1,2)} = (P_LAP_L)_{L,L^\perp}^{(1,2)}$,

(b). $(A_{(L)}^{(-1)})_{(L)}^{(-1)} = P_LAP_L$.

Chứng minh: Từ định lí 1.2.14, dùng các điều kiện về kích thước của L, hạng P_L và hạng $A_{(L}^{(-$
để kết luận hạng $A_{(L)}^{(-1)}$ bằng kích thước của L và $\mathcal{R}(A_{(L)}^{(-1)}) = L$, $\mathcal{N}(A_{(L)}^{(-1)}) = L^{\perp}$.

Nghịch đảo Bott-Duffin chỉ tồn tại khi và chỉ khi $(AP_L + P_{L^\perp})$ không suy biến. Nhưn ngược lại, có thể đưa khái niệm *suy rộng của nghịch đảo đó* như sau:

$$P_L(AP_{L^\perp} + P_{L^\perp})^{(i,j,\dots,l)}, \qquad (1 \le i,j, \dots, l \le 4). \qquad (1.2.2$$

Tuy nhiên, nghịch đảo Bott-Duffin suy rộng sẽ được trình bày trong một dịp khi đề cập t các biến đổi suy rộng khác trong các không gian Hibert.

1.3. Ma trận khối, nhóm ma trận và thừa số hoá "UDV"

1.3.1. Các nghịch đảo suy rộng của ma trận khối hóa

Cho phương trình: $$Ax = b \qquad (1.3.1$$

trong đó, ma trận A, véctơ b được giả thiết khối hoá:

$$\begin{bmatrix} I_r \\ S \end{bmatrix} A_{11} [I_r \quad T] Q^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} b \qquad (1.3.2$$

Định lí 1.3.1: *Giả thiết $A \in C_r^{mxn}$ được khối hoá như trong* (1.3.2). *Thì:*

(a). *Một nghịch đảo* $\{1,2\}$ *của A là* $A^{(1,2)} = Q\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P$,

(b). *Một nghịch đảo* $\{1,2,3\}$ *của A là* $A^{(1,2,3)} = Q\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} \left(I_r + S^*S\right)^{-1} \begin{bmatrix} I_r & S^* \end{bmatrix} P$,

(c). *Một nghịch đảo* $\{1,2,4\}$ *của A là* $A^{(1,2,4)} = Q\begin{bmatrix} I_r \\ T^* \end{bmatrix} \left(I_r + TT^*\right)^{-1} \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \end{bmatrix} P$,

(d). *Tựa nghịch đảo là* $A^+ = Q\begin{bmatrix} I_r \\ T^* \end{bmatrix} \left(I_r + TT^*\right)^{-1} A_{11}^{-1} \left(I_r + S^*S\right) \begin{bmatrix} I_r & S^* \end{bmatrix} P$,

(e). *Phép chiếu* $P_{\mathcal{R}(A)} = P^T \begin{bmatrix} I_r \\ S \end{bmatrix} \left(I_r + S^*S\right)^{-1} \begin{bmatrix} I_r & S^* \end{bmatrix} P$,

(f). *Phép chiếu* $P_{\mathcal{R}(A^*)} = Q^T \begin{bmatrix} I_r \\ T^* \end{bmatrix} \left(I_r + TT^*\right)^{-1} [I_r \quad T] Q^*$,

(g). *Phép chiếu* $P_{\mathcal{N}(A)} = Q\begin{bmatrix} -T \\ I_{n-r} \end{bmatrix} \left(I_{n-r} + T^*T\right)^{-1} \begin{bmatrix} -T^* & I_{n-r} \end{bmatrix} Q^T$,

(h). *Phép chiếu* $P_{\mathcal{N}(A^*)} = P^T \begin{bmatrix} -S^* \\ I_{m-r} \end{bmatrix} \left(I_{m-r} + SS^*\right)^{-1} [-S \quad I_{m-r}] P$.

Chứng minh: Từ (a) đến (d) thu được qua so sánh thừa số hoá A theo hạng đầy đủ ($A = FG$, $F \in C_r^{mxn}$, $G \in C_r^{rxn}$) với A trong (1.3.2) thấy $F = P^T \begin{bmatrix} I_r \\ S \end{bmatrix} A_{11}$ và $G = \begin{bmatrix} I_r & T \end{bmatrix} Q^T$ và áp dụng các định lí liên quan trong phần trước. Từ (e) đến (h) thu được nhờ áp dụng nghịch đảo Bott-Duffin.

1.3.2. Nghịch đảo nhóm (Drazin) suy rộng

1.3.2.1. Nghịch đảo nhóm ma trận

Bốn phương trình Moore-Penrose áp dụng đối với ma trận bất kì. Tuy nhiên, khái niệm suy rộng còn áp dụng ngay cả khi ma trận vuông, không suy biến thông qua các phương trình sau:

$$XAX = A \qquad (1.3.3)$$

$$A^kXA = A^k \qquad (1.3.3^k)$$

$$XAX = X \qquad (1.3.4)$$

$$AX = XA \qquad (1.3.5)$$

$$A^kX = XA^k \qquad (1.3.6^k)$$

$$AX^k = X^kA \qquad (1.3.7^k)$$

trong đó, k là một số nguyên dương dùng để diễn tả nghịch đảo, ví dụ như nghịch đảo $\{3^k, 4, 5\}$ của A chẳng hạn.

Định nghĩa 1.3.1: *Nghịch đảo suy rộng* {3,4,5} *của ma trận A thoả mãn phương trình* (1.3.3), (1.3.4) *và* (1.3.5) *có tên gọi là nghịch đảo nhóm của A và kí hiệu* $A^{\#}$.

Định lí 1.3.2: *Một ma trận vuông A có nghịch đảo nhóm khi và chỉ khi có chỉ số 1 hay hạng của A bằng hạng của* A^2.

Chứng minh: Sử dụng biểu thức $A = FG$, dễ dàng thấy hạng của A^2 bằng hạng của GF.

Định lí 1.3.3: $A^{\#} = A^{\dagger}$ *khi và chỉ khi A là ma trận có không gian xác định Hermite.*

Chứng minh: Đường chéo hoá A và sử dụng $\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(A)$ hoặc $\mathcal{N}(A^*) = \mathcal{N}(A)$, điều kiện không gian xác định Hermite.

Nghịch đảo nhóm chỉ tồn tại đối với ma trận có chỉ số 1. Nhưng, bất kể ma trận vuông nào đều có ma trận nghịch đảo suy rộng $\{3^k,4,5\}$ duy nhất được biết đến là ma trận tựa nghịch đảo Drazin.

1.3.2.2. Tựa nghịch đảo Drazin và chỉ số của ma trận vuông

Ta thấy tập ba phương trình $(1.3.3^k)$, (1.3.4) và (1.3.5) tương đương với tập:

$$AX = XA \qquad (1.3.8)$$

$$A^{k-1}X = A^k \qquad (1.3.9)$$

$$AX^2 = X. \qquad (1.3.10)$$

Rõ ràng, khi thoả mãn (1.3.9) đối với một số giá trị nguyên dương k nào đó thì cũng sẽ thoả mãn đối với bất kì $l > k$. Từ (1.3.9) ta có: Hạng của A^k = hạng của A^{k-1} (1.3.11)

Vì vậy, một nghiệm X của (1.3.9) và dẫn đến nghiệm của tập ba phương trình (1.3.8), (1.3.9), (1.3.10) tồn tại chỉ khi thoả mãn phương trình (1.3.11).

Định nghĩa 1.3.2: *Giá trị k nguyên dương nhỏ nhất gán được cho bậc của A, thoả mãn* (1.3.11) *được gọi là chỉ số của ma trận A.*

Định lí 1.3.4: *Nếu $A \in C^{n\times n}$ có chỉ số k. Thì A có nghịch đảo suy rộng $\{3^k,4,5\}$ duy nhất, cũng là nghịch đảo suy rộng $\{3^l,4,5\}$ với bất kì $l \geq k$ và có thể biểu diễn nghịch đảo suy rộng đó dưới dạng một đa thức theo A.*

Chứng minh: Gọi $q(A)$ là một đa thức theo A. Thì, $A^{l+1}q(A) = A^l$; nghĩa là $q(A)$ là một nghịch đảo suy rộng $\{3^k,5\}$ của A. Điều này cũng chỉ ra rằng $X = A^k(q(A))^{k+1}$ là một nghịch đảo suy rộng $\{3^k,4, 5\}$ của A.

Hệ quả 1.3.1: *Nếu Y là một nghịch đảo suy rộng $\{3^l, 5\}$ của một ma trận vuông A nào đó, thì $X = A^lY^{l+1}$ là một nghịch đảo suy rộng $\{3^l,4, 5\}$.*

Chứng minh: Ta có $A^{l+1}Y = A^l$, $AY = YA$. Rõ ràng, X thoả mãn (1.3.8). Vậy ta có:

$$A^lXA = A^{2l+1}Y^{l+1} = A^{2l}Y^l = A^{2l-1}Y^{l-1} = \ldots = A^l \text{ và } XAX = A^{2l+1}Y^{2l+2} = A^{2l}Y^{2l+1} = \ldots = X$$

Hệ quả 1.3.2: *Cho $A \in C^{n\times n}$, thì tồn tại một nghịch đảo suy rộng $\{1,2\}$ của A có khả năng biểu diễn được dưới dạng một đa thức theo A khi và chỉ khi A có chỉ số 1. Chỉ có nghịch đảo đó mới là nghịch đảo nhóm của A và được xác định bởi $A^{\#} = A(q(A))^2$.*

Chứng minh: (+) Khi: Nếu A có chỉ số 1, thì A có nghịch đảo nhóm cũng là nghịch đảo suy rộng $\{1,2\}$ và trùng với tựa nghịch đảo Drazin, nên có thể được biểu diễn dưới dạng đa thức theo A. (+) Chỉ khi: Một nghịch đảo suy rộng $\{1,2\}$ của A, nghĩa là một đa thức theo A thì phải hoán vị với A nên là một nghịch đảo suy rộng $\{3,4, 5\}$ của A hay là $A^{\#}$ của A. Vì vậy, A có chỉ số 1. ●

Hệ quả 1.3.3: *Cho $A \in C^{n\times n}$. Thì, có thể biểu diễn A^+ dưới dạng một đa thức theo A khi và chỉ khi A là ma trận có không gian xác định Hermite.*

Chứng minh: Hiển nhiên.

Định lí 1.3.5: *Một ma trận vuông A bất kì chỉ có một phân tích duy nhất theo chỉ số 1. Đó là $A = B+N$, trong đó B là một ma trận có chỉ số 1 và N là một ma trận có đẳng luỹ bằng 0. Khi đó, $BN = NB = 0$ và $B = (A^{(d)})^{\#}$, trong đó $A^{(d)}$ kí hiệu nghịch đảo suy rộng Drazin của A.*

Chứng minh: Vì $B^{\#} = B(B^{\#})^2 = (B^{\#})^2B$ nên $B^{\#}N = NB^{\#} = 0$. Do đó, $AB^{\#} = BB^{\#} = B^{\#}A$. Hơn nữa, do $BN = NB = 0$ ta có $A(B^{\#})^2 = B(B^{\#})^2 = B^{\#}$ nên $A^l = (B+N)^l = B^l+N^l$, với bất kì l = 1, 2, ... Khi l đủ lớn để $N^l = 0$ (đẳng luỹ 0) thì $A^l = B^l$ và $A^{l+1}B^{\#} = B^{l+1}B = B^l$. Như vậy, khi $X = B^{\#}$ thoả mãn (1.3.8), (1.3.9) và (1.3.10) là nghịch đảo Drazin suy rộng, kí hiệu $A^{(d)}$. Rõ ràng, B có chỉ số 1. Viết lại, $N = A - (A^{(d)})^{\#}$ và chú ý rằng $(A^{(d)})^{\#} = A^2A^{(d)}$ thì rõ ràng, $BN = NB = 0$ đúng. Nên, $A^k = B^k + N^k = A^{2k}(A^{(d)})^k + N^k = A^k + N^k$. Do đó, $N^k = 0$.

1.3.3. Ph©n giải "UDV" theo các giá trị suy biến

1.3.3.1. Đường chéo hoá các ma trận chữ nhật

Cho một phép biến đổi tuyến tính $A : C^n \to C^m$ và hai cơ sở $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ và $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ tương ứng của C^m và C^n.

Ma trận biểu diễn phép biến tuyến tính A tương ứng với hai cơ sở U và V kí hiệu là $A_{\{U,V\}}$

$= [a_{ij}] \in C^{m\times n}$ được xác định bởi: $$Av_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i, \quad j = 1, ..., n \tag{1.3.12}$$

Định lí 1.3.6: *Cho $0 \neq A \in C_r^{m\times n}$ và giả sử các giá trị riêng của A được sắp xếp theo:*

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq ... \geq \alpha_r > 0 \tag{1.3.13}$$

và có bất kể các số vô hướng phức $d(A) = \{d_1, ..., d_r\}$ nào thoả mãn điều kiện:

$$|d_i| = \alpha_i, \ i = 1, ..., r \tag{1.3.14}$$

Giả sử $\{u_1, u_2, ..., u_r\}$ là tập các véctơ riêng trực chuẩn của AA^* ứng với các giá trị riêng khác không:

$$AA^*u_i = \alpha_i^2 u_i, \quad i = 1, ..., r \tag{1.3.15}$$

$$(u_i, u_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, ..., r \tag{1.3.16}$$

và $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ được xác định bởi $$v_i = \frac{1}{\overline{d}_i} A^* u_i, \quad i = 1, ..., r \tag{1.3.17}$$

Thì $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ là một tập véctơ riêng trực chuẩn của A^*A ứng với các giá trị riêng khác không:

$$AA^*v_i = \alpha_i^2 v_i, \quad i = 1, ..., r \tag{1.3.18}$$

$$(v_i, v_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, ..., r \tag{1.3.19}$$

Hơn nữa, $$u_i = \frac{1}{\overline{d}_i} Av_i, \quad i = 1, ..., r. \tag{1.3.20}$$

Ngược lại, cho trước các véctơ $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ thoả mãn (1.3.18) *và* (1.3.19) *và giả sử $\{u_1, u_2, ..., u_r\}$ được xác định như* (1.3.20). *Thì $\{u_1, u_2, ..., u_r\}$ thoả mãn* (1.3.15), (1.3.16) *và* (1.3.17).

Chứng minh: Nếu v_i xác định như (1.3.17), với $i = 1, ..., r$. Thì,

$$A^*Av_i = \frac{1}{\overline{d}_i} A^*AA^*u_i = d_i A^*u_i = \alpha_i^2 v_i$$

và $(v_i, v_j) = \frac{1}{\overline{d}_i d_j}(A^*u_i, A^*u_j) = \frac{1}{\overline{d}_i d_j}(AA^*u_i, u_j) = \frac{d_i}{d_j}(u_i, u_j) = \delta_{ij}$. Tương tự đối với phần ngược chỉ thay A bằng A^*.

Định lí 1.3.7: *Cho $0 \neq A \in C_r^{m\times n}$ và giả sử $d(A) = \{d_1, ..., d_r\}$ là các số vô hướng phức thoả mãn điều kiện $|d_i| = \alpha_i$, $i = 1, ..., r$, trong đó $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq ... \geq \alpha_r > 0$ là các giá trị riêng của A. Thì, tồn tại các ma trận đơn vị $U \in U^{m\times m}$ và $V \in V^{n\times n}$ sao cho:*

$$D = U^*AV = \left[\begin{array}{ccc|c} d_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & d_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right] \tag{1.3.21}$$

Chứng minh: Giả sử các véctơ $\{u_1, u_2, ..., u_r\}$ trong C^m thoả mãn (1.3.15) và (1.3.16) nên có thể xây dựng một cơ sở trực chuẩn của $\mathcal{R}(AA^*) = \mathcal{R}(A)$. Gọi $\{u_{r+1}, u_{r+2}, ..., u_m\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $\mathcal{R}(A)^{\perp} = \mathcal{N}(A^*)$. Thì $\{u_1, u_2, ..., u_r, u_{r+1}, u_{r+2}, ..., u_m\}$ là một cơ sở trực chuẩn của C^m thoả mãn (1.3.15) và $A^*u_i = 0$, với $i = r+1, ..., m$. Và thu được ma trận đơn vị bậc m, $U = [u_1, u_2, ..., u_r, u_{r+1}, u_{r+2}, ..., u_m]$. Tương tự $\mathcal{R}(A^*)$ và $\mathcal{R}(A^*)^{\perp} = \mathcal{N}(A)$ được xây dựng và ma trận đơn vị V có bậc n được cấu trúc. Từ đây, $D = U^*AV = [d_{ij}]$, với $i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n$ có $d_{ij} = u_i^* A v_j = 0$, khi $i > r$ hoặc $j > r$ và $d_{ij} = u_i^* A v_j = \delta_{ij}$ khi $i, j = 1, 2, ..., 4$.

Hệ quả 1.3.4: *Cho A, D, U và V như trong định lí 1.3.7. Thì $A^{+} = VD^{+}U^{*}$ trong đó,*

$$D^{+} = \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{d_1} & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \frac{1}{d_r} & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right].$$

Chứng minh: Hiển nhiên, sử dụng (1.3.21).

Hệ quả 1.3.5: *Đối với hai ma trận $A_1, A_2 \in C^{m\times n}$, ba phát biểu sau tương đương:*

(a). *Tồn tại hai ma trận đơn vị U và V để cả $D_1 = U^*A_1V$ và $D_2 = U^*A_2V$ đồng thời là các ma trận đường chéo,*

(b). *Cả hai ma trận $A_1A_2^*$ và $A_2^*A_1$ đều là Hermite,*

(c). *Tồn tại một đa thức f sao cho $A_1A_2^* = f(A_2^*A_1)$ và $A_2^*A_1 = f(A_1A_2^*)$.*

Chứng minh: Hiển nhiên.

1.3.3.2. Đẳng cự thành phần

Định nghĩa 1.3.3: *Phép biến đổi tuyến tính U: $C^n \to C^m$ được gọi là đẳng cự thành phần khi bảo toàn được chuẩn trên phần bù trực giao của không gian không của phép biến đổi đó. Nghĩa là, nếu $\|Ux\| = \|x\|$ với bất kì $x \in \mathcal{N}(U)^{\perp} = \mathcal{R}(U^*)$ hoặc $\|Ux - Uy\| = \|x - y\|$ với bất kì $x, y \in \mathcal{N}(U)^{\perp}$.*

Một đẳng cự thành phần không suy biến thì được gọi là đẳng cự hay phép biến đổi cơ bản (unitary). Một ma trận $U \in C^{n\times n}$ được gọi là ma trận cơ bản khi $U^* = U^{-1}$.

Định lí 1.3.8: *Đối với một ma trận $U \in C^{m\times n}$, các phát biểu sau đây là tương đương:*

(a). *U là một đẳng cự thành phần và U^* cũng là một đẳng cự thành phần,*

(b). *Cả U^*U và UU^* đều là các phép chiếu trực giao,*

(c). *$UU^*U = U$ và $U^*UU^* = U^*$,*

(d). *$U^* = U^{+}$ và U là một đẳng cự thành phần.*

Chứng minh: Sử dụng định nghĩa đẳng cự thành phần và các tính chất của phép chiếu trực giao để chứng minh (a)⇔(b), (a)⇔(c) và (b)⇔(c)⇔(d) và áp dụng tương tự đối với phần đối ngẫu. Ví dụ, (a)⇔(b). Vì, $U^*U = P_{\mathcal{R}(U^*)}$ nên $(P_{\mathcal{R}(U^*)}x, x) = (x, x) = (Ux, Ux) = (U^*Ux, x)$. Nếu đặt $H = P_{\mathcal{R}(U^*)} - U^*U \in C^{nxn}$, thì $(Hx, x) = 0$ đối với mọi $x \in \mathcal{R}(U^*)^{\perp} = \mathcal{N}(U)$ nên H là một Hermite. Và khi H là một Hermite thì $U^*U = P_{\mathcal{R}(U^*)}$. Ngược lại, $(Ux, Ux) = (U^*Ux, x) = (P_{\mathcal{R}(U^*)}x, x) = (x, x)$ nếu $x \in \mathcal{R}(U^*)$.

Định đề 1.3.1: *Cho U là một đẳng cự thành phần kích thước nxn. Giả sử λ là một giá trị riêng của U ứng với véctơ riêng x. Thì* $|\lambda| = \dfrac{\|P_{\mathcal{R}(U^*)}x\|}{\|x\|} \le 1$.

Chứng minh: Từ $Ux = \lambda x$ dẫn đến $|\lambda|\|x\| = \|Ux\| = \|UP_{\mathcal{R}(U^*)}x\| = \|P_{\mathcal{R}(U^*)}x\|$.

1.3.3.3. Phân giải theo cực

Định lí 1.3.9: *Đối với $0 \ne A \in C_r^{mxn}$ có thể viết $A = GE = EH$, trong đó, $E \in C^{mxn}$ là một đẳng cự thành phần, G và H là hai ma trận Hermite và bán xác định dương. Các ma trận E, G, H được xác định bởi các biểu thức sau:*

- $\mathcal{R}(E) = \mathcal{R}(G)$, $\mathcal{R}(E^*) = \mathcal{R}(H)$ *với* $G^2 = AA^*$, $H^2 = A^*A$, $E = U_{(r)}V_{(r)}^*$.

Chứng minh: Áp dụng phân tích "*UDV*" đối với trường hợp thứ *k*, $r \le k \le \min\{m,n\}$.

Định nghĩa 1.3.4: *Cho f: C→C là bất kể hàm vô hướng nào. Giả sử $A \in C_r^{mxn}$ được biểu diễn theo phổ $A = \sum_{i=1}^{r} d_iE_i$. Thì hàm số có biến số ma trận f: $C^{mxn} \to C^{mxn}$ tương ứng với f: C→C tại A được định nghĩa là $f(A) = \sum_{i=1}^{r} f(d_i)E_i$*. Với

$$A = U_{(r)}D_{(r)}V_{(r)}^*,\ D_{(r)} = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_r \end{bmatrix} \text{ thì } f(D(r)) = \begin{bmatrix} f(d_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(d_r) \end{bmatrix}$$

sao cho $f(A) = U_{(r)}f(D_{(r)})V_{(r)}^*$.

Định đề 1.3.2: *Cho $A \in C_r^{mxn}$ với $A = \sum_{i=1}^{r} d_iE_i$ và $\hat{E}_j = \sum_{i\{d_i = d_j\}} E_i$, $j = 1, 2, ..., q$. Gọi $\{\hat{d}_j : j = 1, 2, ..., q\}$ là tập của các $\{d_i : i = 1, 2, ..., r\}$ khác nhau và mỗi j có đường Γ_j khoanh $\hat{d}_j$. Thì:*

(a). *Ứng với mỗi j =1, 2, ..., q, thì $\hat{E}_j$ là một đẳng cự thành phần và*

$$\hat{E}_j^* = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j}(zE-A)^+dz \tag{1.3.22}$$

(b). *Nếu $f: C \to C$ là hàm giải tích trong miền chứa $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{q}\Gamma_j$ thì:*

$$\sum_{j=1}^{r} f(d_j)E_j^* = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(z)(zE-A)^+dz \tag{1.3.23}$$

và trường hợp riêng $A^+ = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma}\frac{1}{z}(zE-A)^+dz$

(1.3.24)

Chứng minh:

(a). Vì $A = \sum_{i=1}^{r} d_iE_i$ nên $A^+ = \sum_{i=1}^{r}\dfrac{1}{d_i}E_i^*$, $(zE-A)^+ = \sum_{k=1}^{r}\dfrac{1}{z-d_k}E_k^*$.

Do đó, $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\Gamma_j}(zE-A)^+dz = \sum_{k=1}^{r}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j}\frac{dz}{z-d_k}\right)E_k^* = \sum_{\{d_k=\hat{d}_j\}}E_k = \hat{E}_j^*$.

(b). Tương tự, ta tính

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j} f(z)(zE-A)^+dz = \sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j}\frac{f(z)dz}{z-d_k}\right)E_k^* = \sum_{j=1}^{q} f(\hat{d})\hat{E}_j^*.$$

●

Hệ quả 1.3.6: *Cho A, E, Γ và f như trong định đề 1.3.2. Thì:*

$$f(A) = E\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(z)(zE-A)^+dz\right)E \tag{1.3.25}$$

Chứng minh: Viết vế phải (1.3.25)

$$E\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(z)(zE-A)^+dz\right)E = \left(\sum_{i=1}^{r}E_i\right)\left(\sum_{j=1}^{r}f(d_j)E_j^*\right)\left(\sum_{k=1}^{r}E_k\right) = \sum_{j=1}^{r}f(d_j)E_j = f(A).$$

II. VÍ DỤ VÀ ỨNG DỤNG

2.1. Các ví dụ

2.1.1. Chuyển vÒ dạng Hermite chuẩn tắc vµ thừa sè hoá theo toàn hạng

Cho ma trận A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2i & i & 0 & 4+2i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & -3-3i \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4-4i & 1 \end{bmatrix}.$$

và phần tử lấy để xử lí đưa về 1 được gạch chân ở mỗi bước.

$$T_0 = \left[\begin{array}{cccccc|ccc} 0 & \underline{2i} & i & 0 & 4+2i & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & -3-3i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4-4i & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

$$T_1 = \left[\begin{array}{cccccc|ccc} 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1-2i & -\frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\underline{3} & -6 & -3-3i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1+i & i & 0 & 1 \end{array}\right],$$

$$T_2 = 3\left[\begin{array}{cccccc|ccc} 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1-2i & -\frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & i+1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right].$$

Từ $T_2 = [EA\ E]$ ta thấy $E = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}i & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ i & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$, hạng r của A bằng 2 và EA là dạng chuẩn Hermite của A.

Ma trận hoán vị P làm $EAP = \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1-2i & -\frac{1}{2}i \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1+i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ và từ đó thấy A được thừa số hoá theo toàn hạng là $A = (AP_I)G = \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1-2i & -\frac{1}{2}i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1+i \end{bmatrix}$.

2.1.2. Về các dạng nghịch ®ảo suy rộng

(a). Với A là ma trận trong ví dụ trên. Từ biểu thức thừa số theo toàn hạng, nghịch đảo suy rộng $\{1\}$ của A có dạng $X = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}E = \begin{bmatrix} i\alpha & \frac{1}{3}\alpha & \alpha \\ -\frac{1}{2}i & 0 & 0 \\ i\beta & \frac{1}{3}\beta & \beta \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ i\gamma & \frac{1}{3}\gamma & \gamma \\ i\delta & \frac{1}{3}\delta & \delta \end{bmatrix}$, với α, β, γ và δ là các thành phần của L được xác định theo P.

(b). Cho $A = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 9-3i & 12-4i & 10-10i \\ 3-3i & 4-4i & 0 \\ 6+6i & 8+8i & 0 \\ 6 & 8 & 0 \end{bmatrix}$, tựa nghịch đảo, các nghịch đảo suy rộng $\{2\}$, $\{3\}$

và {4} kí hiệu X_2, X_3 và X_4 thu được chính xác như sau đây:

$$A^{+} = \frac{1}{70} = \begin{bmatrix} 0 & 6+6i & 12-12i & 12 \\ 0 & 8+8i & 16-16i & 16 \\ 35+35i & -5-15i & -30+10 & -20-10i \end{bmatrix},$$

$$X_2 = \frac{1}{60} = \begin{bmatrix} -9-3i & 3+3i & 6-6i & 6 \\ -12-4i & 4+4i & 8-8i & 8 \\ 25+25i & -5-15i & -30+10i & -20-10i \end{bmatrix},$$

$$X_3 = \frac{1}{420} = \begin{bmatrix} 63+21i & 15+15i & 30-30i & 6 \\ 84+28i & 20+20i & 40-40i & 8 \\ 35+35i & 5+15i & -30-10i & -20+10i \end{bmatrix} \text{ và } X_4 = 0.$$

(c). Với $A = \begin{bmatrix} 0 & 2i & i & 0 & 4+2i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & -3-3i \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4-4i & 1 \end{bmatrix}$ tập nghịch đảo suy rộng {1, 3} kí hiệu X và {1,4} kí hiệu Y có dạng như sau đây:

$$X = \frac{1}{38}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -10i & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2i & -12 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -1+2i & \frac{1}{2}i \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1-i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Z, \text{ với bất kì } Z \in C^{6x3},$$

$$Y = \frac{1}{276}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20-18i & 42 \\ 0 & 10-9i & 21 \\ 0 & -29-9i & -9-27i \\ 0 & -2+4i & 24+30i \\ 0 & -29+30i & -36+3i \end{bmatrix} + Z\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2}i & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ với bất kì } Z \in C^{6x3}.$$

2.1.3. Về ứng dụng nghịch đảo Bott-Duffin

Cho một mạng điện gồm n_i, i = 1, 2, …, m nút và n nhánh (cặp nút) kí hiệu b_j, j = 1, 2, …, n. Như đã biết, ma trận tới kí hiệu $M = [m_{ij}]$ được định nghĩa như sau:

(i). Hàng thứ i của M ứng với nút n_i, i = 1, 2, …, m,

(ii). Cột thứ j của M ứng với nhánh b_j, j = 1, 2, …, n, (iii). Nếu $b_j = \{n_k, n_l\}$ thì $m_{ij} = \begin{cases} 1, & i=k \\ -1, & i=l \\ 0, & i \neq k,l \end{cases}$ với mọi j = 1, 2, ..., n.

Hai nút n_k hoặc n_l tương ứng với hai hàng của M được gọi là nối trực tiếp khi $\{n_k, n_l\}$ hoặc $\{n_l, n_k\}$ là một nhánh (trong M tồn tại một cột có giá trị khác không tại các hàng k và l). Gọi hai nút n_k hoặc n_l tương ứng với hai hàng của M được nối nếu tồn tại một dãy $\{n_k, n_p, \ldots, n_l\}$ trong đó bất kể hai nút kề nhau đều được nối trực tiếp. Một mạng gọi là được nối khi tất cả các cặp nút đều được nối.

Từ định nghĩa của M như trên, có thể mô tả quan hệ giữa véctơ chứa các điện áp trên các nhánh $x = [x_j]$, $j = 1, 2, \ldots$, n, với véctơ chứa các điện thế tại các nút $p = [p_i]$, $i = 1, 2, \ldots$, m, bởi biểu thức $x = M^Tp$. Có thể viết định luật Kirchhoff đối với dòng điện trên các nhánh bởi biểu thức $My = 0$, với $y = [y_j]$, $j = 1, 2, \ldots$, n, véctơ chứa các dòng điện trên các nhánh.

Như vậy, định luật Kirchhoff xác định hai không gian con trực giao bù nhau ($\mathcal{N}(M)$ đối với dòng điện và $\mathcal{R}(M^T)$ đối với điện áp). Nên, có thể tìm được dòng điện y và điện áp x trên các nhánh bằng cách áp dụng định luật Ohm trong điều kiện hạn chế là: $Ax + y = Av + w$, $x \in \mathcal{R}(M^T)$, $y \in \mathcal{N}(M)$ trong đó, $A = [\text{diag } a_j]$ chứa điện dẫn của các nhánh, véctơ v và w chứa các nguồn điện áp và các nguồn dòng và M là ma trận tới đã nói đến ở trên.

Áp dụng định lí Bott-Duffin, nghiệm của bài toán như sau:

$$x = A^{(-1)}_{(\mathcal{R}(M^T))}(Av + w) \quad \text{và} \quad y = (1 - AA^{(-1)}_{(\mathcal{R}(M^T))})(Av + w)$$

trong đó, thành phần (i,j), $i, j = 1, 2, \ldots$, n của ma trận truyền đạt $A^{(-1)}_{(\mathcal{R}(M^T))}$ biểu diễn điện áp sụt trên nhánh b_i do tác động của nguồn dòng đưa vào nhánh b_j.

Vì A không suy biến, có thể viết lại hệ phương trình có điều kiện phía trên:

$$A^{-1}y + x = A^{-1}w + v, \quad y \in \mathcal{N}(M), \quad x \in \mathcal{R}(M^T)$$

và có nghiệm $y = (A^{-1})^{(-1)}_{(\mathcal{N}(M))}(A^{-1}w + v)$ và $x = (1 - A^{-1}(A^{-1})^{(-1)}_{(\mathcal{N}(M))})(A^{-1}w + v)$, trong đó, ma trận truyền đạt đối ngẫu $(A^{-1})^{(-1)}_{(\mathcal{N}(M))}$ có thành phần (i,j) biểu diễn dòng sinh ra trên nhánh b_i do tác động của nguồn điện áp song song với nhánh b_j.

Có thể dễ dàng nhận thấy $A^{-1}(A^{-1})^{(-1)}_{(\mathcal{N}(M))} + A^{(-1)}_{(\mathcal{R}(M^T))}A = I$.

2.1.4. Các ví dụ về đẳng cự thành phần và hàm suy rộng

Ví dụ 2.1.1: Đẳng cự thành phần $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$ ứng với $\lambda = 0$ có $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{N}(U)$;

$$\lambda = 1, x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}(U^*); \lambda = \sqrt{3}/2, x = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}(U^*), \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} \in \mathcal{N}(U)$$

là các hệ riêng.

Ví dụ 2.1.2: Cho một hàm ma trận f: $C^{mxn} \rightarrow C^{mxn}$ ứng với hàm vô hướng $f(z) = z^k$, với bất kì k

nào kí hiệu $f(A) = A^{\langle k\rangle}$ được gọi là *số mũ suy rộng* hay *luỹ thừa suy rộng* của A. Định nghĩa 1.3.4 cho thấy $A^{\langle k\rangle} = \sum_{i=1}^{r} d_i^k E_i$ hay $A^{\langle k\rangle} = U_{(r)} D_{(r)}^k V_{(r)}^*$. Luỹ thừa suy rộng A thoả mãn:

$$A^{\langle k\rangle} = \begin{cases} E, & \text{khi } k = 0 \\ A^{\langle k\rangle} E^* A, & \text{khi } k \geq 1 \\ A^{\langle k+1\rangle} E^* A^{-1}, & \text{khi } k \leq 1 \end{cases}$$ trong trường hợp riêng $A^{\langle 1\rangle} = A$.

Ví dụ 2.1.3: Nếu $A \in C_r^{mxn}$ là ma trận thông thường và nếu các số vô hướng $d(A)$ được chọn sao cho $d(A) = \alpha(A)$ thì $A^{\langle k\rangle} = \begin{cases} A^k, & \text{khi } k \geq 1 \\ P_{\mathcal{R}(A)}, & \text{khi } k = 0 \\ (A^+)^k, & \text{khi } k \leq -1 \end{cases}$.

Ví dụ 2.1.4: Cho $A \in C_r^{mxn}$ biểu diễn theo cực $A = GE = EH$. Theo định nghĩa 1.3.4, đối với bất kể hàm f nào thì đều có $f(A) = f(G)E = Ef(H)$. Cứ ví dụ, $A^{\langle k\rangle} = G^kE = EH^k$, với bất kì k nào.

Ví dụ 2.1.5: Đa thức theo bậc 3 (tam nguyên - ternary powers) của A là đa thức có dạng $\sum_k p_k A^{\langle 2k+1\rangle} = \sum_k p_k (AA^*)^k A$.

2.2. Ứng dụng vào bài toán đánh giá tham số mô hình

2.2.1. Xây dựng bài toán và ứng dụng

Một hệ động học tuyến tính bậc n có tính nhân quả, bất biến theo thời gian được cho bởi tín hiệu đáp ứng giới hạn tại đầu ra trước tín hiệu kích thích giới hạn tại đầu vào. Xác định mô hình giảm bậc có bậc r ($q \leq r < n$) có tính đồng thời điều khiển và quan sát sao cho tối thiểu hoá hàm mục tiêu như dưới đây:

$$J = \int_0^\infty [u_s(\tau) - u_r(\tau)]^T R[u_s(\tau) - u_r(\tau)]d\tau = \int_0^\infty \|[u_s(\tau) - u(\tau)]\|_R^2 \, d\tau \qquad (2.2.1)$$

trong đó, $u_s(t)$ và $u_r(t) \in R^{pxl}$ là véctơ tín hiệu đầu vào của hệ động học và của mô hình giảm bậc, và $R \in R^{pxp}$ là ma trận trọng số, xác định không âm.

Bổ đề 2.2.1: *Cho hai ma trận có hạng toàn cột và hạng toàn hàng tương ứng là $G^T \in R^{nxr}$ và $\Gamma \in R^{rxn}$, $r \leq n$, với đặc tính $\Gamma G^T = I_r$. Thì có được một phép chiếu σ bậc n: Hơn nữa, nếu thừa số hoá toàn hạng tương ứng hai ma trận Γ và G đã cho để từ các thừa số của chúng xác định một ma trận dương, bán đơn $M \in R^{rxr}$. Thì tìm được hai ma trận xác định không âm bậc n, Q, $P \in R^{nxn}$ sao cho tích của chúng được thừa số hoá theo ($G^TM\Gamma$).*

Chứng minh: Nếu: $$\Gamma G^T = I_r \qquad (2.2.2)$$

thì $(G^T\Gamma)^2 = G^T\Gamma G^T\Gamma = G^T\Gamma \in R^{nxn}$. Nghĩa là, nếu định nghĩa $\sigma = G^T\Gamma \in R^{nxn}$ thì σ là một ma trận đẳng luỹ. Vậy ma trận σ là một phép chiếu bậc n.

Ngược lại, vì G^T và Γ là các ma trận có hạng toàn cột và hạng toàn hàng nên c

$\Gamma\Gamma^{\circledast} = G^{\circledast}G^T = I_r$, trong đó $\Gamma^{\circledast}$ và $G^{\circledast}$ là các ma trận nghịch đảo suy rộng phía phải yếu Γ và phía trái yếu G^T. Vậy, nhân (2.2.2) trái với $G^{\circledast}$, phải với $\Gamma^{\circledast}$ sẽ có $\Gamma G^T = I_r$.

Theo Định lí 1.3.8, đối với hai ma trận đã cho luôn tồn tại một ma trận vuông, đối xứng $\Phi \in R^{rxr}$ và một ma trận $\Sigma \in R^{rxn}$, cả hai đều có hạng r để:

$$\Gamma = \Phi_\Gamma \Sigma_\Gamma \text{ và } G^T = \Sigma_G^T \Phi_G.$$

Bất luận Φ_Γ và Φ_G là xác định dương hay âm thì đều có tính khả nghịch. Vậy, $\Gamma G^T = I_r$ có nghĩa là $\Sigma_G \Sigma_\Gamma^T = \Phi_G^{-1}\Phi_\Gamma^{-1} \in R^{rxr}$ và có thể tạo bán đơn $M = \Phi_G^{-1}\Phi_\Gamma^{-1}$. Đặc tính xác định dương của M đảm bảo Φ_Γ và Φ_G có cùng dấu xác định.

Thấy ngay, $\Sigma_G^T \Phi_G \Sigma_G\ \Sigma_\Gamma^T \Phi_\Gamma \Sigma_\Gamma = G^T M \Gamma$. Từ đó, có thể gán $\Sigma_G^T \Phi_G \Sigma_G = Q$ và $\Sigma_\Gamma^T \Phi_\Gamma \Sigma_\Gamma = P$ hoặc $\Sigma_G^T(-\Phi_G)\Sigma_G = Q$ và $\Sigma_\Gamma^T(-\Phi_\Gamma)\Sigma_\Gamma = P$, tuỳ thuộc đặc tính xác định của Φ_Γ và Φ_G để $QP = (G^T M \Gamma)$. Tuy nhiên, bất luận đặc tính xác định nào, Q và P cũng đều là đối xứng, bậc n có hạng r, $r \le n$. Nên Q, P và ma trận tích (QP) đều là các xác định không âm.

Ngược lại, giả sử $Q, P \in R^{nxn}$ là xác định không âm thì phải chứng minh rằng (QP) là bán đơn không âm. Hơn nữa, nếu bán đơn không âm có hạng r, $r \le n$, thì sẽ tồn tại ma trận hạng toàn cột $G^T \in R^{nxr}$, ma trận hạng toàn hàng $\Gamma \in R^{rxn}$ và bán đơn dương $M \in R^{rxr}$ sao cho $QP = G^T M \Gamma$ và $\Gamma G^T = I_r$.

Thật vậy, từ Định lí 1.3.2, có một ma trận khả nghịch $T \in R^{nxn}$ để cả $T^T Q T$ và $T^{-1} P T^{-T}$ được đường chéo hoá nên (QP) là bán đơn không âm. Nếu bán đơn không âm đó có hạng r nhỏ hơn hoặc bằng bậc n, $(r \le n)$, thì quá trình đường chéo hoá đồng thời Q và P tương đương với việc phân giải theo cực "UDV" của bán đơn không âm. Trong cách phân giải đó, cả U và V là các ma trận trực giao bậc n, V được chọn tuỳ ý sau khi cấu trúc U, ma trận đường chéo D chứa r véctơ riêng, xếp theo thứ tự giảm dần (Λ_r) của bán đơn không âm.

Cũng tồn tại một ma trận khả nghịch S_r bậc r sao cho có thể biểu diễn $D = \begin{bmatrix} \Lambda_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_r \\ 0 \end{bmatrix} (S_r^{-1}\Lambda_r S_r) \begin{bmatrix} S_r^{-1} & 0 \end{bmatrix}$. Trên cơ sở đó, có thể xác định $G^T = U \begin{bmatrix} S_r \\ 0 \end{bmatrix}$, $\Gamma = \begin{bmatrix} S_r^{-1} & 0 \end{bmatrix} V$ và $M = S_r^{-1}\Lambda_r S_r$. Dễ dàng kiểm chứng lại rằng $\Gamma G^T = I_r$ và quan hệ giữa T với S_r có thể xác lập.

Trong trường hợp khi $r = n$, Q và P không còn xác định âm mà là định dương. Bổ đề vẫn đúng khi G và Γ không là chữ nhật mà vuông, có bậc n và hạng r, $r \le n$.

Liên quan đến các bài toán đánh giá tham số mạng viễn thông, định đề và định nghĩa sau đây sẽ được sử dụng:

Định đề 2.2.1: *Cho ma trận có hạng toàn cột G^T, ma trận có hạng toàn hàng Γ và hai ma trận xác định không âm bậc n, $Q, P \in R^{nxn}$ được định nghĩa theo bổ đề 2.2.1, thì ta có các đẳng thức sau đây:*

$$\Sigma_G = \Gamma Q,\ \Phi_G^{-1} = \Gamma Q \Gamma^T,\ Q = \sigma Q = Q\sigma^T,\ \Sigma_\Gamma = GP,\ \Phi_\Gamma^{-1} = GPG^T,\ P = \sigma^T P = P\sigma$$

Chứng minh: Hiển nhiên.

Định nghĩa 2.2.1: *Phép (ma trận) chiếu được xác lập từ các điều kiện cần để một hàm biểu c tiêu chí tối ưu trở thành cực trị thì được gọi là phép chiếu tối ưu, và hai ma trận xác định kh âm Q và P cũng được gọi là tối ưu nếu thừa số hoá QP được tạo bởi các thừa số của phép ch tối ưu theo nghĩa của bổ đề 2.2.1*

Bổ đề 2.2.2: *Nếu ma trận chứa dữ liệu đo lường $\tilde{M}_N$ không có hạng đủ theo hàng, thì ước lư véctơ tham số quá trình của hệ động học đánh giá theo tiêu chí trọng sai số tối thiểu* (W *được xác định bởi biểu thức sau:*

$$\hat{p}^* = R_2^{-1/2} R_1^{1/2} \tilde{M}_N^{(1,3)} R_2^{-1/2} R_1^{1/2} \tilde{u}_N \qquad (2.$$

ở đây, kí hiệu $\tilde{M}_N^{(1,3)}$ *biểu thị nghịch đảo suy rộng* $\{1,3\}$ *của ma trận* $\tilde{M}_N$, R_1 *và* R_2 *là hai trận trọng, xác định dương được kích thước hoá một cách phù hợp.*

Chứng minh: $\tilde{M}_N^T R \tilde{M}_N$ vuông kích thước $(2n+1)qp$ có hạng r ($r < (2n+1)qp$) nên là suy b Có thể biểu diễn hàm phạt định nghĩa trên cơ sở sai số đầu vào:

$$J(\tilde{p}) = (\tilde{u}_N - \tilde{M}_N \tilde{p})^T R_1 (\tilde{u}_N - \tilde{M}_N \tilde{p}) = \left\| \tilde{u}_N - \tilde{M}_N \tilde{p} \right\|_{R_1}^2 \qquad (2.$$

ở đây, R_1 là một ma trận trọng số, xác định dương có kích thước $Np \times N$p.

Từ lớp nghiệm bình phương sai số nhỏ nhất suy rộng, **GLS**, chọn một nghiệm sao cho:

$$\left\| \tilde{p} \right\|_{R_2}^2 = \tilde{p}^T R_2 \tilde{p} \qquad (2.2.5)$$

là nhỏ nhất, trong đó, R_2 là một ma trận trọng số, xác định dương, khác R_1 ở (2.2.4), có bằng với hạng của ma trận $\tilde{M}_N$. ◆

Sử dụng giá trị căn bậc hai duy nhất của R_1 và R_2 để biến đổi các cơ sở của $\tilde{M}_N$ cũng hai véctơ $\tilde{p}$ và $\tilde{u}_N$ như sau:

$$\underset{\sim}{M}_N = R_1^{1/2} \tilde{M}_N R_2^{-1/2}, \quad \underset{\sim}{p} = R_2^{1/2} \tilde{p}, \quad \underset{\sim}{u}_N = R_1^{1/2} \tilde{u}_N \qquad (2.$$

sao cho
$$\left\| \tilde{u}_N - \tilde{M}_N \tilde{p} \right\|_{R_1} = \left\| \underset{\sim}{u}_N - \underset{\sim}{M}_N \underset{\sim}{p} \right\|_{R_1} \qquad (2.$$

$$\| \tilde{p} \|_{R_2} = \| \underset{\sim}{p} \|_{R_2} \qquad (2.$$

Bài toán tối thiểu hoá hàm tiêu chí suy rộng chuẩn trọng số (2.2.4) chuyển thành ch Euleur (2.2.7) có nghiệm chính là nghiệm theo tiêu chí **GLS**:

$$\underset{\sim}{p}^* = \underset{\sim}{M}_N^{(1,3)} \underset{\sim}{u}_N + (I - \underset{\sim}{M}_N^{(1,3)} \underset{\sim}{M}_N) \mathscr{R} \qquad (2.$$

trong đó, dấu "*" trên $\underset{\sim}{p}$ biểu thị nghiệm theo tiêu chí **LS**, $\underset{\sim}{M}_N^{(1,3)}$ là một nghịch đảo suy r $\{1,3\}$ của $\underset{\sim}{M}_N$ và R là véctơ bất kì có kích thước $((2n+1)-r)$ trong trường số thực.

Sử dụng các phương trình trong (1.3.21), ta có ước lượng tham số theo **WLS**:

$$\hat{p}_g^* = R_2^{-1/2} R_1^{1/2} \tilde{M}_N^{(1,3)} R_2^{-1/2} R_1^{1/2} \tilde{u}_N + R_2^{-1/2} (I - R_1^{1/2} \tilde{M}_N^{(1,3)} R_2^{-1/2} R_1^{1/2} \tilde{M}_N R_2^{-1/2}) \mathscr{R} \qquad (2.2$$

Hiển nhiên, từ (2.2.10), $\hat{p}_g^*$ có giá trị nhỏ nhất khi $\mathscr{R} = 0$ và trở thành $\hat{p}^*$. Từ đó thu được (2.2.3) và bổ đề đã được chứng minh.

***Hệ quả 2.2.1**: Khi $R_1 = I_{Np}$ và $R_2 = I_r$ với r là hạng của $\tilde{M}_N$, ước lượng véctơ tham số quá trình của hệ động học đánh giá theo tiêu chí* **WLS** *có dạng đơn giản:*

$$\hat{p}^* = \tilde{M}_N^{(1,3)}\tilde{u}_N \tag{2.2.11}$$

Chứng minh: Vì hạng của $\tilde{M}_N$ là r, $r < \min(Np, (2n+1)qp)$ nên tồn tại ít nhất một ma trận con không suy biến bậc r trong $\tilde{M}_N$. Sắp xếp lại $\tilde{M}_N$ sao cho r cột và hàng đầu tiên độc lập tuyến tính với nhau. Nghĩa là nhân trước và sau $\tilde{M}_N$ với ma trận hoán chuyển để ma trận con không suy biến bậc r nằm ở khối trái phía trên của $\tilde{M}_N$ như sau:

$$\Phi\tilde{M}_N\Sigma = \left[\begin{array}{c|c} (\tilde{M}_N)_{11} & (\tilde{M}_N)_{12} \\ \hline (\tilde{M}_N)_{21} & (\tilde{M}_N)_{22} \end{array}\right] \in \left[\begin{array}{c|c} r \times r & r \times ((2n+1)qp - r) \\ \hline (Np - r) \times r & (Np - r) \times ((2n+1)qp - r) \end{array}\right] \tag{2.2.12}$$

trong đó, Φ và Σ là các ma trận hoán chuyển trước và sau có bậc tương ứng là Np và $(2n+1)qp$. Cả hai đều khả nghịch và có đặc tính $\Phi^{1} = \Phi^T$ và $\Sigma^{1} = \Sigma^T$.

Hạng của $(\tilde{M}_N)_{11}$ chính là hạng của $\tilde{M}_N$. Vì vậy, để thực hiện chia khối $\tilde{M}_N$ ta dễ dàng thấy $(\tilde{M}_N)_{22} = (\tilde{M}_N)_{21}(\tilde{M}_N)_{11}^{-1}(\tilde{M}_N)_{12}$ phải thoả mãn. Từ đó làm xuất hiện hai thừa số Ω và Λ có kích thước $(r \times ((2n+1)qp-r))$ và $((Np-r) \times r)$ theo cách:

$$\Omega = (\tilde{M}_N)_{11}^{-1}(\tilde{M}_N)_{12} \text{ và } \Lambda = (\tilde{M}_N)_{21}(\tilde{M}_N)_{11}^{-1} \tag{2.2.13}$$

thoả mãn
$$\begin{bmatrix} (\tilde{M}_N)_{12} \\ \hline (\tilde{M}_N)_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\tilde{M}_N)_{11} \\ \hline (\tilde{M}_N)_{21} \end{bmatrix}\Omega \tag{2.2.14}$$

và
$$\left[(\tilde{M}_N)_{21} \mid (\tilde{M}_N)_{22}\right] = \Lambda\left[(\tilde{M}_N)_{11} \mid (\tilde{M}_N)_{12}\right]. \tag{2.2.15}$$

Từ các đồng nhất thức ở trên, có thể biểu diễn $\tilde{M}_N$ theo dạng mới:

$$\tilde{M}_N = \Phi^T\left[\begin{array}{c|c} (\tilde{M}_N)_{11} & (\tilde{M}_N)_{12} \\ \hline (\tilde{M}_N)_{21} & (\tilde{M}_N)_{22} \end{array}\right]\Sigma^T = \Phi^T\begin{bmatrix} I_r \\ \hline \Lambda \end{bmatrix}(\tilde{M}_N)_{11}\left[I_r \mid \Omega\right]\Sigma^T \tag{2.2.16}$$

với,
$$\left[I_r \mid \Lambda^T\right]^T\Phi = \Phi^T\begin{bmatrix} I_r \\ \hline \Lambda \end{bmatrix} \text{ và } (\tilde{M}_N)_{11}\left[I_r \mid \Omega\right] = \Sigma\begin{bmatrix} I_r \\ \hline \Omega^T \end{bmatrix}(\tilde{M}_N)_{11} \tag{2.2.17}$$

là cơ sở tương ứng của không gian xác định của $\tilde{M}_N$ và cơ sở chuyển vị của không gian không đối với $\tilde{M}_N$.

Phương trình trong (2.2.16) trở thành:

$$\tilde{u}_N - \Phi^T \left[\frac{I_r}{\Lambda}\right] (\tilde{M}_N)_{II} [I_r \mid \Omega] \Sigma^T \tilde{p} = \tilde{\epsilon}_N . \qquad (2.2.18)$$

Thực hiện chia khối Φ và véctơ tham số quá trình của hệ động học một cách tương ứng:

$$\Phi = \left[\frac{\Phi_I}{\Phi_2}\right] \in \left[\frac{r \times Np}{(Np-r) \times Np}\right] \text{ và } \tilde{p} = \left[\frac{\tilde{p}_I}{\tilde{p}_2}\right] \in \left[\frac{r \times I}{((2n+I)qp-r) \times I}\right]. \qquad (2.2.19)$$

Từ đó, có thể viết (2.2.18) dưới dạng:

$$\left[\frac{I_r}{\Lambda}\right] (\tilde{M}_N)_{II} [I_r \mid \Omega] \Sigma^T \left[\frac{\tilde{p}_I}{\tilde{p}_2}\right] = \left[\frac{\Phi_I}{\Phi_2}\right] (\tilde{u}_N - \tilde{\epsilon}_N) . \qquad (2.2.20)$$

Trong trường hợp trùng khít, $\tilde{\epsilon}_N = \tilde{u}_N$, nghĩa là sau khi thực hiện quy trình tối thiểu hóa, (2.2.20) có nghiệm tổng quát sau đây:

$$\tilde{p}^* = \left[\frac{\tilde{p}_I^*}{\tilde{p}_2^*}\right] = \Sigma \left[\frac{(\tilde{M}_N)_{II}^{-I} \Phi_I \tilde{u}_N}{0}\right] + \Sigma \left[\frac{-\Omega}{I_{(2n-I)qp-r}}\right] \mathscr{R}_I \qquad (2.2.21)$$

trong đó, $\mathscr{R}_I$ là véctơ có $((2n+I)qp-r)$ chứa các giá trị thực tuỳ ý chọn.

Nghiệm của (2.2.20) tồn tại hay (2.2.21) có giá trị khi điều kiện nhất quán sau đây được thoả mãn:

$$\Phi_2(\tilde{u}_N - \tilde{\epsilon}_N) = \Lambda \Phi_I(\tilde{u}_N - \tilde{\epsilon}_N)$$

vì, $\Sigma \left[\frac{(\tilde{M}_N)_{II}^{-I} \Phi_I}{0}\right] = \tilde{M}_N^{(I,3)}$ nên (2.2.11) được dẫn đến từ (2.2.21) với $\mathscr{R}_I = 0$. Hệ quả đã được chứng minh.

2.2.2. Quan hệ giữa mô hình hệ thống, mô hình giảm bậc và mô hình giả ®ịnh

Nội dung chính của mục này liên quan đến sự phát triển mối quan hệ giữa mô hình hệ động học, mô hình giả định và mô hình giảm bậc trong các phương trình quy chiếu tối ưu có ứng dụng ma trận nghịch đảo suy rộng. Với mục đích này, bài toán tối ưu trên cơ sở các tham số để giảm bậc một mô hình hệ động học bậc n, có tham số chưa biết được xây dựng đầu tiên theo khái niệm sai số đầu vào.

2.2.2.1. Các kết quả về đánh giá, ước lượng tham số

Định lí 2.2.1: *Đối với một hệ động học có tính đồng thời điều khiển và quan sát, có bậc n, tồn tại một tập các mô hình giả định có tính đồng thời điều khiển và quan sát, có bậc m, $m \geq n$, và một tập các mô hình giảm bậc có tính đồng thời điều khiển và quan sát có bậc r, $r \leq n$. Với mô hình giả định chọn trước, luôn tồn tại một phép chiếu tối ưu $\sigma_2 = G_2^T \Gamma_2$ bậc $(n + r)$, các tham số ghép hợp tối ưu được mô tả theo các tham số của mô hình giả định và các thừa số của phép chiếu như sau:*

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix} = \sigma_2^g G_2^T A_m \Gamma_2 \sigma_2^g \quad (2.2.22.a)$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B_s \\ B_r \end{bmatrix} = -\sigma_2^g G_2^T B_m \quad (2.2.22.b)$$

$$\Omega \begin{bmatrix} C_s & 0 \\ 0 & C_r \end{bmatrix} = -\Omega \begin{bmatrix} I_q \\ I_q \end{bmatrix} C_m \Gamma_2 \sigma_2^g \quad (2.2.22.c)$$

rong đó, $\Omega = \left[(R_{sr} - R_s) \quad (R_{sr} - R_r)\right]$ và chỉ số phụ g viết phía trên của σ_2 biểu thị ma trận nghịch đảo suy rộng của σ_2

Có hai ma trận tối ưu xác định dương bậc (n + r), $\bar{Q}$ và $\bar{P}$, sao cho với phép chiếu σ_2 rường hợp chọn riêng biệt của σ_2^g, các điều kiện phải thoả mãn là:

$$\rho(\bar{Q}) = \rho(\bar{P}) = \rho(\bar{Q}\bar{P}) = (n + r) \quad (2.2.22.d)$$

$$G_2^T A_m \Gamma_2 \bar{Q} + \bar{Q} \Gamma_2^T A_m^T G_2 + G_2^T B_m V B_m^T G_2 = 0 \quad (2.2.22.e)$$

$$\Gamma_2^T A_m^T G_2 \bar{P} + \bar{P} G_2^T A_m \Gamma_2 + \Gamma_2^T C_m^T [I_q \quad I_q] \begin{bmatrix} R_s & -R_{sr} \\ -R_{sr} & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_q \\ I_q \end{bmatrix} C_m \Gamma_2 = 0 \quad (2.2.22.f)$$

rong đó, $R_s = \alpha_s R \alpha_s$, $R_{sr} = \alpha_s R \alpha_r$ và $R_r = \alpha_r R \alpha_r$.

Chứng minh: Để tối thiểu hoá hàm mục tiêu biểu diễn bởi biểu thức $J \leq tr\tilde{Q}\tilde{R}$ ràng buộc bởi phương trình điều kiện $\tilde{A}\tilde{Q} + \tilde{Q}\tilde{A}^T + \tilde{B}V_m\tilde{B}^T = 0$, hàm Lagrangian được xây dựng như sau:

$$\mathscr{L}(A_m, B_m, C_m, Q, P, \lambda_l) = tr[\lambda QR + (AQ + QA^T + BV_m B^T)P] \quad (2.2.23)$$

rong đó, các nhân tử Lagrange $\lambda \geq 0$ và $\tilde{P} \in R^{(n+m+r)x(n+m+r)}$ không được đồng thời bằng không. Hơn nữa, để đảm bảo cho các điều kiện ràng buộc có tác dụng và hệ các phương trình rong dấu vết là độc lập tuyến tính, thì P phải là một ma trận xác định dương. Ma trận Q là đối xứng, xác định không âm. Tiến hành phân chia Q và P như sau:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{12}^T & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{13}^T & Q_{23}^T & Q_{33} \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{12}^T & P_{22} & P_{23} \\ P_{13}^T & P_{23}^T & P_{33} \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} (n \times n) & (n \times m) & (n \times r) \\ (m \times n) & (m \times m) & (m \times r) \\ (r \times n) & (r \times m) & (r \times r) \end{bmatrix}.$$

Thực hiện lấy đạo hàm riêng của $\mathscr{L}(.)$ theo các tham số chưa biết và cho các kết quả tìm được bằng không, ta có:

$$\mathscr{L}_{A_m}(.) = P_{22}Q_{22} + P_{12}^T Q_{12} + P_{23}Q_{23}^T = 0 \quad (2.2.24)$$

$$\mathscr{L}_{B_m}(.) = (P_{12}^T B_s + P_{23}B_r + P_{22}B_m)V_m = 0 \quad (2.2.25)$$

$$\mathscr{L}_{C_m}(.) = l[(R_{sr}^T - R_s)C_sQ_{12} + (R_{sr} - R_r)C_rQ_{23}^T - (R_{sr}^T - R_s + R_{sr} - R_r)C_mQ_{22}] = 0 \quad (2.2.26)$$

$$\mathscr{L}_{Q_{22}}(.) = A_m^TP_{22} + P_{22}A_m + lC_m^T(R_s - R_{sr}^T + R_r - R_{sr})C_m = 0 \quad (2.2.27)$$

$$\mathscr{L}_{Q_{12}}(.) = A_s^TP_{12} + P_{12}A_m - lC_s^T(R_s - R_{sr}^T)C_m = 0 \quad (2.2.28)$$

$$\mathscr{L}_{Q_{23}}(.) = A_m^TP_{23} + P_{23}A_r - lC_m^T(R_r - R_{sr})C_r = 0 \quad (2.2.29)$$

$$\mathscr{L}_{Q_{11}}(.) = A_s^TP_{11} + P_{11}A_s + lC_s^TR_sC_s = 0 \quad (2.2.30)$$

$$\mathscr{L}_{Q_{13}}(.) = A_s^TP_{13} + P_{13}A_r - lC_s^TR_{sr}C_r = 0 \quad (2.2.31)$$

$$\mathscr{L}_{Q_{33}}(.) = A_r^TP_{33} + P_{33}A_r + lC_r^TR_rC_r = 0 \quad (2.2.32)$$

$$\mathscr{L}_{P_{22}}(.) = A_mQ_{22} + Q_{22}A_m^T + B_mV_mB_m^T = 0 \quad (2.2.33)$$

$$\mathscr{L}_{P_{12}}(.) = A_sQ_{12} + Q_{12}A_m^T + B_sV_mB_m^T = 0 \quad (2.2.34)$$

$$\mathscr{L}_{P_{23}}(.) = A_mQ_{23} + Q_{23}A_r^T + B_mV_mB_r^T = 0 \quad (2.2.35)$$

$$\mathscr{L}_{P_{11}}(.) = A_sQ_{11} + Q_{11}A_s^T + B_sV_mB_s^T = 0 \quad (2.2.36)$$

$$\mathscr{L}_{P_{13}}(.) = A_sQ_{13} + Q_{13}A_r^T + B_sV_mB_r^T = 0 \quad (2.2.37)$$

$$\mathscr{L}_{P_{33}}(.) = A_rQ_{33} + Q_{33}A_r^T + B_rV_mB_r^T = 0. \quad (2.2.38)$$

Như đã thấy trong (2.2.27), (2.2.30) và (2.2.32) vì A_s, A_m và A_r cần thiết phải ổn định, nếu $\lambda = 0$, thì P_{11}, P_{22} và P_{33} cũng là các ma trận không. Vì vậy, không thể gán cho λ giá trị không. Cho $\lambda = 1$, P_{11}, P_{22} và P_{33} là xác định dương, nên khả nghịch thông thường. Từ (2.2.33), (2.2.36) và (2.2.38), ta nhận thấy rằng Q_{11}, Q_{22} và Q_{33} cũng khả nghịch.

Định nghĩa $P^* = \begin{bmatrix} P_{12} \\ P_{23}^T \end{bmatrix}$ và $Q^* = \begin{bmatrix} Q_{12} \\ Q_{23}^T \end{bmatrix}$ có kích thước (n+r)xm. Từ (2.2.24), thấy rằng:

$\Gamma_2G_2^T = I_m$, với $G_2 = P_{22}^{-1}P^{*T} \in R^{mx(n+r)}$ và $G_2^T = -Q^*Q_{22}^{-1} \in R^{(n+r)xm}$, $s_2 = G_2^TG_2 \in R^{(n+r)x(n+r)}$, $G_2^TM_2\Gamma_2 = \bar{Q}\bar{P}$ với $M_2 = -Q^{*T}P^{*T} = Q_{22}P_{22} \in R^{mxm}$ là bán đơn dương.

Trên cơ sở đó định nghĩa hai ma trận đối xứng:

$$\bar{Q} = Q^*Q_{22}^{-1}Q^{*T}, \bar{P} = P^*P_{22}^{-1}P^{*T} \in R^{(n+r)x(n+r)}$$

v $r \le n \le m \le (n+r)$, ta có $\rho(\bar{Q}) = \rho(Q_{12}) + \rho(Q_{23}) = (n+r)$ và. Do đó $\bar{P}$ và $\bar{Q}$ là xác định dương.

Tham chiếu Q^*, P^* vừa định nghĩa và (2.2.24) - (2.2.38), bằng một vài phép biến đổi số học đơn giản ta dễ dàng có được điều phải chứng minh.

Trong trường hợp hiện tại (2.2.22.e) và (2.2.22.f) được nói đến là các phương trình Lyapunov biến dạng. Trong hai phương trình biến dạng này, vai trò của các ma trận $\overline{Q}$ và $\overline{P}$ cũng giống với vai trò của các Gramian điều khiển và quan sát của hệ thống ghép hợp trong hệ các phương trình Lyapunov chuẩn, do đó hai ma trận $\overline{Q}$ và $\overline{P}$ được nói đến dưới tên gọi là các anagramian (tương tự gramnian) điều khiển và quan sát.

Nếu một tập các tham số mô hình biểu diễn trong không gian biến trạng thái được định nghĩa là $L: = (A, B, C)$, thì khi tối thiểu hoá $\mathscr{L}(.)$ theo tập của tham số mô hình giả định, tồn tại hai phép biến đổi ϕ_s và ϕ_r biến từ không gian tham số của mô hình giả định sang không gian tham số của mô hình hệ động học và mô hình giảm bậc:

$$\phi_s \Lambda_m = \Lambda_s, \quad \phi_r \Lambda_m = \Lambda_r \tag{2.2.39}$$

sao cho

$$(f_r^g L_r - f_s^g L_s) \in [m(f_s) + m(f_r)] \tag{2.2.40}$$

để tồn tại tập các nghiệm chung, là một trong những mặt nghiệm đa bậc mặt (manifolds) tương đương sau:

$$f_s^g L_s + \Sigma_{m(f_s)} \left[\Sigma_{m(f_s)} + \Sigma_{m(f_r)}\right]^g \left[f_r^g L_r - f_s^g L_s\right] + \left[m(f_s) \cap m(f_r)\right] \tag{2.2.41}$$

$$F_r^g L_r - \Sigma_{m(F_r)} \left[\Sigma_{m(F_s)} + \Sigma_{m(F_r)}\right]^g \left[F_r^g L_r - F_s^g L_s\right] + \left[\mu(F_s) \cap \mu(F_r)\right] \tag{2.2.42}$$

$$\left[F_r^g L_r + F_s^g L_s\right]^g \left[F_r^g L_r + F_s^g L_s\right] + \left[m(F_s) \cap m(F_r)\right] \tag{2.2.43}$$

ở đây, chỉ số phụ "g" viết ở trên biểu thị nghịch đảo suy rộng của phép biến đổi tương ứng, $\mu(.)$ biểu thị không gian không của phép biến đổi được viết bên trong dấu ngoặc, $\sum_{m(.)}$ biểu thị phép biến đổi vào trong không gian Null của phép biến đổi tương ứng được viết trong dấu ngoặc và kí hiệu "$\cap$" chỉ phần giao của hai không gian không.

Các điều kiện cần phải thoả mãn bởi các tham số của mô hình hệ động học và của mô hình giảm bậc để đảm bảo cho đa bậc mặt của các nghiệm chung là không rỗng, do đó có thể được rút ra. Hơn nữa, có thể chứng tỏ rằng cả Φ_s và Φ_r không chỉ là các phép biến đổi mà còn là các phép chiếu và mỗi một trong những phép chiếu đó là một đẳng cự thành phần của phép biến đổi ghép hợp của hai phép biến đổi đó. Ngoài ra, Φ_r là một đẳng cự thành phần của Φ_s, điều này có thể dễ dàng nhận thấy nếu thực hiện chéo hoá Φ_s và Φ_r. Một điều cũng đã được chứng tỏ rằng các tham số tối ưu của mô hình hệ động học và của mô hình giảm bậc liên hệ với các tham số của mô hình giả định bởi hệ các phương trình qui chiếu tối ưu.

2.2.2.2. Giải tích tính chất tối ưu

Định lí 2.2.2: *Giả sử đã thu được các tham số ghép hợp theo định lí 2.2.1. Khi đó, tồn tại hai ma trận xác định không âm Θ và Π đều bậc $(n + r)$ sao xuất hiện hai phép chiếu tối ưu nữa và tất cả phép chiếu tối ưu ghép lại với nhau theo tay ba qua các thừa số của chúng.*

Chứng minh: Định nghĩa $\Theta = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{13} \\ Q_{13}^T & Q_{33} \end{bmatrix}$, $\Pi = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{13} \\ P_{13}^T & P_{33} \end{bmatrix}$, cả hai có bậc (n + r). Dễ dàng nhận thấy rằng Θ và Π là xác định không âm. Định nghĩa $\Theta = \Theta - \overline{Q}$ và $P = \tilde{P} - \overline{P} \in R^{(n+r)x(n+r)}$

Tham khảo định lí 2.2.1, biểu thức tổ hợp các phương trình trong (2.2.26), (2.2.27), (2.2.28) có thể được viết: $\overline{A}\Theta + \Theta\overline{A}^T + \overline{B}V_m\overline{B}^T = 0$. Tham chiếu biểu thức của Θ và chú ý các đẳng thức trong định lí 2.2.1, biểu thức (2.2.44) trở thành: $\overline{A}\Theta + \Theta\overline{A}^T = 0$ và cho một nghiệm duy nhất. Vì $\overline{A}$ phải ổn định, nên nghiệm duy nhất của phương trình trên là một ma trận không.

Tương tự, tham chiếu Định lí 2.2.1 và Π, biểu thức tổ hợp gồm (2.2.26), (2.2.27), (2.2.28) dẫn đến phương trình: $\overline{A}\Pi + \Pi\overline{A}^T = 0$ có nghiệm duy nhất cũng là một ma trận không.

Vì Θ và Π là các ma trận không, và Q_{22} và P_{22} có thể nghịch đảo được, nên ta có thể dễ dàng thu được các đẳng thức sau đây:

$$Q_{11} - Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{12}^T = 0,\ P_{11} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{12}^T = 0,\ Q_{13} - Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{23} = 0,\ P_{13} - P_{12}P_{22}^{-1}P_{23} = 0$$

$$Q_{33} - Q_{23}^TQ_{22}^{-1}Q_{23} = 0,\ P_{33} - P_{23}^TP_{22}^{-1}P_{23} = 0$$

Từ các đẳng thức này kết hợp với các biểu thức (2.2.24)-(2.2.38), ta có:

$$P_{11}Q_{11} + P_{13}Q_{13}^T = P_{12}P_{22}^{-1}(P_{12}^TQ_{12} + P_{23}Q_{23}^T)Q_{22}^{-1}Q_{12}^T = -P_{12}Q_{12}^T$$

$$P_{33}Q_{33} + P_{13}^TQ_{13} = P_{23}^TP_{22}^{-1}(P_{23}Q_{23}^T + P_{12}^TQ_{12})Q_{22}^{-1}Q_{23} = -P_{23}^TQ_{23}$$

Khi đó, các đẳng thức sau dễ dàng được rút ra:

$$P_{11}Q_{11} + \begin{bmatrix} P_{12} & P_{13} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_{12}^T \\ Q_{13}^T \end{bmatrix} = 0 \quad (2.2.44)$$

$$P_{22}Q_{22} + \begin{bmatrix} P_{12}^T & P_{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_{12} \\ Q_{23}^T \end{bmatrix} = 0 \quad (2.2.45)$$

$$P_{33}Q_{33} + \begin{bmatrix} P_{13}^T & P_{23}^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_{13} \\ Q_{23} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.2.46)$$

Như ở phần chứng minh Định lí 2.2.1, Q_{11}, Q_{33}, P_{11} *và* P_{33} cũng được chỉ ra là các ma trận khả nghịch đảo, khi đó:

$$-P_{11}^{-1}\begin{bmatrix} P_{12} & P_{13} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_{12}^T \\ Q_{13}^T \end{bmatrix}Q_{11}^{-1} = I_n \quad (2.2.47)$$

$$-P_{22}^{-1}\begin{bmatrix} P_{12}^T & P_{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_{12} \\ Q_{23}^T \end{bmatrix}Q_{22}^{-1} = I_m \quad (2.2.48)$$

$$-P_{33}^{-1}\begin{bmatrix} P_{13}^T & P_{23}^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_{13} \\ Q_{23} \end{bmatrix}Q_{33}^{-1} = I_r \quad (2.2.49)$$

Với ba phép chiếu tối ưu được định nghĩa là:

$$\sigma_1 = G_1^T \Gamma_1, \quad \sigma_2 = G_2^T \Gamma_2, \quad \sigma_3 = G_3^T \Gamma_3$$

trong đó, $G_1 = P_{11}^{-1}[P_{12} \quad P_{13}]$, $G_1 = -Q_{11}^{-1}[Q_{12} \quad Q_{13}]$, $G_2 = P_{22}^{-1}[P_{12}^T \quad P_{23}]$

$$G_2 = -Q_{22}^{-1}[Q_{12}^T \quad Q_{23}],\ G_3 = P_{33}^{-1}[P_{13}^T \quad P_{23}^T],\ G_3 = -Q_{33}^{-1}[Q_{13}^T \quad Q_{23}^T]$$

Dễ dàng nhận thấy rằng các phép chiếu được ghép tương hỗ lẫn nhau bởi các thừa số của chúng. Hơn nữa ta đã biết:

$$Q^* = \begin{bmatrix} Q_{12} \\ Q_{23}^T \end{bmatrix} = -\bar{Q}\Gamma_2^T,\ P^* = \begin{bmatrix} P_{12} \\ P_{23}^T \end{bmatrix} = \bar{P}G_2^T$$

ta có: $Q_{12} = [I_n \quad 0_{n\times r}]Q^* = -[I_n \quad 0_{n\times r}]\bar{Q}\Gamma_2^T,\ Q_{23}^T = -[0_{rxn} \quad I_r]\bar{Q}\Gamma_2^T,$

$$P_{12}^T = P^*\begin{bmatrix} I_n \\ 0_{r\times n} \end{bmatrix} = G_2\bar{P}\begin{bmatrix} I_n \\ 0_{r\times n} \end{bmatrix},\ \bar{P}_{23} = G_2\bar{P}\begin{bmatrix} 0_{n\times r} \\ I_r \end{bmatrix}. \tag{2.2.50}$$

Do đó, từ (2.2.45) và (2.2.46) ta có các đẳng thức sau đây:

$$P_{11}Q_{11} = -\left[[I_n \quad 0_{nxr}]\bar{P}G_2^T \quad P_{13}\right]\begin{bmatrix} -\Gamma_2\bar{Q}\begin{bmatrix} I_n \\ 0_{r\times n} \end{bmatrix} \\ Q_{13}^T \end{bmatrix} \tag{2.2.51}$$

$$P_{33}Q_{33} = -\left[P_{13}^T \quad [0_{r\times n} \quad I_r]\bar{P}G_2^T\right]\begin{bmatrix} Q_{13} \\ -\Gamma_2\bar{Q}\begin{bmatrix} 0_{n\times r} \\ I_r \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \tag{2.2.52}$$

Từ đó, dễ dàng thấy rằng $P_{33}Q_{33}$ là một đẳng cự thành phần của $P_{11}Q_{11}$. Điều này có nghĩa là tích các gramian điều khiển và quan sát của mô hình giảm bậc được tối ưu đối với tích các gramian điều khiển và quan sát của mô hình hệ động học. Do đó, không chỉ có các tham số mà còn cả véctơ trạng thái, cả hai yếu tố đó của mô hình giảm bậc đều được tối ưu theo các tham số và véctơ trạng thái của mô hình hệ động học. Định lí đã được chứng minh.

2.2.2. Đề xuất phương pháp tối ưu trạng thái

2.2.2.1. Các kết quả liên quan đến tối ưu theo trạng thái

Bổ đề 2.2.3: *Cho véctơ x_n chứa n trạng thái độc lập tuyến tính của một hệ động học. Giả sử rằng có một mô hình giả định được chọn, có véctơ x_m chứa m trạng thái độc lập tuyến tính với $m < n$. Khi đó, tồn tại một phép biến đổi không đồng dạng $T \in R^{mxn}$ có hạng m lên véctơ x_n để thu được x_m sao cho nếu số đầu ra q của hệ động học nhỏ hơn hoặc bằng bậc m của mô hình giả định, $q \le m$, thì $T\,x_n$ đưa đến chuẩn cực tiểu trong số các bình phương tối thiểu sai số đầu ra.*

Chứng minh: Có thể viết
$$x_m = Tx_n,\ T \in R^{mxn},\ m < n. \tag{2.2.53}$$

Để m thành phần của x_m được xác định độc lập, T phải có hạng đủ theo hàng. Tuy nhiên, khó tìm lại được trạng thái gốc của mô hình hệ thống từ các trạng thái đã được biến đổi. Gọi x_s^*

là véctơ trạng thái tìm được bởi một phép biến đổi ngược lên x_m. Nghĩa là, $x_s^* = \Pi x_m, \Pi \in R^{nxm}$. Khi đó, xuất hiện sai số tối ưu trước véctơ x_n gốc của mô hình hệ động học hay một quy trình tối ưu trên cơ sở véctơ trạng thái xuất hiện. Dễ dàng chỉ ra rằng sai số tối ưu theo nghĩa chuẩn đạt được khi $\Pi = T^{\cdot}$. Nghĩa là:

$$J_{Sopt} = \int_0^t \left\| x_n - T^{\cdot} x_m \right\|_R^2 dt = minimum \tag{2.2.54}$$

trong đó, chỉ số "R" ám chỉ chuẩn được trọng số hoá bởi ma trận xác định không âm với kích thước phù hợp. Biểu thức (2.2.54) được biết đến là *tiêu chí tối ưu theo trạng thái.*

Gán $R = C_n^T R_l C_n$, trong đó C_n là ma trận kích thước qxn, hạng đủ theo hàng, $q < n$ và R_l là một ma trận xác định không âm, kích thước phù hợp. Từ (2.2.54), ta có:

$$J_{Oopt} = \int_0^t (C_n x_n - C_n T^{\cdot} x_m)^T R_l (C_n x_n - C_n T^{\cdot} x_m) dt \tag{2.2.55}$$

và một hàm tiêu chí để tối thiểu hoá được định nghĩa:

$$J_O = \int_0^\infty (y_n - y_m)^T R_l (y_n - y_m) dt. \tag{2.2.56}$$

Đó chính là biểu thức biểu diễn trọng bình phương sai số đầu ra.

Nhận xét liên quan đến bổ đề gồm: (i). Vì T là hằng, nên $\dot{x}_m = T\dot{x}_n$, (ii). Giá trị tối ưu của C_m là $C_m = C_n^{\cdot} T^+$, (iii). Do chưa biết bậc n của mô hình hệ động học nên có thể $m > n$ và x_m không được xác định chính xác. Ta coi mô hình hệ động học là phiên bản tối ưu của mô hình giả định, nên chờ đợi một véctơ gần đúng cho x_m từ:

$$x_m^* - Tx_n = \varepsilon_m, \varepsilon_m \in R^{mxn}, m > n \quad \text{và} \quad \int_0^t \left\| x_n - T^+ T x_n \right\|_R^2 dt = \int_0^t \left\| x_n - x_n \right\|_R^2 dt = 0 \tag{2.2.57}$$

Bổ đề 2.2.4: *Cho véctơ trạng thái x_n chứa n trạng thái độc lập tuyến tính của một hệ động học là véctơ trạng thái biến đổi của mô hình giả định:*

$$x_n = T^+ x_m, T \in R^{mxn}, \rho(T) = m < n, \tag{2.2.58}$$

khi đó, thừa số hoá phép biến đổi không đồng dạng $\quad T = GE = EH \quad$ (2.2.59)

trong đó, $E = \mathbb{E}(x_m x_n^T) \in R^{mxn}$ *là một đẳng cự thành phần,* $G = \mathbb{E}(x_n x_n^T) \in R^{nxn}$, *và* $H = \mathbb{E}(x_m x_m^T) \in R^{mxm}$ *là các xác định không âm và* $\mathbb{E}(.)$ *biểu thị giá trị kì vọng hoặc giá trị trung bình của biểu thức trong dấu (.) khi $t \to \infty$ tương ứng với trường hợp tín hiệu kích thích là nhiễu trắng có cường độ xác định hoặc các tín hiệu tiền định không tương quan.*

Chứng minh: Nhân phía sau hai vế của (2.2.58) lần lượt với x_n^T và x_m^T sau đó lấy kì vọng toán học. Ta được $\mathbb{E}(x_m x_n^T)^T = \mathbb{E}(x_m x_n^T)^+ \in R^{mxn}$ điều kiện để $E = \mathbb{E}(x_m x_n^T)$ là một ánh xạ thành phần. Trong khi $\mathbb{E}(x_m x_m^T)$ và $\mathbb{E}(x_n x_n^T)$ là các ma trận không âm. Nên, thực hiện tựa nghịch đảo của $GE^{\cdot}$ và $E^T H$ theo cách thông thường. Do đó, ta có (2.2.59).

Nhận xét liên quan đến bổ đề gồm: (i). Bổ đề đúng với cả khi $x_m \in \mathcal{R}(T)$ và khi $x_m \notin \mathcal{R}(T)$; (ii). $T^{\cdot} = E^+ G = H^{\cdot} E^{\cdot}$; (iii). Các ma trận $\sigma_1 = EE^T$ và $\sigma_2 = E^T E$ đều là các phép chiếu tối ưu trực giao và có dạng sau $\sigma_1 = \begin{bmatrix} I_n & \\ & 0 \end{bmatrix}$ và $\sigma_2 = I_n$; (iv). Phân tích $G = U_G \Lambda_G V_G^T$ và $H = U_H \Lambda_H V_H^T$ trong đó, $\Lambda_G = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ với $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$, $\Lambda_H = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m)$ với $\mu_1 \geq \mu_2 \geq ... \geq \mu_m$. Điều đó chơ phép tư duy đến việc rút E từ phương trình $EG - HE = 0$ để cấu trúc biến đổi không đồng dạng T.

2.2.2.2. Nghiệm của bài toán ước lượng tham số mô hình

Định lí 2.2.3: *Giả sử có các đại lượng đo lường phục vụ mục đích đánh giá ước lượng tham số mô hình của một hệ động học có bậc n. Giả sử một mô hình giả định có đặc tính đồng thời điều khiển và quan sát được chọn có bậc m, m > n. Khi đó, có một phép chiếu tối ưu trực giao* $\sigma = EE^T \in R^{mxm}, \rho(\sigma) = n$, và $\hat{Q} = HEW_{nc}E^T$, $\hat{P} = H^+EW_{no}E^T \in R^{mxm}$ *cả hai ma trận xác định không âm cùng có hạng n, sao cho các tham số tạo nên phần có tính điều khiển và quan sát đồng thời của mô hình hệ động học có thể tính được từ:*

$$A_n = E^T H^{\cdot} A_m HE,\ B_n = E^T H^+ B_m,\ C_n = KC_m HE \tag{2.2.60.a}$$

thoả mãn các điều kiện sau đây:

$$\sigma\left[H^{\cdot} A_m \hat{Q} + \hat{Q} A_m^T H^+ + H^{\cdot} B_m V B_m^T H^+\right]\sigma^T = 0 \tag{2.2.60.b}$$

$$\sigma^T\left[H A_m^T \hat{P} + \hat{P} A_m H + H C_m^T K^T R K C_m H\right]\sigma = 0 \tag{2.2.60.c}$$

trong đó, $E = \mathbb{E}(x_m x_n^T) \in R^{mxn}$ *là một đẳng cự thành phần,* $H = \mathbb{E}(x_m x_m^T) \in R^{mxm}$ *là ma trận xác định dương,* W_{nc} *và* W_{no} *là gramian điều khiển và quan sát hệ động học đó và ma trận K là phép biến đổi tương tự để đáp ứng đầu ra của mô hình giả định trùng khớp với đáp ứng của hệ thống động học.*

<u>Chứng minh:</u> Giả sử một mô hình giả định có tính chất điều khiển và quan sát đồng thời được chọn có bậc m với m ≥ n mô tả bởi các phương:

$$x_n = A_m x_m + B_m u \tag{2.2.61}$$

$$y_m = C_m x_m. \tag{2.2.62}$$

Nhân trước cả hai vế của phương trình trong (2.2.61) với $T^{\cdot}$ và nhân trước hai vế của phương trình trong (2.2.62) với ma trận khả nghịch $K \in R^{qxq}$, $\rho(K) = q$, và sau đó thay x_m bởi giá trị gần đúng nhất của nó là Tx_n ta có:

$$A_n = T^{\cdot} A_m T,\ B_n = T^+ B_m,\ C_n = KC_m T \tag{2.2.63}$$

Từ đây, tham khảo bổ đề 2.2.4, biểu thức trong (2.2.60.a) được rút ra.

Để mô hình hệ động học có tính điều khiển và quan sát đồng thời thì A_n là một ma trận ổn định, gramian điều khiển và gramian quan sát của hệ động học đó là nghiệm duy nhất tương ứng của phương trình Lyapunov. Hai phương trình này, sau khi nhân trước và sau tương ứng với E và E^T và tham khảo tới các biểu thức trong (2.2.60.a), trở thành:

$$EE^T H^+ A_m HEW_{nc}E^T + EW_{nc}E^T HA_m^T H^+ EE^T + EE^T H^+ B_m V B_m^T H^{\cdot} EE^T = 0 \tag{2.2.64}$$

$$EE^T H A_m^T EW_{no}E^T + EW_{no}E^T H^+ A_m HEE^T + EE^T HC_m^T K^T RKC_m HEE^T = 0. \quad (2.2.65)$$

Định nghĩa $\sigma = EE^T$, $\hat{Q} = HEW_{nc}E^T$, $\hat{P} = H EW_{no}E^T$, tất cả các ma trận đó đều có bậc m. Nhận thấy $\hat{Q}$ và $\hat{P}$ đối xứng có $\rho(\hat{Q}) = \rho(\hat{P}) = \rho(\sigma) = n < m$, nên $\hat{Q}$ và $\hat{P}$ là xác định không âm và $\hat{Q}\sigma = \hat{Q}$ và $\sigma^T\hat{P} = \hat{P}$. Vì vậy, (2.2.60.b) và (2.2.60.c) thu được từ (2.2.64) và (2.2.65) tương ứng. Định lí được chứng minh.

2.2.2.3. Tính bền vững mô hình hệ động học

2.2.2.3.1. Phát biểu bài toán

Cho một hệ động học tuyến tính bất định có bậc n được mô tả bởi:

$$\dot{\tilde{x}}_s(t) = \tilde{A}_s\tilde{x}_s(t) + \tilde{B}_s w(t), \quad t \in [0, \infty) \quad (2.2.66)$$

$$\tilde{y}_s(t) = \tilde{C}_s\tilde{x}_s(t) \quad (2.2.67)$$

và một mô hình giả định có bậc m, m > n, được mô tả bởi:

$$\dot{\tilde{x}}_m(t) = \tilde{A}_m\tilde{x}_m(t) + \tilde{B}_m w(t), \quad t \in [0, \infty) \quad (2.2.68)$$

$$\tilde{y}_m(t) = \tilde{C}_m\tilde{x}_m(t) \quad (2.2.69)$$

tồn tại tiêu chí tối ưu trạng thái sau:

$$J_{0opt} = Sup\mathbb{E}\left\{\left\|\tilde{x}_s - \tilde{T}^+x_m\right\|_R^2\right\}, \tilde{T} \in R^{mxn}, \rho(\tilde{T}) = n \quad (2.2.70)$$

và tiêu chí trọng bình phương sai số tương ứng:

$$J_{0opt} = Sup\mathbb{E}\left\{\left\|y_m - \tilde{K}\tilde{y}_s\right\|_R^2\right\}, \tilde{K} \in R^{qxq}, \rho(\tilde{K}) = q \quad (2.2.71)$$

Hãy xác định các giá trị hạn chế của A_s, B_s và C_s sao cho mô hình mô tả bởi các phương trình trong (2.2.68) và (2.2.69) có tính điều khiển và quan sát đồng thời.

2.2.2.3.2. Điều kiện đủ của chức năng bền vững

Trong trường hợp hiện tại:

$$\tilde{x}_s = \tilde{T}^+x_m, T \in R^{mxn}, \rho(T) = n, m > n. \quad (2.2.72)$$

Coi chuẩn véctơ và chuẩn ma trận trong trường hợp đang xem xét là nhất quán để các biến đổi xác định Δx_s dẫn tới một giới hạn ΔT và ngược lại. Với một mô hình giả định, thì $\|x_m\| = \kappa$, là một hằng số. Giả sử, không làm mất tính tổng quát:

$$\|\Delta x_s\| = 1, \ \|T\| = \sqrt{\lambda_1} \text{ và } \|T^+\| = 1/\sqrt{\lambda_n}$$

trong đó λ_1 và λ_n là trị riêng lớn nhất và nhỏ nhất khác không của TT^T.

Lấy chuẩn hai vế của (2.2.72) và thực hiện một số phép biến đổi toán học, giới hạn biên của những biến đổi trong phép biến đổi không đồng dạng T được tìm thấy như sau:

$$\| \Delta T \| = \sqrt{\lambda_l \lambda_n} / (\sqrt{\lambda_n} + \kappa). \tag{2.2.73}$$

Tương ứng với giới hạn trên, ta có:

$$\frac{\|\Delta T\|}{\|T\|} = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n} + \kappa}, \ \| \tilde{T} \| = \sqrt{\lambda_l} (1 + \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n} + \kappa}). \tag{2.2.74}$$

Một cách tương tự, ta có: $\| \Delta T^+ \| = 1/\kappa, \ \frac{\| \Delta T^+ \|}{\|T^+\|} = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\kappa}$ (2.2.75)

Tiêu chí tối ưu trạng thái biểu diễn bởi phương trình trong (2.2.70) trở thành:

$$J_{Sopt} = \|\Delta x_s\| + \|\Delta T^+\| \| x_m \| = 2 \tag{2.2.76}$$

Giới hạn ràng buộc của $\tilde{K}$ tìm được từ tiêu chí :

$$J_{0opt} = E\left\{\|C_m x_m\| + \|\tilde{K}\| \|C_m\| \|\tilde{T}\| \|x_m\|\right\} = 0 \tag{2.2.77}$$

và cho bởi biểu thức:

$$\|\tilde{K}\| = 1/\|\tilde{T}\|, \ \|\Delta K\| = (3\sqrt{\lambda_n} + 2\kappa)/\sqrt{\lambda_l}(2\sqrt{\lambda_n} + \kappa). \tag{2.2.78}$$

Từ đó nhận thấy rằng mô hình giả định đóng vai trò quan trọng trong trường hợp thông qua các trị riêng của TT^T. Bất đẳng thức:

$$1/\sqrt{\lambda_l} \leq \|\tilde{x}_s\| \leq 1/\sqrt{\lambda_n}$$

tìm được từ (2.2.72) giải thích rằng nếu mô hình giả định không được chọn phù hợp để bao trùm cả khoảng biến đổi về biên độ của nhiễu loại này, thì tính chất tối ưu giữa các trạng thái gốc và các trạng thái biến đổi sẽ không được đảm bảo. Điều đó có thể dẫn tới một giá trị ước lượng bị sai lệch mặc dù các đầu ra có thể hoàn toàn được trùng khớp nhờ vào vai trò của $\tilde{K}$.

2.2.2.3.3. Cấu trúc bất định

Giả sử $V = I_p$, $K = R = I_q$ và giả sử:

$$A_m = diag(-\alpha_1 \ ... \ -\alpha_m), \ B_m B_m^T = diag(\beta_1 \ ... \ \beta_m), \ C_m C_m^T = diag(\gamma_1 \ ... \ \gamma_m),$$

trong đó: α_i, β_i, $\gamma_i \geq 0$, với $i = 1, ..., m$.

Tương ứng với Δx_s, các tham số của hệ bất định đang xem xét được thay đổi bởi ΔA_s, ΔB_s và ΔC_s từ các giá trị danh định tương ứng A_s, B_s và C_s. Giá trị thay đổi lớn nhất là:

$$\| \Delta A_s \| \leq 2\sqrt{\alpha_l \lambda_l} / \kappa, \| \Delta B_s \| \leq \sqrt{\beta_l} / \kappa, \| \Delta C_s \| \leq \sqrt{\gamma_l \lambda_l \lambda_n} / (\sqrt{\lambda_n} + \kappa). \tag{2.2.79}$$

Các giá trị cực đại của các tham số lúc đó được giới hạn bởi:

$$\| \tilde{A}_s \| \leq \frac{\sqrt{\alpha_l \lambda_l} (\kappa + 2\sqrt{\lambda_n})}{\sqrt{\lambda_n} \kappa}, \ \| \tilde{B}_s \| \leq \frac{(\kappa + \sqrt{\lambda_n})\sqrt{\beta_l}}{\sqrt{\lambda_n} + \kappa}, \ \| \tilde{C}_s \| \leq \frac{\sqrt{\gamma_l \lambda_l} (\kappa + 2\sqrt{\lambda_n})}{\sqrt{\lambda_n} + \kappa}$$

Ta thấy nếu không sử dụng phương pháp tối ưu trạng thái thì khó xác định ảnh hưởng như thế nào của bất định biến trạng thái Δx_s đến các tham số khác của hệ thống động học đó, mặc dù biết chúng trở nên bất định.

2.2.2.3.4. Tính ổn định, điều khiển và quan sát

Những biến đổi của các tham số do tính bất định gây ra có thể làm cho mô hình hệ động học đang xét trở nên không ổn định, và do đó cũng không còn khả năng điều khiển, quan sát. Điều mà sẽ được chứng tỏ là mô hình giả định còn đóng vai trò quan trọng liên quan đến tính ổn định, điều khiển và quan sát của mô hình hệ động học đó.

Từ (2.2.60.a), ta thấy nếu H^+A_mH được chéo hoá, thì thành phần thứ n trên đường chéo của nó tương ứng với trị riêng nhỏ nhất của A_s. Kí hiệu trị riêng nhỏ nhất này của A_s là $-\alpha_{sn}$. Khi đó, mô hình của hệ động học đó sẽ giữ được trạng thái ổn định khi và chỉ khi giá trị cực đại ΔA_s không làm vị trí của các cực tương ứng với $-\alpha_{sn}$ dịch về phía phải của mặt phẳng *S*. Biên độ hạn chế đối với ΔA_s được cho bởi biểu thức:

$$\|\Delta A_s\| \le 2\sqrt{\alpha_l\lambda_l}/\kappa \le \sqrt{\alpha_{sn}}\,. \tag{2.2.80}$$

Tính chất điều khiển và quan sát của mô hình hệ động học sẽ không bị thay đổi nếu ma trận $\tilde{A}_s$ ổn định và các hạng của ma trận $\tilde{B}_s$ và $\tilde{C}_s$ cũng không thay đổi. Những hạng này không bị thay đổi khi mà số các trị riêng khác không của ma trận $\tilde{B}_s\tilde{B}_s^T$ và $\tilde{C}_s^T\tilde{C}_s$ được giữ không đổi. Giả sử rằng n trị riêng của ma trận $\tilde{B}_s\tilde{B}_s^T$ có thể được tìm từ phương trình trong (2.2.60.a) là khác với n trị riêng của $\tilde{C}_s^T\tilde{C}_s$. Từ việc giả thiết rằng không một trị riêng nào của ma trận $\tilde{B}_s\tilde{B}_s^T$ và $\tilde{C}_s^T\tilde{C}_s$ bị triệt tiêu do ΔB_s và ΔC_s tương ứng, các giới hạn chặn của ΔB_s và ΔC_s lúc đó được tìm như sau:

$$\|\Delta B_s\| \le \sqrt{\beta_l}/\kappa < \sqrt{\beta_{sn}}\,,\ \|\Delta C_s\| \le \sqrt{\gamma_l\lambda_l\lambda_n}/(\sqrt{\lambda_n}+\kappa) < \sqrt{\gamma_{sn}} \tag{2.2.81}$$

ở đây, β_{sn} và γ_{sn} là các trị riêng nhỏ nhất khác không của $\tilde{B}_s\tilde{B}_s^T$ và $\tilde{C}_s^T\tilde{C}_s$ tương ứng.

Giả sử ΔA_s, ΔB_s và ΔC_s thoả mãn các giới hạn theo các bất phương trình trong (2.2.80) và (2.2.81), do đó mô hình hệ thống động học đang xét trong điều kiện có nhiễu xạ bất định là ổn định, điều khiển, quan sát được.

Kí hiệu $\tilde{W}_c = E(\tilde{x}_s\tilde{x}_s^T) = W_{sc} + 2E(x_s\Delta x_s^T) + E(\Delta x_s\Delta x_s^T) = W_{sc} + W_c$

và $\tilde{W}_0 = E(\tilde{x}_s^T\tilde{x}_s) = W_{so} + 2E(\tilde{x}_s^T\Delta x_s) + E(\Delta x_s^T\Delta x_s) = W_{so} + W_0$.

Các bất đẳng thức điều kiện trong (2.2.80) và (2.2.81) giải nghĩa rằng các cặp ma trận $(\tilde{A}_s, \tilde{B}_s)$ và $(\tilde{C}_s, \tilde{A}_s)$ có khả năng làm mô hình định ổn định được và kiểm tra được. Khi đó, $\tilde{W}_s$ và $\tilde{W}_0$ là nghiệm duy nhất của các phương trình:

$$\tilde{A}_s\tilde{W}_c + \tilde{W}_c\tilde{A}_s^T + \tilde{B}_s\tilde{B}_s^T = 0 \tag{2.2.82}$$

$$\tilde{A}_s^T\tilde{W}_o + \tilde{W}_o\tilde{A}_s + \tilde{C}_s^T\tilde{C}_s = 0 \tag{2.2.83}$$

Chú ý tới các biểu thức kí hiệu sau:

$$\tilde{E} = E(x_m\tilde{x}_s^T) = E + E(x_m\Delta x_s^T) = E + \Delta E \tag{2.2.84}$$

và
$$\tilde{\sigma} = \tilde{E}\tilde{E}^T = \sigma + 2E\mu_\Delta^T + \mu_\Delta\mu_\Delta^T = \sigma + \Delta\sigma \tag{2.2.85}$$

các phương trình (2.2.82) và (2.2.83) khi đó trở thành:

$$(\sigma+\Delta\sigma)[H^+A_m(\hat{Q}+\Delta\hat{Q}) + (\hat{Q}+\Delta\hat{Q})A_m^TH^+ + H^+B_mB_m^TH^+](\sigma+\Delta\sigma)^T = 0 \tag{2.2.86}$$

$$(\sigma+\Delta\sigma)^T[HA_m^T(\hat{P}+\Delta\hat{P}) + (\hat{P}+\Delta\hat{P})A_mH + HC_m^TC_mH](\sigma+\Delta\sigma)^T = 0 \tag{2.2.87}$$

trongđó,
$$\Delta\hat{Q} = H(E\Delta W_{sc}E^T + EW_{sc}\Delta E^T + \Delta EW_{sc}E^T + \Delta EW_{sc}\Delta E^T +$$
$$+ E\Delta W_{sc}\Delta E^T + \Delta E\Delta W_{sc}E^T + \Delta E\Delta W_{sc}\Delta E^T)$$
$$\Delta\hat{P} = H^T(E\Delta W_{so}E^T + EW_{so}\Delta E^T + \Delta EW_{so}E^T + \Delta EW_{so}\Delta E^T +$$
$$+ E\Delta W_{so}\Delta E^T + \Delta E\Delta W_{so}E^T + \Delta E\Delta W_{so}\Delta E^T)$$

có dạng điều kiện biên của Petersen-Hollot.

Vì $(\Delta\sigma H^+A_m, \Delta\sigma H^+\sqrt{B_mB_m^T})$, $(\sqrt{C_m^TC_m}H\Delta\sigma, A_mH\Delta\sigma)$ có khả năng làm ổn định và kiểm tra mô hình bất định được, nên từ (2.2.86) và (2.2.87) ta có thể suy ra:

$$H^+A_m\hat{Q} + \hat{Q}A_m^TH^+ + \Omega(\hat{Q}) + H^+B_mB_m^TH^+ = 0 \tag{2.2.88}$$

và
$$HA_m^T\hat{P} + \hat{P}A_mH + \Omega(\hat{P}) + HC_m^TC_mH = 0 \tag{2.2.89}$$

trong đó,
$$H^+A_m\Delta\hat{Q} + \Delta\hat{Q}A_m^TH^+ = \Omega(\hat{Q}) \tag{2.2.90}$$

và
$$HA_m^T\Delta\hat{P} + \Delta\hat{P}A_m^TH = \Omega(\hat{P}). \tag{2.2.91}$$

Từ đó, thấy rằng $\Delta\hat{Q}$ và $\Delta\hat{P}$ là các xác định dương. Vì vậy, các giá trị giới hạn đối với chuẩn của $\Delta\hat{Q}$ và $\Delta\hat{P}$ được tìm thấy như sau:

$$\|\Delta\hat{Q}\| \le \|\hat{Q}\| + \sqrt{\beta_l}/\sqrt{\alpha_m} = \sqrt{v_l}\sqrt{\varphi_c} + \sqrt{\beta_l}/\sqrt{\alpha_m} \tag{2.2.92}$$

và
$$\|\Delta\hat{P}\| \le \|\hat{P}\| + \sqrt{\gamma_l}/\sqrt{\alpha_m} = \sqrt{\varphi_o}/\sqrt{v_n} + \sqrt{\gamma_l}/\sqrt{\alpha_m} \tag{2.2.93}$$

trong đó, v_l và v_n biểu diễn trị riêng cực đại và cực tiểu của H, φ_c và φ_o là chuẩn tương ứng của $\tilde{W}_{sc}$ và $\tilde{W}_{so}$.

Kết luận: Khái niệm "suy rộng hay tổng quát hoá" nói chung và "nghịch đảo suy rộng" nói riêng là một lĩnh vực đang được nhiều nhà khoa học trong và ngoài nước nghiên cứu về cả mặt lí thuyết lẫn khía cạnh ứng dụng. Sở dĩ như vậy là vì tổng quát hoá là phương tiện để đi đến một cái đích "vượt qua" những khuôn khổ hay khuôn mẫu định sẵn nào đó. Chúng tôi hi vọng từ chuyên đề này sẽ có nhiều học viên cao học và nghiên cứu sinh chọn được cho mình một hướng đi sao cho không bị nhỡ nhịp trong hàm nghĩa "khuôn mẫu" trong công tác và nghiên cứu khoa học.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Isreal A. R. and Greville N. E. - Generalised inverse: Theory and Applications, John Wiley & Sons Inc., New York, 1974.
2. Rao C. R. and Mitra S. K. - Generalised inverse of matrices and its applications, John Wiley & Sons Inc., New York, 1971.
3. Barnett S. - Matrices in control theory, Van Nostrand Reinhold Comp., 1972.
4. Banks S. P. - Mathematical theory of nonlinear systems, Prentice Hall, New York, America, 1989.
5. Nguyen Ngoc San, The System - Assumed-Model - Reduced-Model Relationship: The optimal projection equations with input-error, Control and Cybernetics **32** (3) (1993) 47-68.
6. Nguyen Ngoc San and N. G. Nath - Input-error approach to parameter estimation of linear, time-invariant, continuous-time models in state-variable description, Optimization, **30** (1) (1994) 69-87.
7. Nguyen Ngoc San - On an approach to the estimation of the state-variable descrip-tive parameters for linear, continuous models, Optimization **33** (3) (1995) 235-250.
8. Nguyễn Ngọc San - Nhận dạng các hệ động học tuyến tính liên tục, NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 2006.
9. Nguyễn Ngọc San (Chủ biên) - Một số vấn đề về mô hình hoá và mô phỏng mạng viễn thông, NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 2007.
10. Vũ Ngọc Phàn - Tối ưu hóa - cơ sở lí thuyết và ứng dụng trong công nghệ bưu chính và viễn thông,, NXB Bưu điện, Hà Nội, 2005.

SUMMARY

A SUMMARY ON GENERALIZED INVERSE OF MATRIX

In this paper, generalized inverse of matrices is theoretically summaries with different examples and proposes applications. The paper consists of two main parts. The first one is for important issues on fundamental theories and the extended parts of generalized inverse. The second part is for different examples and application proposes by the authors in the systems parameter estimation aspects. The authors hope that readers can avail several ideas and methods from this paper for their further studying in system theory.

Địa chỉ:

Nhận bài ngày 5 tháng 4 năm 2007

Nguyễn Toàn Thắng, Nguyễn Ngọc San,

Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông

Nguyễn Thuý Anh

Trường Đại học Bách khoa Hà Nội.