TẠP CHÍ KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ Tập 46, số 1, 2008 Tr. 25-58

TỔNG QUAN VỀ CÁC PHƯƠNG PHÁP MÔ TẢ HỆ ĐỘNG HỌC

NGUYỄN THỊ HỒNG HUỆ, HOÀNG MINH, NGUYỄN NGỌC SAN

I. TỔNG QUAN

Hầu hết các hệ thống tồn tại trong thế giới thực có tính liên tục theo thời gian và sự phát triển của lí thuyết tự động điều khiển trước tiên cũng dựa trên những khái niệm xuất phát từ nghĩa liên tục theo thời gian đó [1]. Thêm vào đó, hầu hết những hệ thống trong thực tế đời sống đều có tính chất động học phi tuyến khi xem xét theo một phương diện nào đó. Mặc dù có thể đặc trưng một hệ phi tuyến bởi cách nhiễu xạ lên mô hình tựa tuyến tính (xấp xỉ tuyến tính) đối với một miền xác định nhất định, nhưng nhìn chung, một quá trình động học phi tuyến chỉ có thể biểu diễn thích hợp nhất và đúng đắn nhất khi sử dụng một mô hình phi tuyến [1, 2]. Tuy nhiên do sự phức tạp tiềm ẩn ngay bên trong của các hệ thống động học phi tuyến, việc tìm kiếm một quy trình nhận dạng, về mặt lí thuyết, có khả năng thích hợp với một lớp rộng các đặc tính phi tuyến là điều hoàn toàn không dễ dàng [3].

Nhận dạng hệ thống động học được biết đến là một quá trình thực nghiệm để xác định mô hình toán học có khả năng mô tả những tính chất cốt yếu của hệ thống từ những thông tin ở đầu vào và đầu ra của hệ [1, 4 - 5]. Thực tế cho thấy, đối với một hệ thống động học, không tồn tại một mô hình toán học thỏa mãn tất cả các tập dữ liệu thông tin tại đầu vào và đầu ra của hệ thống [1, 6]. Sở dĩ như vậy là vì việc nhận dạng hệ thống về mặt toán học thuộc họ bài toán tối ưu hóa có nghiệm đặc trưng bởi cấu trúc mô hình và tiêu chí tương đương. Đối với một loại cấu trúc mô hình nhất định, tiêu chí tương đương là cội nguồn của việc phát triển các phương pháp khác nhau để đánh giá tham số của mô hình, và tùy thuộc vào việc chọn hàm hiệu suất hay hàm phạt (cost function). Hầu hết các hàm phạt sử dụng trong lí thuyết nhận dạng hệ thống động học đều dựa trên cơ sở tối thiểu hóa sự khác nhau giữa các đặc tính của mô hình so với những đặc tính cơ bản của hệ thống thông qua việc sử dụng một trong năm (05) phương trình sai số: (i) sai số đầu ra; (ii) sai số phương trình; (iii) sai số dự báo; (iv) sai số đầu vào; (v) sai số trạng thái. Nói một cách khác, phương pháp tối ưu dựa trên cơ sở một phương trình sai số để ước lượng đánh giá tham số của mô hình. Như vậy, quá trình xác định tham số mô hình đóng vai trò quan trọng trong việc tổ chức hành vi ứng xử của hệ thống hay thực hiện hóa tiêu chí tương đương.

Tuy nhiên, để thực hiện được quá trình đánh giá tham số mô hình khi áp dụng bất kì một trong ba phương trình sai số đầu tiên nêu trên (sai số đầu ra, sai số phương trình, sai số dự báo), tín hiệu tại đầu vào của hệ phải thỏa mãn điều kiện *kích thích liên tục* (persistently exciting) và bậc kích thích liên tục của tín hiệu đầu vào phải ít nhất gấp hai lần bậc của hệ thống động học đang xét [5, 7]. Vì tín hiệu đầu vào của hệ trong hầu hết các trường hợp có dạng bất kì, bậc của hệ có thể rất cao nên để thỏa mãn điều kiện nêu trên, thông thường hệ phải chịu kích thích bởi tín hiệu thử dạng chuỗi nhị phân giả ngẫu nhiên với độ dài thích hợp [1, 5]. Điều này lí giải hạn chế của ba phương pháp sai số đầu tiên khi áp dụng vào thực tiễn khi có yêu cầu nhận dạng thời gian thực hoặc trong trường hợp các hệ thống không cho phép sử dụng bất kì tín hiệu kích thích nào từ bên ngoài trong quá trình hoạt động, chẳng hạn như các hệ sinh thái tự nhiên, hệ sinh học, phản ứng hóa học,...

Một số phương pháp nhận dạng dựa trên cơ sở các thành phần tính toán mềm [8 - 10] đã được phát triển mang lại hứa hẹn đối với các hệ thống động học vốn có khó khăn trong việc mô tả toán học. Khác với phương pháp nhận dạng xây dựng trên cơ sở tối ưu, các phương pháp nhận dạng trên cơ sở các thành phần tính toán mềm mô phỏng theo hoạt động của não hệ (nơ-ron mờ, thuật trình di truyền). Tuy các phương pháp đề xuất trên cơ sở các thành phần tính toán mềm có những ưu điểm nhất định đối với hệ động học phi tuyến hoặc hệ bất định hoặc trong trường hợp khó biểu diễn tất cả các hiểu hiết về hệ ở dạng các biểu thức toán học, nhưng vẫn chưa có minh chứng rõ ràng rằng các ưu điểm của những phương pháp này phát huy được khi có đòi hỏi về độ chính xác trong tính toán và tốc độ tính toán cao. Vì vậy, các phương pháp nhận dạng này thông thường được đề xuất với một trường hợp cụ thể.

Trong việc nhận dạng hệ động học, thường các mô hình theo lí thuyết có cấu trúc phức tạp, bậc rất cao. Để nghiên cứu khám phá và điều khiển hệ trong trường hợp đó thì vấn đề giảm bậc của mô hình là rất cần thiết, đôi khi còn mang tính cứu cánh. Các phương pháp giảm bậc có thể phân loại thành ba nhóm chính. Nhóm thứ nhất chủ định giữ lại những giá trị riêng quan trọng của mô hình bậc cao và giá trị tham số của mô hình bậc thấp được xác định sao cho trước tác động của một số dạng tín hiệu thử nhất định ở đầu vào, đáp ứng của mô hình bậc thấp gần đúng với đáp ứng của mô hình bậc cao [11 - 14]. Nhóm phương pháp giảm bậc thứ hai không quan tâm đến giá trị riêng quan trọng của mô hình bậc cao mà dựa trên cơ sở xác định các tham số của mô hình có bậc nhất định sao cho đáp ứng xung của mô hình đó gần đúng (theo một cách tối ưu) với đáp ứng xung của mô hình bậc cao ban đầu [15, 16]. Nhóm phương pháp thứ ba được đề xuất dựa trên cơ sở thực hiện gần đúng những đặc tính khác của mô hình bậc cao ngoài những đặc trưng được thể hiện bởi đáp ứng xung [13, 17].

Các phương pháp giảm bậc cho phép đơn giản hóa trong quá trình phân tích nhận dạng hệ thống động học, nhưng hầu như các phương pháp giảm bậc đều làm mất ý nghĩa vật lí thể hiện bởi các trạng thái của mô hình gốc và đều có nhu cầu cần biết trước mô hình bậc cao. Điều đó đòi hỏi phải thực hiện việc đánh giá tham số của mô hình bậc cao gốc trước khi thực hiện bất kì một phương pháp giảm bậc nào. Như vậy, phương pháp giảm bậc của mô hình cũng gián tiếp bị hạn chế do điều kiện tính kích thích liên tục tại đầu vào của hệ. Hơn nữa, vì tồn tại sai số sinh do giảm bậc nên đối với cùng một tín hiệu kích thích ở đầu vào, đáp ứng của mô hình giảm bậc luôn sai lệch với đáp ứng của hệ động học ban đầu. Sự sai lệch đó làm cho các phương pháp đã được đề xuất trước đây đối với bài toán giảm bậc không thể chấp nhận được trong trường hợp khi đối tượng đang xét hoạt động trong một hệ theo tư duy kín chẳng hạn như trong hệ thống điều khiển theo quỹ đạo, bộ điều tiết đáp ứng, bộ ước lượng trạng thái ... Sở dĩ như vậy là vì hệ làm việc trong tư duy kín dựa trên nguyên lí bù trừ sai lệch giữa hai đáp ứng, và do đó sai số này dẫn đến việc thay đổi chiến lược điều khiển tối ưu và có thể chiến lược điều khiển không còn là chiến lược tuyến tính nữa [18, 19].

Tóm lại, để đưa ra một phương pháp nhận dạng tối ưu thích hợp, những hạn chế sau cần được xem xét, loại bỏ và vượt qua:

(α) Tính kích thích liên tục áp đặt lên tín hiệu tại đầu vào của hệ trong bài toán đánh giá tham số của mô hình.

(β) Sự tham gia của tham số hoặc hàm đáp ứng xung của mô hình bậc cao gốc trong bài toán giảm bậc của mô hình.

(γ) Mất dấu vết, ý nghĩa vật lí được thể hiện bởi trạng thái của mô hình gốc trong mô hình giảm bậc.

(δ) Thiếu khả năng bảo lưu chiến lược điều khiển khi sử dụng mô hình giảm bậc.

Chúng ta thấy rằng, để loại bỏ hạn chế (α), nghĩa là bỏ tính chất kích thích liên tục áp đặt lên tín hiệu đầu vào của hệ trong bài toán ước lượng, đánh giá tham số của mô hình, thì trong bài toán đó cần tránh sử dụng những số liệu đo lường về các bậc đạo hàm theo thời gian của tín hiệu đầu vào [4]. Đối với hạn chế (β), cần phải tránh được bài toán đánh giá tham số mô hình trước khi thực hiện bài toán giảm bậc. Có thể vượt qua hạn chế (γ) bằng cách nếu xem bài toán giảm bậc mô hình là bài toán nhận dạng hệ thống động học trong trường hợp sai bậc (mô hình có bậc thấp hơn so với bậc thực tế của hệ) hoặc dùng phép biến đổi để bảo lưu ý nghĩa vật lí mô phỏng mô hình gốc trong mô hình giảm bậc và đối với hạn chế (δ), thì điều kiện tín hiệu tại đầu ra của mô hình giảm bậc trùng với tín hiệu đầu ra của mô hình toàn bậc ban đầu trở thành cứu cánh để đề xuất giải pháp thích hợp.

Từ những nhận xét trên, khái niệm sai số đầu vào đã được khởi xướng và áp dụng cho bài toán ước lượng đánh giá tham số mô hình mô tả hệ thống, sau đó áp dụng đối với bài toán giảm bậc mô hình [19, 20], và áp dụng đối với cả các khía cạnh khác liên quan đến nhận dạng hệ thống động học [19, 21 - 23].

Đối với các bài toán ước lượng, việc đánh giá tham số của mô hình mô tả trong không gian trạng thái dựa trên cơ sở mô hình thích nghi sử dụng lí thuyết ổn định đã được đề xuất [24 - 25]. Thêm vào đó, một số công trình nghiên cứu sâu về nhận dạng hệ thống động học mô tả trong không gian này không những chỉ khai thác khái niệm sai số đầu vào mà còn khai thác cả khái niệm tối ưu trạng thái [26 - 32]. Nghiệm của các bài toán khác nhau về nhận dạng hệ thống động học được biểu diễn thích hợp dưới dạng các hệ phương trình quy chiếu tối ưu (OPEQ), một thuật ngữ được đưa ra sử dụng đầu tiên đối với bài toàn giảm bậc mô hình [33]. Việc sử dụng OPEQ có khả năng ước lượng tham số của mô hình trong không gian trạng thái với bất kì dạng tín hiệu nào ở đầu vào của hệ động học mà không cần sử dụng đến thuật toán động học tuyến tính (LD) ở cả hai phía đầu vào và đầu ra của hệ [19, 26]. Nhận dạng hệ thống động học được minh chứng là chuyển sang hướng phát triển thuật trình thích hợp để tìm nghiệm của OPEQ, chúng có dạng đơn giản khi sử dụng khái niệm tối ưu theo trạng thái [19, 29]. Việc phát triển OPEQ mang nhiều ý nghĩa quan trọng nhìn từ quan điểm nghiệm duy nhất của quy trình tối ưu vì qua đó thu thêm được hiệu ứng giống như hiệu ứng của các điều kiện ràng buộc dùng thêm với tiêu chí tối ưu bao biên L_2. Đó là hiệu ứng của phép chiếu tối ưu ghép các phương trình điều kiện ở một phía và tạo dựng môi trường để sử dụng những điều kiện ràng buộc sẵn có ở phía khác [29, 34].

Nội dung của bài báo này trong các phần tiếp theo được bố cục như sau. Phần II sẽ giới thiệu tổng quan về mô hình tuyến tính và các phương pháp đánh giá cơ bản. Hệ các phương trình quy chiếu tối ưu (OPEQ) sẽ được trình bày trong phần III. Trong phần IV, các phương pháp mô tả các hệ động học phi tuyến sẽ được đề cập. Phần cuối cùng, phần V, sẽ là các kết luận rút ra từ bài báo này.

II. MÔ HÌNH TUYẾN TÍNH, QUY TRÌNH NHẬN DẠNG VÀ CÁC PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ

II.1. Mô hình tuyến tính và quy trình nhận dạng cơ bản

Trong phần này chúng ta xem xét các khái niệm cơ bản của mô hình tuyến tính của một hệ thống động học. Về cơ bản, mô hình được chia thành 3 nhóm dựa theo phương thức mô phỏng hệ thống động học. Nhóm thứ nhất xuất phát từ việc xây dựng theo quan niệm, theo nhận thức hay theo hiện tượng. Nhóm thứ hai dựa theo quy luật của khoa học tự nhiên hoặc theo kinh nghiệm. Và nhóm thứ ba dựa vào tính chính xác của toán học hoặc của giải tích học.

Ở đây, chúng ta chỉ đề cập đến những mô hình trên cơ sở toán học đối với hệ động học tuyến tính liên tục thường xuyên được sử dụng trong lí thuyết điều khiển đặc trưng bởi tham số tập trung trong các phương trình vi phân thường (mô hình tham số) hoặc dạng biểu diễn tương đương có tham số xác định hữu hạn như dạng mô tả trong không gian trạng thái. Thêm nữa, để đơn giản hóa vấn đề mà không mất đi tính tổng quát, chúng ta chỉ xem xét các mô hình tiền định.

Mô hình tham số tập trung quen thuộc nhất đối với một hệ thống động học tuyến tính liên tục theo thời gian có p đầu vào và q đầu ra là một hệ gồm q phương trình vi phân có dạng:

$$\sum_{i=0}^{n} a_{i,j}(t)\frac{d^i y_j(t)}{dt^i} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=0}^{n} b_{i,k_i}(t)\frac{d^i u_k(t)}{dt^i} \quad \text{với } j = 0,\dots,q \tag{1}$$

trong đó, n là bậc của mô hình, $u_k(t)$ và $y_j(t)$ tương ứng là kích thích đầu vào thứ k và đáp ứng tại đầu ra thứ j của hệ, $a_{i,j}(t)$ và $b_{i,k_i}(t)$ với $n \geq 0$, $i = 0,\dots,n$, $k = 0,\dots,p$ là các tham số của mô hình. Các tham số này thường được gọi là các tham số quá trình (processs parameters) [35, 36], chúng đóng vai trò thực tế tạo dựng cách hành xử của hệ thống thực.

Hệ động học tuyến tính biểu diễn bởi phương trình (1) có thể được biểu diễn tương đương bởi một hệ các phương trình vi phân bậc nhất trong không gian trạng thái như sau:

$$\dot{x}_n(t) = A_n(t)\, x_n(t) + B_n(t)\, u_n(t) \tag{2}$$

$$y_n(t) = C_n(t)\, x_n(t) + D_n(t)\, u_n(t). \tag{3}$$

Các phương trình (2) và (3) được gọi là phương trình động học và phương trình đầu ra [19, 36]. Trong đó, vectơ đầu vào $u_n(t)$, vectơ trạng thái $x_n(t)$ và vectơ đầu ra $y_n(t)$ có p, n và q chiều, các ma trận $A_n(t)$, $B_n(t)$, $C_n(t)$ và $D_n(t)$ có kích thước tương ứng $n \times n$, $n \times p$ và $q \times p$. Mô hình mô tả trong không gian này có số tham số tối thiểu được gọi là chuẩn (canonical), thực hiện hóa mô hình $\{A_n(t), B_n(t), C_n(t), D_n(t)\}$ có tham số tối thiểu được gọi là khả hiện tối giản và tương ứng, kích thước của ma trận $A_n(t)$ là bậc tối thiểu của $A_n(t)$ [19, 36]. Trong các phương trình trên, chỉ số dưới ám chỉ mô hình có bậc tối thiểu hoặc có bậc xác định trước. Trong trường hợp không viết gì, mô hình được hiểu theo nghĩa chung hoặc có bậc không biết trước [19].

Dễ dàng thấy, từ cách biểu diễn (2) và (3), chúng ta có thể chuyển đổi để có được dạng biểu diễn dưới dạng ma trận chứa các hàm truyền đạt nhiều biến số, được biết đến trong các tài liệu chuyên ngành là biểu diễn dưới dạng đa thức ma trận. Lợi điểm của việc biểu diễn dạng đa thức là có khả năng sử dụng thuật toán đạo hàm theo thời gian và giả thiết "tín hiệu ra không bị nhiễu" của hệ thống. Khi xem xét tổ hợp những hiệu ứng nhiễu xạ ở đầu vào và đầu ra của hệ thống, [37, 38] đưa ra khái niệm mô hình "tự tịnh tiến giá trị trung bình" (Auto-Regressive Moving Average - ARAMA) Từ mô hình ARAMA, nếu đặt một giả thiết nào đó đối với các ma trận tham số của mô hình, chúng ta có được mô hình "tự tịnh tiến trị trung bình ngoại lai" (Auto-Regressive Moving Average Exogenous Variable - ARMAX) hay còn gọi là mô hình hiệu chỉnh động học theo những biến đổi [5].

Nhận dạng hệ thống động học là một quá trình thực hiện một chuỗi tích hợp các hoạt động nào đó và có thể diễn giải như bài toán ngược của bài toán phân tích, được đặc trưng bởi một lớp tín hiệu, một lớp mô hình và bởi một tiêu chí tương đương. Bài toán nhận dạng hệ thống trở thành bài toán đánh giá ước lượng tham số trong trường hợp cá biệt khi biết trước một lượng thông tin nhất định của bài toán. Như vậy, bài toán đánh giá, ước lượng tham số có thể được xem như là bài toán xác định thực nghiệm giá trị các tham số tạo dựng những đặc tính ứng xử của hệ động học với giả thiết là hệ được mô tả bởi mô hình có cấu trúc biết trước với các tham số tập trung.

Chú ý rằng có nhiều quy trình nhận dạng khác nhau. Nguyên lí cơ bản nằm ở đằng sau sự khác nhau giữa các quy trình nhận dạng đầu tiên liên quan đến kiểu mẫu của mô hình (tuyến tính hay phi tuyến, tham số hay không tham số, tập trung hay phân bố, tiền định hay ngẫu nhiên v.v..), sau đó liên quan đến quan niệm cơ bản đối với đánh giá ước lượng tham số (nghĩa là liên quan đến phương trình sai số sử dụng trong bài toán tối ưu xây dựng để giải quyết vấn đề đánh giá tham số). Thực tế cho thấy không có sự khác biệt quá lớn giữa các phương pháp sử dụng đối với mô hình liên tục với các phương pháp dành cho mô hình rời rạc.

Có hai phương pháp cơ bản xử lí dữ liệu trong một bài toán tối ưu đó là phương pháp "off-line" hay còn gọi là phương pháp xử lí theo lớp dữ liệu và phương pháp "on-line" hay còn gọi là phương pháp xử lí truy hồi. Trong phương pháp xử lí theo lớp dữ liệu, toàn bộ dữ liệu được sử dụng để tính toán trong bài toán tối ưu. Việc cập nhật giá trị ước lượng vectơ tham số chưa biết trong trường hợp này được thực hiện nhờ sự tham chiếu tới tất cả các dữ liệu có được trong toàn bộ khoảng thời gian quan sát. Ngược lại với phương pháp "off-line", trong phương pháp "on-line", giá trị ước lượng vectơ tham số chưa biết liên tục được cập nhật trong khi thực hiện quá trình tính toán nối tiếp dữ liệu. Thuật toán Gradient là một ví dụ điển hình của phương pháp xử lí dữ liệu truy hồi. Ngoài ra, dựa vào hình thái mô hình chúng ta còn có một số quy trình khác như: quy trình xử lí liên tục đối với mô hình liên tục (CC); xử lí rời rạc đối với mô hình rời rạc (DD); các xử lí lai ghép giữa liên tục và rời rạc như xử lí rời rạc đối với mô hình liên tục (DC) hoặc xử lí liên tục đối với mô hình rời rạc (CD).

II.2. Các phương pháp đánh giá ước lượng tham số

Trong phần này, chúng ta giới hạn việc bàn luận các phương pháp ước lượng tham số đối với mô hình tuyến tính, tham số tập trung bất biến theo thời gian.

Phương pháp tiếp cận giá trị ước lượng tham số mô hình của hệ thống động học phổ biến là phương pháp tối thiểu hóa hàm định giá (hàm phạt - cost function) vô hướng J. Thông thường, hàm định giá được xây dựng, định nghĩa theo một chuẩn nào đó của vectơ $e(t)$, chứa các phương trình sai số phản ánh sự khác nhau giữa mô hình và hệ thống thực. Từ sự lựa chọn $e(t)$ khác nhau mà chúng ta có những sự khác biệt của từng phương pháp ước lượng [37].

Việc lựa chọn hàm định giá J hay tiêu chí tương đương trong bài toán tối ưu xây dựng đánh giá ước lượng tham số mô hình phần nào phụ thuộc vào hình thái bài toán. Hàm định giá chung nhất được xây dựng trên cơ sở tích phân chuẩn trọng L_2 với vectơ $e(t)$ được cho bởi:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [e^T(t) W e(t)] dt = \int_{t_0}^{t_f} \|e(t)\|_W^2 \, dt \tag{4}$$

trong đó, W là một ma trận trọng số chứa các phần tử thực dương có kích thước phù hợp, $(t_f - t_0)$ là khoảng thời gian mà trong đó tồn tại dữ liệu.

Trong trường hợp đơn giản nhất, trường hợp vô hướng, tích phân (4) trở thành tích phân của bình phương sai số. Nếu biểu diễn dưới dạng rời rạc hóa, (4) trở thành:

$$J = \sum_{i=1}^{N} \|e_i(t)\|_W^2 \tag{5}$$

trong đó, chỉ số "i" biểu thị giá trị của vectơ $e(t)$ ở tại thời điểm lấy mẫu thứ i, N là số điểm lấy mẫu trong khoảng thời gian tồn tại dữ liệu từ t_f đến t_0.

Đối với bài toán giảm bậc, do nó có thể được coi như là bài toán ước lượng tham số mô hình trong trường hợp sai lệch về bậc [19, 20], nên hàm định giá không khác biệt với định nghĩa đã nêu ở trên trừ trường hợp giảm bậc đối với hệ thống đang làm việc trong một hệ kín, ở đó do những lí do khác nhau mà cần phải áp đặt những điều kiện ràng buộc trong quá trình tối ưu. Các điều kiện ràng buộc phải được khai thác trong các bài toán đánh giá ước lượng tham số tạo dựng lên thành phần có khả năng điều khiển hay có khả năng quan sát, hay đồng thời vừa có khả năng điều kiển và quan sát của hệ động học [26, 27]. Hơn nữa, một số điều kiện ràng buộc cần được khai thác sử dụng với mục tiêu tìm nghiệm duy nhất của bài toán nhận dạng hệ động học [26]. Nhìn từ khía cạnh nghiệm duy nhất, thấy rằng hệ phương trình quy chiếu tối ưu (OPEQ) tạo dựng được môi trường có cơ hội sử dụng số lượng điều kiện ràng buộc tùy ý. Ngoài ra, OPEQ còn có hiệu ứng như một điều kiện ràng buộc thêm đối với tiêu chí bài toán tối ưu. Trong trường hợp đó, hàm định giá đã định nghĩa ở trên trở thành:

$$J \le tr\left(RQ\right) \tag{6}$$

trong đó, $tr\left(\cdot\right)$ là vết của ma trận trong (.), R và Q là các ma trận vuông có kích thước phù hợp chứa dữ liệu về trọng số và dữ liệu về hệ thống. Trong nhiều trường hợp, hai ma trận R và Q liên hệ gián tiếp với hệ động học thông qua các ma trận A, B, C và gramian đặc trưng tính điều khiển.

Hiện nay, các điều kiện ràng buộc thường được sử dụng trong các bài toán điều khiển và trong lĩnh vực hệ thống gồm: các điều kiện biên giới hạn L_2 (L_2 bound) [34]; biên bao giới hạn xác định trước H_∞ (preassigned H_∞ bound) [34, 39]; điều kiện để hệ động học trong tọa độ cân bằng nội [40, 41]; điều kiện do áp dụng nguyên lí thứ tự định giá hay còn gọi là hàm phạt theo thứ tự (principle of cost ranking) [30]; điều kiện thỏa mãn nghĩa Lyapunov đối với đặc tính ổn định, điều khiển và kiểm tra đồng thời của hệ động học [43]; điều kiện của tính bền vững kể cả tính bền vững mô phỏng [16]...

Thông thường các phương pháp đánh giá ước lượng tham số gồm hai bước. Bước thứ nhất nhằm tránh sử dụng trực tiếp giá trị đạo hàm các bậc theo thời gian của tín hiệu ở đầu vào, đầu ra của hệ. Trong bước này, các phương trình để đánh giá, ước lượng tham số được xác lập từ mô hình động học của hệ; trong trường hợp lí tưởng, số phương trình bằng số lượng tham số cần ước lượng. Bước thứ hai tính đến phương pháp đánh giá, ước lượng tham số mô hình. Ta thấy rằng sự khác biệt trong phương thức xử lí giữa mô hình liên tục và mô hình rời rạc chỉ nằm trong bước thứ nhất còn bước thứ hai áp dụng cho tất cả hai loại mô hình.

Như đã đề cập, các hàm sai số được chia làm năm loại, trong đó hàm sai số đầu vào và hàm sai số trạng thái được xác định trên cơ sở của khái niệm riêng [4, 19], còn các hàm sai số đầu ra, hàm sai số phương trình và hàm sai số dự báo được xác định khá tương đồng [19, 37]. Để phân biệt kĩ hơn các hàm sai số đã nêu, chúng ta xem xét một hệ động học mô tả bởi phương trình (1). Kí hiệu f_j và g_{jk} như sau

$$f_j = \sum_{i=0}^{n} a_{i,j}(t)\frac{d^i}{dt^i} \quad \text{và} \quad g_{jk} = \sum_{i=0}^{n} b_{i,k_j}(t)\frac{d^i}{dt^i} \tag{7}$$

Với các kí hiệu trong (7), (1) trở thành:

$$Fy(t) = Gu(t) \tag{8}$$

trong đó, $y(t)$, $u(t)$ là các vectơ có chiều lần lượt là q và p, F là ma trận đường chéo có các phần tử là f_j, G là ma trận với các phần tử là g_{jk}. Thực chất, ma trận F và G chứa những số liệu đo lường của các thuật toán hoạt động tương ứng trên vectơ tín hiệu $y(t)$ và $u(t)$ và hai ma trận chứa những số liệu đo lường này được sử dụng phục vụ cho mục đích đánh giá ước lượng tham số mô hình.

Nếu hệ động học là tuyến tính, ta có thể thực hiện biến đổi Laplace như một thuật toán trên vectơ tín hiệu đầu vào và đầu ra của hệ. Và khi đó, (8) trở thành:

$$\hat{H}(s)y(t) = \hat{K}(s)u(t) \tag{9}$$

với $\hat{H}(s)=\sum_{i=0}^{n}a_i s^i$ và $\hat{K}(s)=\sum_{i=0}^{n}b_i s^i$ là ma trận hệ số có kích thước phù hợp có các hệ số thực.

Hàm sai số đầu ra được định nghĩa như sau:

$$e_0(t) = y(t) - \hat{y}(t). \tag{10}$$

Tham số này được đánh giá theo cách sao cho thu được tối thiểu của giá trị tức thời (với trường hợp tiền định) hay của tích phân (với trường hợp ngẫu nhiên) chuẩn sai số giữa tín hiệu đầu ra của mô hình $\hat{y}(t)$ với tín hiệu đầu ra của hệ thống thực $y(t)$. Hầu hết các kết quả nghiên cứu công bố liên quan đến sai số đầu ra gắn liền với việc thiết kế hệ thống tự điều chỉnh hoặc đi liền với sơ đồ tham chiếu sử dụng cơ chế xử lí CC [37]. Khi cơ chế CC áp dụng trong các phương pháp sai số đầu ra, có một trở ngại lớn liên quan đến việc xác lập các điều kiện hội tụ là không có được bất kì một định hướng mang ý nghĩa áp dụng liên quan đến việc xác lập các điều kiện hội tụ. Và như vậy, chúng ta thấy rằng phương pháp sai số đầu ra chỉ mang ý nghĩa lí thuyết, ít có giá trị thực tiễn.

Khác với sai số đầu ra, *sai số phương trình* được định nghĩa trực tiếp từ phương trình động học (mang ý nghĩa đạo hàm theo thời gian của tín hiệu đầu vào và đầu ra), và được cho bởi công thức:

$$e_e(t) = \hat{H}(s)\hat{y}(t) - \hat{K}(s)u(t). \tag{11}$$

Trong trường hợp hàm định giá được định nghĩa dưới dạng tích phân, phương pháp sai số phương trình được xây dựng tương tự như phương phân tích phát triển tĩnh (giải tích tuyến tính) và đánh giá ước lượng tối thiểu bình phương tuyến tính.Phương pháp sai số phương trình đã được nhiều tác giả chứng minh là gần gũi với khái niệm gần đúng vi phân [44] và vì thế sai số phương trình còn có tên là sai số thỏa mãn (satisfaction error) [6].

Để tránh vấn đề hiện hữu sinh ra bởi sự tồn tại tất yếu của tín hiệu nhiễu các dạng dẫn đến hiện tượng nhiễm giá trị vi phân của cả nhiễu lên những dữ liệu của hệ thống, dạng thức tổng quát hay suy rộng của sai số phương trình đã được đề xuất. Trong phương pháp sai số phương trình suy rộng, tín hiệu đầu vào và đầu ra của hệ được đưa qua bộ lọc có cấu trúc biến thái. Bộ lọc biến thái này vừa làm nhiệm vụ tách nhiễu khỏi tín hiệu, vừa cung cấp dữ liệu về giá trị đo lường đạo hàm các bậc theo thời gian của tín hiệu đã được lọc.

Đối với các phương pháp sai số phương trình, nhiều cơ chế xử lí CC và CD đã được đề xuất cho cả xử lí off-line và on-line áp dụng thuật trình tối thiểu bình phương sai số, đảm bảo được tính hội tụ thông qua việc lựa chọn tốc độ khác nhau [35, 37]. Trong trường hợp nhiễu ngẫu nhiên, để giải quyết vấn đề trôi nghiệm của phương pháp sai số phương trình, phương pháp sử dụng biến công cụ (Instrumental Variable – IV) được sử dụng. Trong phương pháp này, nghiệm tối thiểu bình phương được hiệu chỉnh để có thể chứa một vectơ biến công cụ IV, vectơ này có tính tương quan mạnh với tín hiệu không nhiễm nhiễu tại đầu ra của hệ thống động học nhưng lại không tương quan với nhiễu lên dữ liệu đo lường của hệ thống. Bằng việc sử dụng bộ lọc thích nghi [38] lên toàn bộ tín hiệu đo lường, một sơ đồ cải tiến phương pháp IV (refined IV) được đề xuất. Sơ đồ cải tiến IV này được xem là một bộ lọc thích nghi và bộ tạo lại trạng thái động học đối với các hệ thống cả liên tục lẫn rời rạc [45].

Các phương pháp sai số phương trình với một số yêu cầu giả thiết mạnh đặt lên hình thái của nhiễu và yêu cầu quy trình IV phức tạp có thể thu được giá trị đánh giá ước lượng chính xác, không bị trôi. Tuy nhiên, vẫn chưa có công trình nào chứng minh rằng những phương pháp sai số phương trình làm việc tốt với cơ chế DD áp dụng trong trường hợp nhiễu xạ ngẫu nhiên [38, 46].

Sai số dự báo được định nghĩa là sai số giữa tín hiệu đầu ra của hệ thực với giá trị đáp ứng được dự báo (tốt nhất theo nghĩa nào đấy) trên cơ sở giá trị ước lượng tham số ở thời điểm hiện tại mô tả những đặc trưng của hệ với mô hình diễn tả nhiễu. Giá trị dự báo tốt nhất đối với đáp ứng là giá trị trung bình có điều kiện của đáp ứng quan sát trên cơ sở của tất cả những thông tin đã có về hệ thống cho đến thời điểm hiện tại. Nói một cách khác, sai số dự báo được định nghĩa như sau:

$$e_{pe}(t) = \frac{\hat{C}(s)}{\hat{D}(s)}\left[\hat{y}(t) - \frac{K(s)}{H(s)}u(t)\right] \tag{12}$$

trong đó, hàm truyền đạt $\hat{C}(s)/\hat{D}(s)$ đại diện phần nhiễu trong mô hình tổng quát.

Dễ dàng thấy sai số dự báo có thể được biểu diễn dưới dạng sai số phương trình như sau:

$$e_{pe}(t) = \frac{\hat{C}(s)}{\hat{D}(s)\hat{H}(s)}\left[\hat{H}(s)\hat{y}(t) - \hat{K}(s)u(t)\right]. \tag{13}$$

Trong ba phương pháp sai số được trình bày trên, mặc dù cùng sử dụng đầu ra của hệ thống thực để định nghĩa, những phương pháp sai số dự báo được chứng minh là có giá trị thực tiễn hơn cả. Tuy nhiên cũng phải nhấn mạnh rằng, phương pháp sai số dự báo cần một quy trình phức tạp hơn để thực hiện bài toán tối ưu vì trong bài toán có chứa đựng cả phần nhiễu trong mô hình.

Phương pháp sai số đầu vào

Phương pháp sai số đầu vào khác với các phương pháp đã trình bày ở trên bởi nó được xây dựng trên nguyên tắc riêng, không sử dụng trực tiếp dữ liệu dữ liệu đo lường về đạo hàm các bậc theo thời gian của tín hiệu đầu vào của hệ thống [19, 26 - 30]. Và do đó phương pháp sai số đầu vào không cần quan tâm đến đặc tính kích thích liên tục, nghĩa là không còn mang ý nghĩa thực nghiệm. Nên bài toán ước lượng tham số mô hình nói riêng và nhận dạng hệ động học nói chung bao giờ cũng có nghiệm. Tuy nhiên phải sử dụng khái niệm mô hình ngược.

Mô hình ngược được định nghĩa là mô hình ngược chiều với hệ động học, trong đó đầu ra và đầu vào của hệ là đầu vào và đầu ra của mô hình. Như vậy, với một hệ động học cho trước có thể thu ngay được hệ phương trình động học và biểu thức mô tả tương đương trong không gian trạng thái của mô hình ngược. Một mô hình ngược trong không gian trạng thái có tham số tối thiểu được gọi là chuẩn (canonical), ứng với trường hợp mô hình ngược có tham số tối thiểu, khả hiện vật lí của mô hình ngược là tối giản và kích thước của ma trận A là bậc của mô hình ngược. Ngoài ra, một khái niệm khác cũng cần đề cập để thu được sai số đầu vào là mô hình giả định

(AM), mô hình được chọn trong họ cấu trúc xác định và biết trước tham số làm chuẩn trong mô hình tham chiếu.

Với sự trợ giúp của các khái niệm trên, việc biểu diễn sai số đầu vào có thể được tiến hành theo hai phương pháp: phương pháp sử dụng trợ giúp của mô hình ngược và phương pháp sử dụng tích phân chập.

Phương pháp biểu diễn sai số đầu vào với sự trợ giúp của mô hình ngược.

Giả sử xét hệ động học tuyến tính liên tục được mô tả bởi phương trình (1). Sử dụng khái niệm mô hình ngược ta có:

$$\sum_{i=0}^{n_l} \hat{\alpha}_{i,k}(t)\frac{d^i u_k(t)}{dt^i} = \sum_{j=1}^{q}\sum_{i=0}^{n_l} \hat{\beta}_{i,j_k}(t)\frac{d^i y_j(t)}{dt^i} \quad \text{với } k = 1, 2, ..., p \tag{14}$$

trong đó, các số bằng chữ Hy Lạp có số mũ kí hiệu tham số cần đánh giá ước lượng.

Nếu biết bậc và tham số của mô hình ngược thì dễ dàng thu được mô hình giả định AM. Chúng ta có tín hiệu kích thích tại đầu vào thứ i của AM như sau:

$$\hat{u}_k(t) = \sum_{j=1}^{q}\sum_{i=0}^{n_l} \beta_{i,j_k}(t)\frac{d^i y_j(t)}{dt^i} - \sum_{i=0}^{n_l} \alpha_{i,k}(t)\frac{d^i \hat{u}_k(t)}{dt^i} \quad \text{với } \quad k = 1, 2, ..., p \tag{15}$$

trong đó, $y_j(t)$, $j = 1, ..., q$ là đáp ứng tại đầu ra thứ j của hệ động học.

Khi đó, vectơ sai số đầu vào thu được bằng cách xác định sai số đầu vào thứ k trước, sau đó lấy tương tự đối với toàn bộ đầu vào.

$$e_i(t) = u(t) - \hat{u}(t) \tag{16}$$

trong đó, $e_i(t)$, $u(t)$ và $\hat{u}(t)$ là các vectơ có chiều là p.

Dễ thấy, nếu hệ động học được mô tả bởi mô hình trong không gian trạng thái thì cũng có thể dùng mô hình AM ngược và từ đó có thể tìm được tín hiệu kích thích cần thiết. Nếu coi đáp ứng của hệ động học là tín hiệu ở đầu vào của mô hình AM ngược và mô hình AM ngược có tham số bất biến theo thời gian thì vectơ sai số đầu vào có dạng:

$$e_i(t) = u(t) - L^{-1}\left[C_l(Is - A_l)^{-1}B_l Y(s)\right] \tag{17}$$

trong đó $L^{-1}[\cdot]$ kí hiệu phép biến đổi Laplace ngược của hàm viết bên trong [.], $Y(s)$ là biến đổi Laplace của $y(t)$.

Tuy nhiên, nếu sử dụng mô hình giả định AM thì sai số đầu vào là một vectơ tín hiệu thêm với tín hiệu vào của hệ động học kích thích AM và các thể xác định sai số đầu vào với sự trợ giúp của tích chập hay phép biến đổi Hankel.

Biểu diễn đáp ứng của hệ động học và mô hình AM theo phép biến đổi Hankel với giả thiết cả hệ và mô hình AM đều có thuộc tính giới hạn đầu vào và đầu ra (BIBO). Sử dụng điều kiện trùng khít ở đầu ra và với một vài biến đổi toán học, chúng ta có được sai số giữa tín hiệu vào của hệ động học và tín hiệu vào của mô hình AM như sau:

$$\int_0^t [\hat{u}(\tau) - u(\tau)]d\tau = \int_0^t H^+(t-\tau)[\hat{H}(t-\tau) - H(t-\tau)]u(\tau)d\tau \tag{18}$$

trong đó, $\hat{H}(.)$ biểu diễn ma trận đáp ứng xung của hệ động học, $H^{+}(.)$ là ma trận tựa nghịch đảo đáp ứng xung của mô hình AM (xác định duy nhất do điều kiện BIBO)

Công thức (18) có thể viết lại trong trường hợp rời rạc hóa như sau:

$$\sum_{k=0}^{n}[\hat{u}(n-k)-u(n-k)] = \sum_{k=0}^{n} H^{+}(k)[\hat{H}(k)-H(k)]u(n-k) \quad \text{với } n=0,1,\ldots,N. \qquad (19)$$

Ngoài hai phương pháp biểu diễn sai số nêu trên còn có một số phương pháp khác như phương pháp áp dụng thuyết thừa số hóa. Nhưng phương pháp thuyết thừa số hóa có hiệu ứng tương đương với phương pháp áp dụng mô hình ngược.

Sai số đầu vào ngẫu nhiên

Trong trường hợp xem xét kết hợp nhiễu xạ ngẫu nhiên, tùy vào cấu trúc của mô hình ngược, hàm truyền đạt của phần nhiễu xạ $G_n(s)$ có dạng khác nhau và ứng với mỗi dạng có một loại tiêu chí được sử dụng phục vụ cho quy trình tối ưu hóa. Đối với trường hợp hệ thống một đầu vào một đầu ra, ta có biểu thức sai số nhiễu xạ đầu vào như sau:

$$\mathrm{W}^{*}(t)=LD\left\{L^{-1}\left[(LD)^{-1}\left[G_n^{-1}(s)\left(U^{*}(s)-U_M^{*}(s)\right)\right]\right]\right\} \qquad (20)$$

ở đây, kí hiệu "*" và "-1" biểu diễn giá trị đo lường và phép lấy ngược của thuật toán tương ứng, *L* và *LD* kí hiệu phép biến đổi Laplace và thuật toán động học tuyến tính. Từ đây cho thấy rằng, bất kể nhiễu mầu nào cũng có thể coi là đáp ứng của một hệ động học có cấu trúc thích hợp tác động của nhiễu trắng, và nhiễu trắng làm nhiệm vụ nhiễu xạ ngẫu nhiên để chuyển đặc tính của hệ động học từ tiền định sang stochastic.

III. HỆ CÁC PHƯƠNG TRÌNH QUY CHIẾU TỐI ƯU (OPEQ)

III.1. Trên cơ sở sai số đầu vào

Khái niệm sai số đầu vào được tiếp tục phát triển để nhận dạng hệ động học mô tả trong không gian trạng thái đối với cả trường hợp mô hình có bậc biết trước và mô hình có bậc bất kì. Nhờ có phép chiếu tối ưu (OPM) trong các quy trình tối ưu mà các điều kiện cần bậc nhất để đạt được tính tối ưu của bài toán có thể xác lập dưới dạng hệ quy chiếu tối ưu (OPEQ). Trong hệ OPEQ, tham số của mô hình toàn bậc hay giảm bậc được biểu diễn theo các thành phần của OPM, thỏa mãn các điều kiện về hạng của những ma trận chứa dữ liệu về hệ động học tương ứng cũng như các phương trình điều kiện kiểu Lyapunov biến dạng; các điều kiện liên quan đến việc xác định bậc tối giản của hệ động học. Bài toán nhận dạng hệ động học chuyển sang hướng xây dựng các thuật trình để giải hệ OPEQ [19]. Phương pháp sai số đầu vào được chứng minh áp dụng với bất kì dạng tín hiệu nào ở đầu vào của hệ động học. Hơn nữa, phương pháp cho phép không cần sử dụng các thuật toán đo lường động học tuyến tính cung cấp dữ liệu đo lường về hệ, nên tránh được sự xâm nhập của nhiễu thông qua quá trình hoạt động của LD.

Sự quan tâm hầu hết trong lí thuyết hệ thống là phần có khả năng điều khiển và quan sát đồng thời. Có thể hiệu chỉnh hai phần còn lại của hệ (phần mất khả năng điều khiển và phần không có khả năng quan sát) để đảm bảo có tính chất điều khiển và quan sát đồng thời bởi áp dụng lí thuyết cầu phương tuyến tính Gauss chuẩn [43, 47]; nghĩa là đưa hệ vào làm việc trong một khâu khép kín. Nhận dạng hệ động học làm việc trong khâu khép kín không hoàn toàn giống như đối với phần điều khiển và quan sát của hệ trong cấu trúc hệ hở. Do vậy, ý tưởng coi bài toán giảm bậc mô hình là bài toán ước lượng tham số trong trường hợp thiếu bậc có giá trị với tất cả các loại mô hình sử dụng để mô tả và bất kể hệ làm việc trong khâu khép kín hay khâu hở [30, 48]. Liên quan đến giảm bậc đối với hệ làm việc trong khâu kín, phải thực hiện giảm bậc đảm bảo bảo lưu chiến lược đang điều khiển hệ và đảm bảo trùng khít các tín hiệu ở đầu ra. Từ đó hai phương thức xử lí (theo tư duy hệ ghép hở và tư duy hệ ghép hợp kín) được đề xuất và ứng với mỗi phương thức xử lí thu được một hệ OPEQ để giảm bậc mô hình đối với hệ động học làm việc trong khâu khép kín [48]. Tuy nhiên, OPEQ thu được bởi phương thức xử lí theo tư duy hệ kín phức tạp hơn nhiều so với OPEQ thu được theo tư duy hệ hở, nhìn từ phương diện phát triển các thuật trình.

Nếu xét dưới góc độ tìm kiếm nghiệm duy nhất của bài toán nhận dạng động học thì việc phát triển các điều kiện cần bậc nhất của bài toán tối ưu thành OPEQ được chứng minh là cấp thêm điều kiện ràng buộc vào tiêu chí L_2, kết quả của hiệu ứng ghép những phương trình điều kiện tương ứng trong hệ OPEQ. Hơn nữa, quá trình phát triển OPEQ đã tạo dựng môi trường để sử dụng bất kể điều kiện ràng buộc sẵn có nào đó, trong đó có nguyên lí cực tiểu nhỏ nhất (parsimony principle), tức là nhìn theo tính đồng chủng cấu trúc của mô hình [5, 36]. Thông qua giải tích tính tối ưu cho thấy rằng trong không gian trạng thái cả mô hình toàn bậc và mô hình giảm bậc của một hệ động học đều tối ưu với mô hình giả định. Trong hệ hợp nhất gồm mô hình giả định, mô hình toàn bậc và mô hình giảm bậc luôn tồn tại ba ma trận chiếu tối ưu ghép đối ngẫu với nhau và nhờ vai trò của các ma trận chiếu tối ưu đó mà thỏa mãn nguyên lí cực tiểu nhỏ nhất [19, 28].

Tuy nhiên, cũng cần phải nhấn mạnh ở đây rằng sự phức tạp liên quan đến toán học trong quá trình phát triển OPEQ và tất nhiên để giải những phương trình OPEQ đó thì tính phức tạp trong quá trình phát triển thuật trình thích hợp là điều chắc chắn vì sự hiện diện hiện tượng ghép các phương trình điều kiện. Hiện nay, chưa có phương pháp tổng quát nào được đề xuất để xử lí hiện tượng ghép trong OPEQ mà vẫn chỉ dùng một số giả thiết mạnh áp lên hệ động học nhằm tách hiện tượng ghép như điều kiện cân bằng nội. Sự phức tạp nêu trên kể cả sự phức tạp của toán học trong quá trình phát triển OPEQ là kết quả tất yếu sinh ra bởi phương pháp luận vì quá trình tối ưu hóa trong phương pháp đó được thực hiện đối với các tham số mô hình, còn tính tối ưu đối với biến trạng thái động học (chủ thể trong không gian mô tả) chỉ thu được như hệ quả của quá trình tối ưu. Sự phức tạp về mặt toán học đã được tháo gỡ bằng cách áp dụng một phương pháp luận khác lấy biến trạng thái động học làm chủ thể của quá trình tối ưu hóa trong khái niệm "Tối ưu theo trạng thái".

III.2. Cơ bản về phương pháp tối ưu trạng thái

Có hai mô hình tuyến tính với tham số bất biến theo thời gian trong không gian trạng thái, mô hình (S) bậc n, mô hình (AM) bậc m và cả hai mô hình cùng chịu kích thích bởi một vectơ tín hiệu ở đầu vào được kí hiệu như sau:

$$\text{(S)}\quad \begin{aligned} x'_n &= A_n x_n + B_n u_n \\ y_n &= C_n x_n \end{aligned} \tag{21}$$

$$\text{(AM)}\quad \begin{aligned} x'_m &= A_m x_m + B_m u_n \\ y_m &= C_m x_m \end{aligned} \tag{22}$$

trong đó, các vectơ u_n, y_n và y_m có tương ứng *p*-, *q*- và *q*-chiều, các ma trận A_n, B_n, C_n, A_m, B_m và C_m được kích thước hóa một cách phù hợp.

Vấn đề đặt ra là liệu có thể tối ưu hóa (theo một nghĩa nào đó) vectơ trạng thái của mô hình này đối với vectơ trạng thái của mô hình khác và trong trường hợp có thể thì liệu quy trình tối ưu có đủ không đối với đầu ra hay có thỏa mãn tiêu chí tối thiểu trong bình phương sai số đầu ra.Vai trò của phép biến đổi không đồng dạng và của phép thừa số hóa biến đổi không đồng dạng đó trong quá trình tối ưu hóa được lí giải chi tiết thông qua việc chứng minh hai bổ đề và được phát biểu như sau [32]:

Bổ đề 1: *Cho vectơ x_n chứa n trạng thái độc lập tuyến tính của (S). Giả sử chọn được (AM) có vectơ x_m chứa m trạng thái độc lập tuyến tính m< n. Luôn tồn tại phép biến đổi không đồng dạng $T \in \mathbb{R}^{m\times n}$, hạng m, lên vectơ x_n để thu được vectơ x_m sao cho nếu số đầu ra q của (S) nhỏ hơn hoặc bằng bậc m của (AM), $(q \le m)$, thì T^+x_m đưa đến chuẩn tối thiểu trong số những phương trình tối thiểu sai số đầu ra.*

Bổ đề 2: *Giả sử vectơ x_n của (S) thu được qua phép biến đổi không đồng dạng lên vectơ x_m của (AM) thì có thể thừa số hóa phép biến đổi đó như sau:*

$$T = EG = HE \tag{23}$$

trong đó, $E = \mathbb{E}\left[x_m x_n^T\right] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ là một đẳng cự thành phần, $G = \mathbb{E}\left[x_n x_n^T\right] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ và $H = \mathbb{E}\left[x_m x_m^T\right] \in \mathbb{R}^{m\times m}$ là các ma trận xác định không âm. $\mathbb{E}[.]$ kí hiệu giá trị kì vọng.

Khái niệm tối ưu theo trạng thái được khởi xướng năm 1994 từ việc phát hiện thấy sự tồn tại một phép biến đổi không đồng dạng giữa những vectơ trạng thái của hai mô hình bất kì trong không gian trạng thái và tính tối ưu của phép biến đổi ngược đạt được nhờ vào vai trò của tựa nghịch đảo của chính phép biến đổi không đồng dạng đó. Nếu phân tích phép biến đổi không đồng dạng theo thừa số của một đẳng cự thành phần thay vì phép chiếu tối ưu có tính chất xiên như thường gặp, có thể xác lập một ma trận trực giao, làm cơ sở để có các OPEQ dạng đơn giản. Vì vậy, việc tiếp cận các bài toán hệ thống theo phương pháp tối ưu trạng thái sẽ vượt qua được trở ngại, hạn chế của từng phương pháp tối ưu đã nêu và có được những ưu điểm của cả hai. Hơn nữa, nhờ việc thừa số hóa phép biến đổi không đồng dạng theo đẳng cự thành phần, ngoài điều kiện ràng buộc còn thu thêm được do việc phát triển OPEQ, ở đây đối với mỗi bài toán tối ưu còn thu thêm một điều kiện ràng buộc nữa.

Có thể chia các OPEQ theo quan điểm của phương thức xử lí bài toán thuộc lĩnh vực lí thuyết hệ thống theo tư duy hệ hở (ước lượng tham số mô hình, tính bền vững mô hình hóa, giảm bậc mô hình) [20], [34], theo tư duy hệ kín (giảm bậc bộ ước lượng trạng thái, bộ bù trừ động học, giảm bậc mô hình hệ động học hoạt động trong vòng kín) [30], [31] nếu chỉ giới hạn mô hình trong không gian trạng thái.

III.3. Các bài toán điển hình

III.3.1. Bài toán đánh giá tham số mô hình

Cho một hệ động học (S) bậc n và mô hình giả định (AM), cả hai đều được mô tả trong không gian biến trạng thái như các biểu thức (21) và (22).

Định lí 1: *Giả sử có sẵn các dữ liệu để đánh giá tham số của hệ động học (S) bậc n và mô hình điều khiển quan sát được (AM) bậc m, m > n, có các tham số biết trước.Tồn tại một ma trận chiếu trực giao tối ưu $\sigma = EE^T \in \mathbb{R}^{m\times m}$, hạng n và hai ma trận xác định không âm Q, P đều hạng n sao cho tham số phần điều khiển, quan sát đồng thời của (S) được cho bởi:*

$$A_n = E^T H^+ HE, \quad B_n = E^T H^+ B_m, \; C_n = KC_m HE \tag{24}$$

Thỏa mãn các điều kiện:

$$\sigma\left[H^+ A_m Q + QA_m^T H^+ + H^+ B_m VBA_m^T H^+\right]\sigma^T = 0 \tag{25}$$

$$\sigma\left[H^+ A_m Q + QA_{m\,m}^{TT} H^+ + H^+ B_m VB_m^T H^+\right]\sigma^T = 0 \tag{26}$$

trong đó, $E = \mathbb{E}\left[x_m x_n^T\right] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *là một đẳng cự thành phần,* $H = \mathbb{E}\left[x_m x_m^T\right] \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *là ma trận xác định dương,* W_C *và* W_O *là các gramian điều khiển và quan sát của (S), K là ma trận biến đổi đồng dạng dùng để trùng khớp tín hiệu đầu ra của (AM) với tín hiệu đầu ra của (S).*

Định lí đảo: *Giả sử mô hình điều khiển, quan sát đồng thời (AM) bậc m đã được chọn và các tham số của (S) được xác định theo các biểu thức* (24) *thoả mãn các điều kiện* (25) *và* (26). *Khi đó* σ, *Q và P là tối ưu.*

Định lí trên thực tế giải quyết vấn đề liên quan đến các dữ liệu của W_C và W_O của (S) mà không cần sử dụng các dữ liệu đo lường W_C và W_O của (S). Thực vậy, nếu giải hai phương trình (25) và (26) thì thu được Q và P, dẫn đến biết E. Do đó, có thể thu được các tham số của (S). Rõ ràng, bài toán nhận dạng hệ động học đã được chuyển sang hướng mới; xây dựng các thuật trình để giải hệ phương trình quy chiếu tối ưu. Điều đó cho phép tránh sử dụng thuật toán động học tuyến tính cung cấp dữ liệu đo lường các bậc đạo hàm theo thời gian của tín hiệu vào và tín hiệu ra của (S), tránh được đặc tính kích thích liên tục áp lên tín hiệu đầu vào của hệ (S) và đáp ứng nhu cầu tốc độ đánh giá tham số theo thời gian thực.

III.3.2. Mô tả mô hình giảm bậc

Từ phương diện của các bài toán hệ thống, giảm bậc mô hình là một trong những bài toán điển hình xử lí theo tư duy hệ hở. Cho một hệ động học (S) bậc n mô tả trong không gian biến trạng thái như các biểu thức (21) với các tham số biết trước.

Định lí 2: *Đối với một hệ tuyến tính, bất biến theo thời gian và bậc n có tham số biết trước, luôn tồn tại ma trận đẳng cự thành phần E kích thước* $(r \times n)$ *và ma trận xác định không âm H kích thước* $(n \times n)$ *sao cho tham số tối ưu của mô hình giảm bậc có thể thu được theo tham số của mô hình gốc như sau:*

$$A_r = EHA_n H^+ E^T;\; B_r = EHB_n;\; C_r = CH^+ E^T \tag{27}$$

và luôn tìm được ma trận chiếu tối ưu σ *kích thước* $(n \times n)$, *hai ma trận xác định không âm* $\tilde{P}$ *và* $\tilde{Q}$ *kích thước* $(n \times n)$ *sao cho các điều sau đây thỏa mãn nếu mô hình giảm bậc tối ưu có tính điều khiển và quan sát đồng thời:*

$$\sigma\left[HA_n\tilde{Q} + \tilde{Q}A_n^T H + HB_n V_1 B_n^T H\right] = 0 \tag{28}$$

$$\left[H^+ A_n^T \tilde{P} + \tilde{P}A_n H^+ + H^+ C_n^T R_2 C_n H^+\right]\sigma = 0 \tag{29}$$

trong đó, $V_1 = \lim \int\left[u(t)u^T(t)\right]dt \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $R_2 \in \mathbb{R}^{q\times q}$ *là ma trận trọng số tại đầu ra.*

Phương trình (28) và (29) là các phương trình Lyapunov biến dạng, ma trận H không làm thay đổi đặc tính của ma trận A_n, các ma trận $\tilde{Q}$ và $\tilde{P}$ là các tựa Gramian của mô hình gốc với nghĩa tựa ở đây chứng tỏ rằng mô hình gốc có thể chứa cả các phần không có khả năng điều khiển và kiểm tra đồng thời.

III.3.3. Mô tả bộ ước lượng trạng thái giảm bậc

Bộ đánh giá hay ước lượng trạng thái là một hệ động học cung cấp dữ liệu về trạng thái động học của hệ thống trên cơ sở tín hiệu tại đầu vào và đầu ra của hệ. Bộ đánh giá trạng thái đóng vai trò quan trọng trong lí thuyết hệ thống và điều khiển hiện đại; vai trò hiện thực hóa chiến lược điều khiển tuyến tính. Nhưng nhiều trường hợp gặp trong thực tế cho thấy chỉ cần xem xét, quan tâm đến một số trạng thái nhất định của hệ động học. Điều đó đòi hỏi phải có những bộ đánh giá trạng thái giảm bậc.

Một hệ động học tuyến tính (S) bậc n được mô tả bởi:

$$\text{(S)} \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= A_n x_n + B_n u_n \\ y_n &= C_n x_n \end{aligned} \tag{30}$$

với $n_e, n_e \leq n$, bậc của phần đồng thời điều khiển và quan sát được của (S), các vectơ và ma trận có kích thước phù hợp. Bộ đánh giá trạng thái (SE) bậc e, $e \geq q$ được cho bởi:

$$\text{(SE)} \qquad \begin{aligned} \dot{x}_e &= A_e x_e + B_e u_e \\ y_e &= C_e x_e \end{aligned} \tag{31}$$

trong đó, $u_e = \left[(u_n^T) \middle| (y_n^T) \right]^T \in \mathbb{R}^{(p+q)\times 1}$, các vectơ, ma trận có kích thước tương ứng.

Bài toán đặt ra là xác định bộ đánh giá trạng thái thỏa mãn các điều kiện:

- (SE) có khả năng điều khiển và quan sát đồng thời và quan sát đồng thời; nghĩa là tương ứng, các cặp ma trận (A_r, B_r), (C_r, A_r) có khả năng ổn định và phát hiện được,
- Giá trị lớn nhất có thể chỉ định cho e,
- Tiêu chí tối ưu L_2 giảm bậc theo trạng thái,
- Tiêu chí tối ưu L_2 giảm bậc theo sai số đầu ra.

Định lý 3: *Đối với một mô hình của hệ động học tuyến tính bậc n, có các tham số bất biến theo thời gian, luôn tồn tại các ma trận có hạng đủ theo hàng $K \in \mathbb{R}^{e\times n}$ và $L \in \mathbb{R}^{q_e\times q}$, $q_e \leq q$ sao cho tham số tối ưu của phần tử ước lượng trạng thái bậc e được cho bởi:*

$$A_e = K\left(A_n - MC_n\right)K^+,\ B_e = K\left[B_n \middle| M\right],\ C_e = LC_nH^+ \tag{32}$$

ở đây, M là một tổ hợp tuyến tính của các đầu ra của hệ động học đó.

Giá trị cực đại của e có thể gán cho bậc của các phần tử ước lượng trạng thái giảm bậc có tính điều khiển và quan sát đồng thời là bậc tối giản của mô hình hệ động học đó.

Hơn nữa, luôn tồn tại phép biến đổi đẳng cự thành phần $E \in \mathbb{R}^{e\times n}$ và ma trận xác định không âm $H_e \in \mathbb{R}^{r\times n}$, sao cho phép chiếu trực giao $\sigma_e = E_e^T E_e \in \mathbb{R}^{n\times n}$, hạng e và hai ma trận *xác định không âm* $\tilde{Q}_e = H_e^+ E_e^T Q_e E_e$, $\tilde{P}_e = H_e E_e^T P_e E_e \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *các điều kiện sau đây được thỏa mãn:*

$$\begin{aligned}\sigma_e\left[H_e A_n \tilde{Q}_e + \tilde{Q}_e A_n^T H_e + H_e B_n V_1 B_n^T H_e\right] - \sigma_e\Big[H_e M\left(C_n \tilde{Q}_e - V_{12}^T B_n^T H_e\right) + \\ +\left(\tilde{Q}_e C_n^T - H_e B_n V_{12}\right) M^T H_e + H_e M V_2 M^T H_e\Big] = 0\end{aligned} \tag{33}$$

$$\sigma_e\left[H_e^+ A_n^T \tilde{P}_e + \tilde{P}_e A_n H_e^+\right] - \left[\sigma_e H_e^+ C_n^T M^T \tilde{P}_e + \tilde{P}_e M C_n H_e^+ \sigma_e + \sigma_e H_e^+ C_n^T L^T R_4 L C_n H^+ \sigma_e\right] = 0. \tag{34}$$

Dễ thấy rằng, qua phép biến đổi toán học đơn giản từ (30) và (31) chúng ta có:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{ne} &= A_{ne} x_{ne} + B_{ne} u_e \\ y_{ne} &= C_{ne} x_{ne}\end{aligned} \tag{35}$$

Bài toán từ tư duy theo hệ kín trở thành theo tư duy hệ hở. Từ đó áp dụng kết quả của bài toán giảm bậc mô hình để có kết quả như trong định lí.

Bài toán tối ưu xây dựng để giảm bậc bộ đánh giá trạng thái đã được chuyển về bài toán tối ưu để giảm bậc của một hệ động học (S) có các trạng thái bất kì, chưa được điều chỉnh vì bậc của phần ổn định, có khả năng điều khiển và quan sát đồng thời theo đầu bài nhỏ hơn bậc của hệ thống động học. Nếu giả thiết ma trận M và L có khả năng điều chỉnh hệ động học mô tả bởi biểu thức (35) thì bài toán đã cho trở thành bài toán giảm bậc của bộ bù trừ động học, trong trường hợp đó, giá trị lớn nhất e có thể chỉ định cho bậc là n.

Ứng với giá trị tối ưu của các tham số tìm được bởi áp dụng các biểu thức trong (32), có thể viết lại (35) như sau:

$$\dot{x}_e = E H_e A_n H_e^+ E_e^T x_e + E_e H_e M(y_n - C_n H_e^+ E_e^T x_e) + E_e H_e B_n u_n. \tag{36}$$

Biểu thức này dùng để hiện thực hóa bộ đánh giá trạng thái toàn bậc của một hệ động học, trong đó, $E_e H_e M(y_n - C_n H_e^+ E_e^T x_e)$ là sai số phản ánh về phía đầu vào phát sinh bởi phép biến đổi không đồng dạng M chuyển đổi từ sai số tại đầu ra do $(y_n - C_n H_e^+ E_e^T x_e)$ nằm trên không gian trực giao với không gian chứa y_n tạo lên.

IV. KHẢO SÁT VỀ CÁC PHƯƠNG PHÁP MÔ TẢ CÁC HỆ ĐỘNG HỌC PHI TUYẾN

IV.1. Các phương pháp chuỗi hàm

Năm 1887, Volterra nghiên cứu về các hàm phi tuyến [52]:

$$y(t) = F[(u(t');\ t' \le t] \tag{37}$$

và đưa vào biểu diễn theo chuỗi Volterra:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} \cdots \int h_n(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) \prod_{i=1}^{n} u(t-\tau_i) d\tau_i = \sum_{n=1}^{\infty} w_i(t) \tag{38}$$

trong đó, các hàm $h_n(\ldots)$ liên tục, giới hạn trong τ_i gọi là các nhân. Khi các hàm đối xứng theo các biến số và hệ có tính nhân quả, thì $h_n(\ldots) = 0$ với bất kì $\tau_i \le 0$. Sự hội tụ của chuỗi Volterra đối với cả tín hiệu đầu vào tiền định và đầu vào nhiễu xạ bất định (stochastic) được xác định.

Wiener xét bài toán nhận dạng các hệ thống phi tuyến và phát triển hai phương pháp tiếp cận khác nhau [49]. Trong phương pháp tiếp cận I [50], Wiener áp dụng ý tưởng của Camaron và Martin [51], biểu diễn mỗi thành phần của hàm theo các chuỗi Fourier-Hermite. Đối với Fourier hay phần có nhớ, trong quá trình phát triển chuỗi, Wiener sử dụng các dạng hàm Laguerre $l_p(\tau)$ (một tập hợp hoàn toàn trực giao trong $[0,\infty)$). Sử dụng những hàm này, quá khứ của tín hiệu đầu vào có thể được biểu diễn bởi:

$$V_p(t) = \int_0^\infty l_p(\tau)u(t-\tau)d\tau; \quad p = 0,1\ldots \tag{39}$$

Điều này thu được từ việc phát triển Hermite theo các hệ số Laguerre để sinh ra tín hiệu đầu ra của hệ động học:

$$y(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{m_0=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} C_{m_0 m_1 \ldots m_n} H_{m_0}(V_0(t)) H_{m_1}(V_1(t)) \ldots H_{m_n} V_n(t)) \tag{40}$$

trong đó, $H_k(.)$ là kí hiệu các đa thức Hermite chuẩn hóa từng phần, $C_{m_0 m_1 \ldots m_n}$ là các hệ số Wiener.

Như vậy, một hệ phi tuyến theo Wiener gồm có một hệ tuyến tính nhiều đầu ra (biểu diễn khai triển quá khứ của tín hiệu đầu vào theo các hàm Laguerre) nối tiếp với một hệ phi tuyến không có nhớ (biểu diễn bởi các đa thức Hermite) tiếp theo là các bộ khuếch đại và bộ cộng. Rõ ràng, đặc trưng của Wiener liên quan trực tiếp tới phương pháp phát triển theo chuỗi [52]. Tuy nhiên, cách của Wiener khó áp dụng trong thực tiễn vì số hệ số quá lớn [53].

Bose đề xuất sử dụng các hàm cổng chia không gian quá khứ của tín hiệu đầu vào thành các ô không chồng lấn. Khi đó, bất kì quá trình ergodic nào có băng thông phù hợp với tín hiệu vào, đáp ứng trở thành

$$y(t) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \sum_{k_0=1}^{\infty} \sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=1}^{\infty} D_{k_0 k_1 \ldots k_n} Q_{k_0}(V_0(t)) Q_{k_1}(V_1(t)) \ldots Q_{k_n}(V_n(t)) \tag{41}$$

trong đó, $D_{k_0 k_1 \ldots k_n}$ là các hệ số nhận dạng.

Tuy nhiên, các chuỗi Bose lại không trực giao do các số hạng không cộng được với các chuỗi [49]. Barret [54] sử dụng các hàm Hermite đa biến $H^n[u]$ dạng thức do Grad đề xuất để biểu diễn hệ mô tả bởi phương trình (37) bằng chuỗi hàm:

$$y(t) = \sum \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int k_n(t;\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n) H^{(u)}[u,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n] d\tau_1 d\tau_2 \ldots d\tau_n \tag{42}$$

trong đó, các nhân được xác định bởi các giá trị trung bình đối với một quá trình có tín hiệu đầu vào là nhiễu trắng Gauss.

$$k_n(t,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n) = \overline{y(t) H^{(n)}[u,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n]}. \tag{43}$$

Phương pháp trên có thể được tổng quát hóa đối với các tín hiệu đầu vào là nhiễu màu Gauss, tuy nhiên kết quả là hệ phương trình tích phân khó giải.

Thuật trình Wiener II, một phiên bản của phương pháp Barret [55], diễn giải thuật toán vi phân coi hàm chuyển động Brown như mẫu của quá trình nhiễu trắng Gauss và dùng thủ tục trực giao hóa Gram-Schmidt để xây dựng một chuỗi hàm mới với các hàm trực giao $\{G_n\}$:

$$y(t) = F[u(t'); t' \le t] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[G_n \left(k_n, u(t) \right) \right]. \tag{44}$$

Dễ thấy rằng, hàm Wiener bậc n không đồng nhất, các nhân Wiener k_n không bằng các nhân Volterra và nhận dạng hệ phi tuyến liên quan đến phép đo các nhân k_n trong các hàm G_n. Tuy nhiên, với một số phép biến đổi toán học và sử dụng các hàm Laguerre làm hàm cơ bản, chúng ta thấy hai phương pháp Wiener là tương đồng. Cũng tương tự kĩ thuật Wiener I, kĩ thuật Wiener II ít có tính ứng dụng vì việc biểu diễn đặc trưng của hệ rất phức tạp.

Trên cơ sở khai thác các nhân Wiener dưới dạng các hàm Walsh, French và Butz đã phát triển một thuật toán, trong đó hệ phi tuyến được mô tả dưới dạng một tập các nhân chứa các thuật toán tích chập và việc nhận dạng được thực hiện khi sử dụng phép biến đổi Walsh-Fourier nhanh (W-FFT). Ngoài các phương pháp đề cập trên, việc biểu diễn các chuỗi hàm và ý tưởng Wiener cũng đã được nghiên cứu bởi nhiều tác giả, đáng chú ý là Barret, Bose [56], Brilliant [52], Flake [49], George [57], Harris [58], Singleton [59], Yasui [60, 61] và Zaded [62].

Một phương pháp khác để có giá trị đo lường các nhân k_n của một hệ phi tuyến được Lee và Schetzen phát triển dựa trên việc sử dụng kĩ thuật tương quan chéo với nhiễu trắng Gauss tác động trong quá trình [63, 64]. Quy trình đó gồm việc tính toán các hàm tương quan nhiều chiều giữa đầu vào có nhiễu trắng Gauss và đầu ra của hệ cho bởi:

$$k_n(\tau_1, \ldots \tau_2) = \frac{1}{n!P} \{ y(t) - G_m[k_m, u(t)] \} u(t-\tau_1) \ldots u(t-\tau_n) \forall \tau_1, \tau_2 \ldots \tau_n \tag{45}$$

trong đó, đại lượng thứ 2 phía phải chỉ có một giá trị trên đường chéo và được dùng để loại bỏ các hàm xung, nếu không thì chúng lại xuất hiện khi $\tau_1 = \tau_2 \ldots = \tau_n$.

Mặc dù phương pháp này loại được những khó khăn liên quan đến cấu trúc của Wiener, nhưng lượng tính toán đòi hỏi vẫn còn khá lớn dẫn đến thời gian tính toán dài [65].

Việc ước lượng sai số đối với (45) rất cần thiết trên các đường chéo vì chỉ có các số hạng tích phân chập bậc thấp. Giá trị ước lượng nhân chính xác hơn nếu sử dụng nội suy giữa các điểm không ở trên đường chéo. Hầu hết những ứng dụng trong thực tiễn đều được tổ chức lại theo hệ thống toàn phương [66 - 68]. Choi và Warren đã rút ra một cấu trúc rời rạc trong cả miền thời gian lẫn tần số [69]. Palm và Poggio [70 - 73] phân tích thuật toán Lee và Schetzen và chứng minh rằng Wiener dùng chuyển động Brown chứa lớp các hệ phi tuyến rộng hơn so với phương pháp Lee và Schetzen. Marmarelis nghiên cứu toàn diện phương pháp Lee và Schetzen kể cả phân tích, ước lượng các sai số [74]. Krausz [75] phát triển phương pháp nhận dạng dựa trên quy trình Lee và Schetzen nhưng sử dụng tín hiệu vào là chuỗi xung ngẫu nhiên (quá trình Poisson). Phương pháp đó có thể áp dụng cho các quá trình công nghiệp.

IV.1.1. Các phương pháp chuỗi Volterra

Nghiệm của bài toán nhận dạng dựa trên chuỗi Volterra bao gồm các phép đo giá trị các nhân. Xét một hệ được mô tả bởi hai nhân Volterra ban đầu như sau:

$$y(t) = \int_0^{\infty} h_1(\tau_1) u(t-\tau_1) d\tau_1 + \int_0^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2) u(t-\tau_1) u(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \tag{46}$$

Định nghĩa sai số bình phương trung bình là $E\left\{ (z(t) - y(t))^2 \right\}$, ở đây $z(t)$ là đầu ra đo được, khi đó, với việc áp dụng các phép biến đổi toán học, chúng ta có:

$$\overline{z}(t)=\int_0^{\infty}h_1(\tau_1)\overline{u(t-\tau_1)}+\int_0^{\infty}h_2(\tau_1,\tau_2)\overline{u(t-\tau_1)u(t-\tau_2)}d\tau_1 d\tau_2 \tag{47}$$

$$\overline{z(t)u(t-\sigma)}=\int_0^{\infty}h_1(\tau_1)\overline{u(t-\tau_1)u(t-\sigma)}d\tau_1+\int_0^{\infty}h_2(\tau_1,\tau_2)\overline{u(t-\tau_1)u(t-\tau_2)u(t-\sigma)}d\tau_1 d\tau_2 \tag{48}$$

$$\begin{aligned}\overline{z(t)u(t-\sigma_1)u(t-\sigma_2)}&=\int_0^{\infty}h_1(\tau_1)\overline{u(t-\tau_1)u(t-\sigma_1)u(t-\sigma_2)}d\tau_1+\\&+\int_0^{\infty}h_2(\tau_1,\tau_2)\overline{u(t-\tau_1)u(t-\tau_2)u(t-\sigma_1)u(t-\sigma_2)}d\tau_1 d\tau_2\end{aligned} \tag{49}$$

Việc tìm nghiệm các phương trình trên đối với đầu vào stochastic tổng quát là rất khó khăn. Katzenelson và Gould [76] mô tả quy trình lặp trong quá trình tối ưu và thay thế liên tiếp, Hsieh [77] đề xuất kĩ thuật Gradient, Alper [78] và Eykhoff [79] xét rời rạc theo thời gian. Nếu đầu vào có thể được chọn là tín hiệu Gauss trắng, thì hệ các phương trình tích phân được rút gọn để giải trực tiếp thành:

$$\begin{aligned}&\overline{z}(t)=\int_0^{\infty}h_2(\tau,\tau)d\tau,\ \overline{z(t)u(t-\sigma_1)}=h_1(\sigma_1),\\&\overline{z(t)u(t-\sigma_1)u(t-\sigma_2)}=\overline{z}\delta(\sigma_1-\sigma_2)+2h_2(\sigma_1,\sigma_2)\end{aligned} \tag{50}$$

Tuy nhiên, cách giải này sẽ gặp khó khăn đối với các hệ thống liên quan đến các nhân có bậc lớn hơn hai. Việc nhận dạng các nhân khi sử dụng các đáp ứng bước nhiều chiều đã được Schetzen kiểm tra.

Một phương pháp tiếp cận thông thường khác là ước lượng các nhân qua việc phát triển các hàm trực giao:

$$h_n(\tau_1,\dots\tau_n)=\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N}\dots\sum_{k=0}^{N}a_{nm\dots k}\phi_n(\tau_1)\dots\phi_n(\tau_n)\,. \tag{51}$$

Những phương pháp tìm các hệ số $a_{nm\dots k}$ gồm cả các thuật trình dạng Gradient và các kĩ thuật nhận dạng mẫu chuẩn [80]. Korenberge [81] xét bài toán nhận dạng các hệ mô tả bởi hệ phương trình vi phân phát triển theo chuỗi Volterra, sử dụng dạng tổng theo số mũ với các hàm sin là tín hiệu đầu vào. Các số hạng của chuỗi vi phân đó được xác định trực giao khi sử dụng hồi quy tuyến tính và thủ tục lấy trung bình đơn giản. Một phương pháp nhận dạng trực tiếp các nhân Volterra, sử dụng tín hiệu đầu vào $u(t)=e^{-\alpha t}r(t)$, với $r(t)$ là một quy trình độc lập có giới hạn trung bình bằng không. Fakhouri phát triển thuật toán nhận dạng các nhân Volterra rời rạc dùng biến đổi z nhiều chiều khi sử dụng các hàm tương quan bậc cao và các tín hiệu đầu vào nhiễu Gauss mầu [105].

Tổng quan về lí thuyết và các ứng dụng của các phương pháp nhận dạng nhận được Hung và Stark nghiên cứu trong [90]. Phân tích dạng các nhân được Hung, Stark và Eykhoff thực hiện.

Các chuỗi Volterra cũng được nhiều tác giả áp dụng để phân tích các hệ thống viễn thông, chẳng hạn như Bedrosian và Rice [84], Brilliant [85], Barret [54], Bussgang, Ehrman và Graham [86], Narayanan và Zames [87]. Việc sử dụng các hàm trong phân tích tính phi tuyến cũng được nghiên cứu mở rộng [51, 54, 85 - 91].

IV.1.2. Các kĩ thuật miền tần số

Có thể mô tả các nhân của chuỗi Volterra trong (38) theo Laplace đa chiều hoặc theo các hàm truyền Fourier nhiều chiều [65]. Brillinger đã tìm ước lượng khách quan của một hệ độc lập bậc n có hàm truyền trong miền tần số:

$$\hat{S}_n(\lambda_1,\dots\lambda_n)=\frac{\hat{f}_u\dots uy(-\lambda_1,\dots-\lambda_n)}{n!\hat{f}_{uu}(\lambda_1)\dots\hat{f}_{uu}(\lambda_n)} \tag{52}$$

trong đó, $f_{uu}(\lambda_n)$ biểu diễn mật độ phổ công suất của đầu vào và $f_u\dots_{uy}(-\lambda_1,\dots-\lambda_n)$ biểu diễn phổ tích lũy bậc n+1. Feuerger và Huber đã xem xét và đưa ra lí thuyết tính toán các phổ bậc cao hơn. French và Butz [100],[101] phát triển phương pháp đo giá trị các nhân trong miền tần số bằng cách dùng bộ lọc phức bậc nhất thay cho các hàm Laguerre, sử dụng một thuật trình Fourier biến đổi nhanh (FFT). Phương pháp này tương tự thuật toán của Lee và Schetzen trong miền thời gian nhưng làm giảm đáng kể số lượng tính toán. Barker và Davy [106] đã chứng tỏ có thể tính ước lượng hai nhân Volterra đầu tiên khi sử dụng kĩ thuật khai triển Fourier với một tín hiệu vào bậc ba giả ngẫu nhiên.

IV.1.3. Các tín hiệu đầu vào

Trong quá trình đơn giản hóa các kĩ thuật đo lường và giảm nhỏ số dữ liệu, số lượng tính toán để nhận dạng các nhân Volterra hoặc Wiener, nhiều tác giả đã khảo sát tín hiệu đầu vào dạng giả nhiễu trắng và giả ngẫu nhiên. Nhưng hầu như tất cả các tác giả chỉ xét việc nhận dạng đối với hai nhân đầu tiên, sử dụng giá trị hàm tương quan bậc nhất và bậc hai để tạo ra các biểu thức (48) và (49). Nếu đầu vào không đối xứng, các giá trị trung bình bậc lẻ có xu hướng tiến tới giá trị bằng không, (48) và (49) có thể được rút gọn như sau:

$$\phi_{uz}(\sigma)=\int_0^\infty h_1(\tau_1)\overline{u(t-\tau_1)u(t-\sigma)}d\tau_1 \tag{53}$$

$$\phi_{uuz}(\sigma_1,\sigma_2)=\int_0^\infty h_2(\tau_1,\tau_2)\overline{u(t-\tau_1)u(t-\tau_2)u(t-\sigma_1)u(t-\sigma_2)}d\tau_1 d\tau_2 . \tag{54}$$

Có thể trực tiếp ước lượng các nhân $h_1(\sigma)$ và $h_2(\sigma_1,\sigma_2)$ đối với nguồn kích thích nhiễu Gauss trắng $u(t)$ vì (53) và (54) trở về dạng của (50).

Hooper và Gyftopoulos mô tả việc đo lường thực tế một nhân Volterra bậc hai bởi tương quan chéo khi sử dụng m chuỗi bậc ba và phát hiện dị thường tại các hàm tự tương quan bậc 4, phương trình (54), nhưng không giải thích được. Simpson cũng quan sát được dị thường tương tự ở hàm tự tương quan bậc bốn của chuỗi lặp nghịch đảo giả ngẫu nhiên [117]. Ream, Becker và Pradisthayon chỉ ra giá trị khác không trong các hàm tự tương quan bậc cao hơn hai của m chuỗi là do tính chất tiền định của các chuỗi này. Thêm vào đó, Becker, Obidegwu và Pradisthayon nhấn mạnh rằng một số tín hiệu giả ngẫu nhiên thích hợp hơn các tín hiệu khác đối với việc đo lường nhân Volterra bậc hai và đề xuất tiêu chí để chọn dạng tín hiệu đầu vào và khẳng định có thể tránh vấn đề dị thường nếu sử dụng lớp đầu vào phức hợp. Tuy nhiên, nếu có thể thừa số hóa được các nhân của hệ thống thì có thể nhận dạng mọi nhân từ tín hiệu một đầu vào phức hợp đơn mức.

IV.1.4. Các hệ phi tuyến đa trị

Vấn đề khó khăn trong nhận dạng các hệ chứa thành phần phi tuyến trị kép như đặc tính trễ từ tính mới chỉ được nghiên cứu bởi ít tác giả. Dễ dàng thấy rằng chuỗi Volterra trong (38) không biểu diễn được các hệ thuộc loại phi tuyến này vì đặc tính hài liên quan đến tính phi tuyến có nhớ không tạo ra được bởi bởi chuỗi Volterra. Quá trình nhận dạng các hệ thống đơn giản loại này có thể đạt được bởi việc chồng một tín hiệu thử hòa sắc (hay tín hiệu ở tần số cao) trên phía tín hiệu đầu vào mong muốn để làm mất hiện tượng nhảy tần không mong muốn và tạo ra tín hiệu liên tục. Các điều kiện để tín hiệu thử hòa sắc phân biệt được hoặc làm mất đi hiện tượng nhảy tần đã được nghiên cứu bởi Zames và Schneydor [116].

IV.1.5. Các hệ thống định hướng theo khối

Để làm giảm khối lượng tính toán liên quan đến các phương pháp chuỗi hàm, nhiều tác giả đã nghiên cứu xem xét nhận dạng các hệ thống theo hướng khối. Phương pháp này tránh được việc mô tả về "hộp đen" bằng cách nhận dạng những hệ thống dưới dạng các phần tử riêng rẽ sao cho vẫn bảo lưu được cấu trúc hệ thống và cung cấp những thông tin có giá trị cho bài toán điều khiển.

Econnomakos cho rằng các phương pháp đơn giản hóa nhân tuyến tính gắn với hệ thống này là chọn các đầu vào đa mức và cô lập các nhân. nhận dạng các nhân bậc cao được nghiên cứu bởi Webb [123] sử dụng phương pháp đơn tần đa mức, Sandor và Williamson [124] sử dụng kĩ thuật tensơ. Tuy nhiên, các phương pháp này thường dẫn đến thời gian làm thực nghiệm dài và có thể không thích hợp trong môi trường công nghiệp. Korenberg mở rộng tín hiệu ra $y_2(t)$ trong các chuỗi Volterra và chứng tỏ rằng với đầu vào nhiễu trắng $u_2(t)$ [79]:

$$\phi_{u_2y_2}(\sigma)=C_1\int_0^{\infty}h_2(\alpha)h_1(\sigma-\alpha)d\alpha \tag{55}$$

$$\phi_{u_2y_2}(\sigma_1,\sigma_2)=C_2\int_0^{\infty}h_2(\alpha)h_1(\sigma_1-\alpha)h_1(\sigma_2-\alpha)d\alpha+\bar{y}(t)(\sigma_1-\sigma_2)\,. \tag{56}$$

Bằng cách biến đổi Fourier phương trình (55) và (56), Korenberg đã giải, tìm các đặc tính về biên độ và pha của $h_1(t)$ và $h_2(t)$ sau đó vẽ ra biểu đồ về tính chất phi tuyến. De Boer khảo sát (56) và phát triển thuật toán sử dụng quy trình hồi quy [126, 125] trên cơ sở mở rộng đa thức Hermite và hàm tương quan. Goldberg và Durling sử dụng thuật toán Gradient liên hợp phức để nhận dạng những phần tử đối với trường hợp kết nối tiếp khi phân hệ phi tuyến bị kẹp giữa hai phần tử tuyến tính. Mô hình của Hammerstein là trường hợp riêng của Uryson, gồm nhiều mô hình song song nhau. Brow, Simpson và Power [118 - 119] xem xét hệ thống phản hồi, Godfrey và Briggs nghiên cứu quá trình có đáp ứng phụ thuộc vào hướng, Baumgartner và Rugh, Wysocki và Rygh phát triển các thuật toán cho mô hình Sm tổng quát.

Tách riêng lớp các quá trình ngẫu nhiên do Nuttall đề xuất. Tách dưới dạng tích phân của thành phần thống kê bậc hai được Balasubramanian và Atherton, West thực hiện. Douce và Yuen xây dựng một quy trình nhận dạng hợp nhất cho phần lớn các cấu trúc hệ thống đã xem xét ở trên [99]. Billings và Fakhouri [113, 114] phát triển các kết quả do quá trình tách riêng. các kết quả của Billings và Fakhouri có thể sử dụng để nhận dạng các hệ thống Hammerstein, Wiener [98], chuyển tiếp hệ, phản hồi và hệ thống Sm trước các tín hiệu đầu vào Gauss không trắng. Haber và Keviczky tổng kết về cấu trúc mô hình phi tuyến.

Tuy nhiên, cần nhấn mạnh rằng phương pháp hàm thành phần có nhiều ứng dụng liên quan đến nhận dạng các hệ định hướng theo khối, biểu diễn đơn giản bởi các kết nối tiếp các khối tuyến tính và phi tuyến.

IV.1.6. Các hệ lưỡng tuyến tính

Các hệ thống lưỡng tính được biểu diễn bởi:

$$\begin{aligned}\dot{x}&=Ax+Bxu+Cu\\ y&=dx\end{aligned} \tag{57}$$

đã thu hút được nhiều sự quan tâm và các thuật toán để nhận dạng cả các hệ stochastic và tiền định được đề xuất. Balakrishman [46] và Bruni, Di Pillo và Koch [129] phân tích tính tương quan kết hợp với sai số bình phương tối thiểu dựa trên tổng quát hóa đầu vào/đầu ra. Karanam, Frick và Mohler [131] phát triển thuật toán sử dụng các hàm Walsh. Baheti, Mohler và Spang [131] xem xét bài toán nhận dạng hai nhân thành phần đầu tiên của Volterra suy rộng đối với một hệ lưỡng tuyến tính.

$$y(k) = \Delta t \sum_{i=1}^{\infty} \omega_1(i)u(k-i) + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \omega_2(i,j)u(k-i)u(k-j) + \text{số hạng bậc cao} \tag{58}$$

$$\omega_1(i) = \frac{1}{\Delta t}\int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} de^{At_1} c dt_1 \tag{59}$$

$$\omega_1(i) = \frac{1}{(\Delta t)^2}\int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t}\int_{(j-1)\Delta t}^{j\Delta t} de^{At_1} B(i-1)\Delta t(j-1)\Delta t e^{A(t_2-t_1)} cL(t_2-t_1)dt_2 dt_1 \tag{60}$$

trong đó, hệ S(.) là dạng hàm có bước nhảy đơn vị.

Ước lượng hai nhân đầu tiên được tìm khi sử dụng việc thừa số hóa tương quan và một đầu vào ba mức giả ngẫu nhiên:

$$\hat{\omega}_1(i) = \frac{3}{2\Delta t}\phi_{yu}(i) \tag{61}$$

$$\hat{\omega}_2(i,j) = \frac{9}{4(\Delta t)^2}\phi_{yuu}(i,j)\,. \tag{62}$$

Sai số ước lượng của phương trình có nhân bậc hai do tồn tại các số hạng bậc cao hơn [57 - 63]. Nhận dạng các hệ thống lưỡng tuyến tính bất biến có các điều kiện ban đầu bằng không và các trạng thái có thể quan sát trực tiếp cũng được xem xét, sử dụng phương trình dạng Wiener-Hopf:

$$x(t) = \int_0^{\infty} e^{At_1}\{cu(t-t_1)\}dt_1 + \int_0^{\infty}\{e^{At_1}Bx(t-t_1)u(t-t_1)\}dt_1 \tag{63}$$

và các phương pháp tương quan. Nhưng phần lớn các thuật toán này khó có thể thực hiện hoặc chỉ áp dụng đối với trường hợp đơn giản của hệ lưỡng tuyến tính. Cần thiết những nghiên cứu sâu hơn trong lĩnh vực này.

IV.1.7. Ước lượng tham số

Có thể phân loại các phương pháp ước lượng tham số của các hệ phi tuyến tùy thuộc vào cấu trúc của mô hình dựa trên các mô hình tuyến tính hoặc các mô hình phi tuyến theo tham số. Sự lựa chọn giữa hai phương pháp tiếp cận này thường được quyết định bởi một quá trình khảo sát. nếu cấu trúc có dạng mô tả bởi phương trình vi phân biết rõ, có thể áp dụng trực tiếp các thuật toán ước lượng tham số để xác định giá trị của các tham số chưa biết. Khi không sẵn có trước nhiều thông tin, quá trình đó được xử lí như một "hộp đen" và phương pháp tiếp cận thông thương là mở rộng đầu vào/đầu ra đối với một mô hình biểu diễn được chọn phù hợp (thường được chọn là phi tuyến ở các biến trong tín hiệu đầu vào/đầu ra và các tham số tuyến tính).

Một cách tổng quát về các phương pháp ươc lượng đối với các mô hình phi tuyến theo tham số như sau:

$$x = f(u,x,\beta),\ \ y = h(u,x) \tag{64}$$

Phát triển gần đây tập trung giải quyết quá trình kết hợp giữa việc làm trơn và ước lượng tham số nhằm bù cho cấu trúc của mô hình bất định với các nhiễu loạn tác động bên ngoài (đưa các tham số biến đổi theo thời gian vào trong mô hình và thuật toán đệ quy có tính đến cả việc sử dụng lại số liệu đo lường).

Khi sử dụng các mô hình tuyến tính theo tham số để ước lượng thì chủ yếu dựa vào mô hình của Hammerstein và các thành phần chuỗi Volterra rời rạc [97]-[106], [108]. Một số tác giả đặt vấn đề xem xét các sự mở rộng vành đa thức của các trạng thái trong hệ thống. Garg và Boziuk giả thiết rằng mọi trạng thái trong hệ đo lường được mà không chứa thành phần nhiễu và sử dụng thuật toán bình phương tối thiểu để ước lượng các tham số C_{n_i} trong các mở rộng. Netravali và De Figuerredo giả thiết mọi trạng thái của hệ có thể quan sát được và áp dụng một thuật toán gần đúng ngẫu nhiên sử dụng mở rộng sau:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= g(x_k) + u_k \\ y_{k+1} &= x_{k+1} + v_{k+1} \end{aligned} \tag{65}$$

trong đó, v_{k+1} biểu diễn cho thành phần bổ xung và

$$\begin{aligned} &g(x_k) = (x_k^2, \ldots, x_k^n, \Psi(x_k))^T \\ &\Psi(x_k) = \sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1} x_k^{i_1} + \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{i_1} a_{i_1 i_2} x_k^{i_1} x_k^{i_2} + \ldots + \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{i_1} \cdots \sum_{i_{p-1}=1}^{i_{p-2}}\sum_{i_p=1}^{i_{p-1}} a_{i_1 i_2 \ldots i_p} x_k^{i_1} x_k^{i_2} x_k^{i_p}. \end{aligned} \tag{66}$$

Mô tả quan hệ đầu vào/đầu ra của His và Ghandi như sau:

$$y(m+1) = q[y(m-1), \ldots y(m-N),\ u(m-k) \ldots\ u(m-k-N)] \tag{67}$$

trong đó, giả thiết về phép gián đoạn các phép đo lường do nhiễu hay tính quan sát của hệ.

Phương pháp nhóm xử lí số liệu được Ivakhnenko đề xuất, sử dụng nguyên lí về tự tổ chức truyền kiếp (heuristic) để giải các bài toán phức tạp có kích thước lớn các chuỗi số liệu đo lường ngắn.

Thuật toán tách số liệu, phân tích đám đông, thiết kế đầu vào, chính xác đầu vào và ứng dụng các kết quả từ lí thuyết tai biến đối với các phương pháp ước lượng tham số của các hệ thống phi tuyến được khảo sát bởi Mehra [54 - 92]. Lí thuyết tai biến cung cấp một thư viện tham khảo về các mô hình di truyền với các đa thức phi tuyến, các thành phần động lưỡng chiều toàn cục (global bifurcational behaviours) và những đại diện ứng cử phù hợp để chọn các cấu trúc mô hình chuẩn trong nhận dạng các hệ phi tuyến. Các khía cạnh về tai biến cũng cấp thông tin tức thời liên quan trực tiếp tới việc lựa chọn các đầu ra phải được thiết kế để kích thích hệ thống sao cho đáp ứng phi tuyến trở nên chiếm ưu thế. Điều này có thể đạt được bằng cách áp dụng các đầu vào mang tính điều khiển để điều khiển hệ thống ngoài các giá trị ngưỡng nhảy sao cho một tai biến trong đáp ứng hệ thống đó được quan sát. Tâm đa mức hoặc định lí về giảm bậc cung cấp các hướng dẫn để xác định liệu một mô hình phi tuyến có cần thiết sử dụng hay không. Định lí đó chứng tỏ rằng nhân tố phi tuyến của hệ thống được trình diễn dưới dạng các trạng thái ứng với các trị riêng hoàn toàn ảo. Ví dụ, có một hệ chưa biết bị nhiễu loạn xung quanh một điểm cân bằng mà động học tuyến tính hóa nhận dạng. Nếu các giới hạn về độ tin cậy đến 95% xung quanh các trị riêng được nhận dạng bao gồm cả trục ảo, thì khi đó định lí khối tâm đa mức chỉ ra việc bổ sung các phi tuyến bê trong mô hình đó. Lí thuyến tai biến được Mehra và các đồng tác giả ứng dụng để xem xét tính ổn định toàn cục và phân tích để xem máy bay ở các góc độ cao có bị tấn công [3, 92].

Các ứng dụng về các phương pháp ước lượng tham số cho các hệ thống trong đó những thông tin biết trước cấu trúc của mô hình là khá nhiều. Ngược lại, chỉ có số ít ứng dụng trong các kĩ thuật dựa vào việc suy rộng tuyến tính theo tham số đối với các hệ thống xử lí như các hộp đen [8]. Sau đây là đề xuất của các tác giả về sử dụng cấu trúc biết trước của mô hình [28, 30].

IV.2. Bài toán bền vững mô hình hóa

Để đơn giản, chúng ta xem xét hệ động học bất định đã được biết là có khả năng mô phỏng bởi mô hình tham số có giá trị thực và bất định về cấu trúc tham số. Hệ động học đó cũng có thể được mô phỏng bởi mô hình có giá trị danh định không đổi với các nhiễu loạn bất định $\Delta x_n(t)$ lên các giá trị danh định đó. Việc xem xét này là hợp lí vì tác động của nhiễu loạn lên tín hiệu vào gây ra những ảnh hưởng biến đổi hệ và làm hệ có tính chất phi tuyến.

Đối với hệ tuyến tính bất định (S) bậc n mô tả bởi:

$$\text{(S)} \qquad \begin{aligned} \dot{x}_s(t) &= A_s x_s(t) + B_s w(t), \qquad t \in [0,\infty) \\ y_s(t) &= C_s x_s(t) \end{aligned} \tag{68}$$

ở đây $y_s(t) = y_n + \Delta y_n(t)$ là vectơ q-chiều, các ma trận $A_s(t) = A_n + \Delta A_n(t)$, $B_s(t) = B_n + \Delta B_n(t)$ và $C_s(t) = C_n + \Delta C_n(t)$ có kích thước phù hợp và $w(t)$ là nhiễu trắng. Mô hình giả định AM bậc m, $m > n$ được mô tả bởi

$$\text{(AM)} \quad \begin{aligned} \dot{x}_m(t) &= A_m x_m(t) + B_m w(t), \qquad t \in [0,\infty) \\ y_m(t) &= C_m x_m(t) \end{aligned} \tag{69}$$

trong đó, y_m là vectơ q-chiều, A_m, B_m và C_m là các ma trận có kích thước thích hợp.

Tồn tại tiêu chí tối ưu theo trạng thái với $T_s = T + \Delta T$ và tiêu chí tối ưu L_2 trọng sai số đầu ra với $K_s = K + \Delta K$ thu được trực tiếp qua việc tối thiểu hóa hàm tiêu chí như sau:

$$J_{Sopt} = Sup\, lim_{t\to\infty} \int_0^t \left\| x_s - (T_s)^{'} x_m \right\| dt, \;\; T_s \in \mathbb{R}^{m\times n}, \;\; \sigma(T_s) = n, \; n < m \tag{70}$$

$$J_{Oopt} = Sup\, lim_{t\to\infty} \int_0^t \left\| y_m - K_s y_s \right\|_R^2 dt, \;\; K_s \in \mathbb{R}^{q\times q}, \;\; \sigma(K_s) = q. \tag{71}$$

Các điều kiện bền vững, giới hạn của các ma trận tham số mô hình A_s, B_s và C_s sao cho hệ mô tả bởi phương trình (68) có khả năng điều khiển và quan sát đồng thời như trong chế độ tuyến tính và được cho như sau:

IV.2.1. Điều kiện đủ để làm việc bền vững

a) *Các giả thiết*

- Chuẩn vectơ và chuẩn ma trận tương hỗ (consistent),
- Với một mô hình giả định AM có trước $\|x_m\| = \upsilon$ là một hằng số,
- $\|T\| = (\lambda_1)^{1/2}$, $\|T^+\| = 1/(\lambda_n)^{1/2}$, trong đó kí hiệu λ_1 và λ_n tương ứng với giá trị riêng

lớn nhất và nhỏ nhất khác không của TT^+.

b) *Các điều kiện thu được*

- $\|\Delta T\|/\|T\| = (\lambda_n)^{1/2} / \left[(\lambda_n)^{1/2} + \upsilon\right]$, $\|T_s\| = (\lambda_1)^{1/2}\left\{1 + (\lambda_n)^{1/2}\right\} / \left[(\lambda_n)^{1/2} + \upsilon\right]$,
- $\|\Delta T^+\|/\|T^+\| = (\lambda_n)^{1/2}/\upsilon$,
- $J_{Sopt} \le \|\Delta x_n\| + \|\Delta T^+\|\|\Delta x_m\| = 2$,
- $\|K_s\| = 1/\|T\|, \|\Delta K\| = \left[3(\lambda_n)^{1/2} + 2\upsilon\right] / (\lambda_1)^{1/2}\left[2(\lambda_n)^{1/2} + \upsilon\right]$,
- $1/(\lambda_1)^{1/2} \le \|x_s\| \le 1/(\lambda_n)^{1/2}$.

IV.2.2. Cấu trúc bất định

a) *Các giả thiết*

- $V = I_p, K = R = I_q$,
- $A_m = diag(-\alpha_1 ... -\alpha_m), B_m B_m^T = diag(\beta_1 ... \beta_m), C_m^T C_m = diag(\gamma_1 ... \gamma_m)$,
- Biến thiên lớn nhất của các tham số được xác định bởi định lí 1.

b) *Giới hạn biến thiên và giá trị lớn nhất của các tham số thu được*

- $\|\Delta A_n\| \le 2(\alpha_1\lambda_1)^{1/2}/\upsilon, \|\Delta B_n\| \le (\beta_1)^{1/2}/\upsilon, \|\Delta C_n\| \le (\gamma_1\lambda_1\lambda_n)^{1/2} / \left[(\lambda_n)^{1/2} + \upsilon\right]$,
- $\|A_s\| = (\alpha_1\lambda_1)^{1/2}\left[2(\lambda_n)^{1/2} + \upsilon\right] / \left[(\lambda_n)^{1/2}\upsilon\right]$,
- $\|B_s\| = (\beta_1)^{1/2}\left[2(\lambda_n)^{1/2} + \upsilon\right] / \left[(\lambda_n)^{1/2} + \upsilon\right]$,
- $\|C_s\| = (\alpha_1\gamma_1)^{1/2}\left[2(\lambda_n)^{1/2} + \upsilon\right] / \left[(\lambda_n)^{1/2} + \upsilon\right]$.

IV.2.3. Tính ổn định, điều khiển và kiểm tra

Sự bất định của biến trạng thái có thể làm hệ đang xét trở lên mất ổn định, mất khả năng điều khiển quan sát. việc chọn các giá trị tham số của mô hình giả định (AM) được trình bày như sau:

a) *Các giả thiết*

- Vị trí của cực ứng với giá trị $-\alpha_m$ của A_s không bị dịch chuyển từ bên trái sang bên phải mặt phẳng phức do tác động của nhiễu xạ,
- Số lượng các giá trị riêng khác không của cả $B_s B_s^T$ và $C_s^T C_s$ không bị thay đổi dưới tác động của nhiễu xạ; nghĩa là không có giá trị riêng nào của $B_s B_s^T$ và $C_s^T C_s$ bị triệt tiêu do ΔB_n và ΔC_n,
- Các giá trị riêng của $B_s B_s^T$ khác với giá trị riêng của $C_s^T C_s$,

- Các cặp ma trận $\left\{\Delta\sigma H^{+}A_m, \Delta\sigma H^{+}\left(B_s B_s^T\right)^{1/2}\right\}$, $\left\{\left(C_s^T C_s\right)^{1/2} H\Delta\sigma, A_m H\Delta\sigma\right\}$ là điều khiển được và quan sát được.

b) Các điều kiện thu được

- $2(\alpha_1\lambda_1)^{1/2}/\upsilon \le (\lambda_{sn})^{1/2}, (\beta_1)^{1/2}/\upsilon \le (\beta_{sn})^{1/2}, (\gamma_1\lambda_1\lambda_n)^{1/2}\Big/\left[(\lambda_n)^{1/2}+\upsilon\right] \le (\gamma_{sn})^{1/2}$,
- $H^{+}A_m\Delta Q + \Delta Q(A_m)^T H^{+} = \Omega(Q)$, $H(A_m)^T \Delta P + \Delta P A_m H = \Omega(P)$,
- $H^{+}A_m Q + Q(A_m)^T H^{+} = \Omega(Q) + H^{+}B_m(B_m)^T H^{+} = 0$,
- $H^{+}(A_m)^T P + PA_m H + \Omega(P) + H(C_m)^T C_m H = 0$,
- $\|\Delta Q\|$ và $\|\Delta P\|$ bị giới hạn.

Những giới hạn trên chỉ ra rằng nếu không lựa chọn mô hình giả định (AM) một cách hợp lí thì kết quả của quá trình nhận dạng hệ động học có thể là một mô hình không ổn định hoặc không có khả năng điều khiển hoặc quan sát. Như vậy, (AM) đóng vai trò của mô hình đầu tiên của một quá trình lặp; yếu tố quan trọng trong vấn đề hội tụ nghiệm truy hồi hoặc của một quá trình tuyến tính hóa các tham số phi tuyến.

IV.3. Mô tả phần tử điều khiển giảm bậc

- Các bài toán liên quan đến phần tử điều khiển đều dựa vào tín hiệu phản hồi để làm cơ sở đề ra chiến lược điều khiển và cần phải xử lí trong khâu khép kín. Hầu như tất cả những vấn đề nghiêu cứu liên quan đến phần tử điều khiển hiện đại đều đưa về bài toán chuẩn tuyến tính tựa Gauss (LQG) nhằm sử dụng tính duy nhất của tập các giá trị đặc trưng LQG [8] và đưa bài toán về giải quyết theo tư duy hệ hở. Các giá trị đặc trưng LQG là nghiệm của hai phương trình đại số Riccati thể hiện khả năng lọc và khả năng điều khiển của phần tử điều khiển đối với đối tượng trong trường hợp đối tượng cần điều khiển bị nhiễu xạ bởi nhiễu trắng tựa Gauss.

Có thể thực hiện giảm bậc của bộ điều khiển theo cả tư duy hệ mở lẫn tư duy hệ kín. Bộ điều khiển giảm bậc thu được bằng cách làm việc vơi mô hình bậc thấp, không quan tâm đến khâu phản hồi thuộc phương pháp phản hồi giảm bậc theo tư duy hệ hở. Phương pháp này có ưu điểm là đơn giản nếu trong quá trình gần đúng mô hình giảm bậc có tính đếm trước được sự hiện diện của khâu phản hồi. Tuy nhiên cách gần đúng này có thể thấy là dễ dàng dẫn đến sự lan truyền các sai số không mong muốn trong quá trình thiết kế, đánh giá.

Đối với một hệ động học (S) khả hiện tối thiểu bậc n với các tham số A, B và C, luôn tồn tại phần tử điều khiển tuyến tính tựa Gauss toàn bậc có các tham số A_c, B_c, và C_c được xác định như sau:

$$A_c = A - BB^T\Pi - \Psi C^T C,\ B_c = \Psi C^T,\ C_c = B^T\Pi \tag{72}$$

trong đó, Π và Ψ là các ma trận thực dương, nghiệm duy nhất tương ứng phương trình Riccati đại số đặc trưng tính điều khiển (CARE) và đặc trưng tính lọc (FARE).

$$(\text{CARE}) \qquad A^T\Pi + \Pi A + C^T C + \Pi BB^T\Pi = 0 \tag{73}$$

$$(\text{FARE}) \qquad A\Psi + \Psi A^T + BB^T - \Psi C^T C\Psi = 0. \tag{74}$$

Từ các phương trình (73), (74) và biểu thức (72), ta có thể thu được phần tử điều khiển toàn bậc. Phần tử điều khiển toàn bậc này được biểu diễn dưới dạng mô hình của một hệ động học theo tư duy hệ hở. Bằng cách áp dụng kết quả bài toán giảm bậc mô hình, thu được ngay phần tử điều khiển giảm bậc theo định lí phát biểu sau đây.

Định lí 4: *Đối với một hệ tuyến tính bậc n có các tham số bất biến theo thời gian luôn tồn tại một đẳng cự thành phần $E_e \in \mathbb{R}^{e \times n}$ và hai ma trận xác định không âm $\tilde{Q}_e$ và $\tilde{P}_e$ sao cho các tham số tối ưu của một phần tử điều khiển bậc e có khả năng điều khiển và quan sát đồng thời được cho bởi:*

$$A_e = E_e H_n \left(A_n - B_n B_n^T \Pi - \Psi C_n^T C_n \right) H_n^{-1} E^T \tag{75}$$

$$B_e = E_e H_n \Psi C_n^T \tag{76}$$

$$C_e = -B_n^T \Pi H_n^{-1} E^T \tag{77}$$

trong đó, hai ma trận xác định dương Π *và* Ψ *là nghiệm duy nhất của phương trình tương ứng* CARE *và* FARE, H_n *liên hệ với các trạng thái của bộ điều khiển LQG toàn bậc.*

Các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

$$\sigma_e \left[H_n \left(B_n B_n^T \Pi + \Psi C_n^T C_n \right) \tilde{Q}_e - \frac{1}{2} H_n \Psi C_n^T V C_n \Psi H_{nn} \right] \geq 0 \tag{78}$$

$$\sigma_e \left[H_n^{-1} \left(B_n B_n^T \Pi + \Psi C_n^T C_n \right) \tilde{P}_e - \frac{1}{2} H_n^{-1} \Pi B_n B_n^T \Pi H_n^{-1} \right] \geq 0 \tag{79}$$

trong đó, $\tilde{Q}_e = H_n^{-1} E^T Q_e E_e$, $\tilde{P}_e = H_n E_e^T P_e E_e$, $\sigma = E_e^T E_e$, *với* $V = \begin{bmatrix} C_n x_n x_n^T C_n^T & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}$, *và* Q_e, P_e *là các gramian đặc trưng cho tính điều khiển và quan sát được của bộ điều khiển LQG chuẩn giảm bậc.*

Tuy nhiên việc bù trừ động học cần phải thực hiện sao cho bộ điều khiển giảm bậc có khả năng làm toàn bộ hệ động học của đối tượng ổn định. Từ điều kiện bù trừ động học đó, xuất hiện hai bất phương trình Lyapunov ở dạng chính tắc như sau:

$$BB^T \Pi H_n^{-1} E^T Q_{12}^T + Q_{12} E H_n^{-1} \Pi BB^T - BB^T \geq 0 \tag{80}$$

$$C^T C \Psi H_n E^T P_{12}^T + P_{12} E H_n \Psi C^T C + C^T C \geq 0 . \tag{81}$$

Như vậy, bài toán giảm bậc bộ điều khiển được thực hiện theo thứ tự ba bước. Trong bước thứ nhất, sử dụng bài toán LQG chuẩn để thu được mô hình tương đương của bộ điều khiển theo tư duy hệ hở. Trong bước thứ hai, áp dụng kết quả của bài toán giảm bậc mô hình và bước cuối cùng, sử dụng bài toán LQG để thực hiện ổn định nội.

V. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, nội dung tổng quan mang tính cơ sở của các phương pháp cũng như khía cạnh của các kết quả nghiên cứu gần đây với việc mô tả hệ thống động học đã được trình bày. Nhưng kết quả được giới thiệu có đóng góp mang ý nghĩa học thuật được tập trung nhiều hơn nhằm gợi mở một số điểm có thể triển khai, nghiên cứu tiếp, cả về phương diện lí thuyết và thực tiễn.

Đáng chú ý là những đóng góp của việc phát triển phương pháp xây dựng hệ phương trình quy chiếu tối ưu (OPEQ) và của phương pháp tối ưu theo trạng thái vào việc tìm kiếm nghiệm duy nhất đối với bài toán tối ưu. Từ các điều kiện cần bậc nhất của một bài toán tối ưu theo tiêu chí nào đó phát triển thành OPEQ đã sinh ra một hiệu ứng như có thêm được điều kiện ràng buộc vào cùng tiêu chí trong chính quá trình tối ưu đó, dẫn đến hạn chế miền nghiệm phải tìm kiếm. Hơn nữa, việc phát triển thành OPEQ tạo dựng ra môi trường để có thể sử dụng các điều kiện ràng buộc khác đối với bài toán tối ưu mà các phương pháp tối ưu truyền thống không thể. Tuy nhiên, hạn chế lớn nhất của OPEQ là rất phức tạp về mặt toán học vì các phương trình ràng buộc trong hệ là các phương trình biến dạng, ghép với nhau thông qua phép chiếu.

Thêm vào đó, sự phát triển của lí thuyết nhận dạng các hệ thống động học phi tuyến cũng được đề cập. việc nhận dạng các hệ thống phi tuyến là một bài toán khó giải và không có một kĩ thuật duy nhất nào có thể khuyến nghị để cung cấp một lời giải có thể chấp nhận được. Mọi thuật toán được xem xét có các ưu và nhược điểm của chúng và mỗi thuật toán phải được đánh giá theo bài toán đang khảo sát.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Unbehauen H. and Rao G. P. - Identification of continuous systems, North Holland System and Control Series, 1987.
2. Banks S. P. - Mathematical theory of nonlinear systems, New York, Prentice Hall, 1989.
3. Mehra R. K. - Nonlinear system identification: Selected survey and recent trends, 5th IFAC Symp. On Ident. Syst., Par. Est.,1983, 77-83.
4. Nath N. G. and San N. N. - Input error approach of paramater estimation for continuous time models, Proc. 13th Nat. Syst. Conf., Kharagpur, India, 1989, 75-78.
5. Soderstrom T. and Stoica P. - System identification, Prentice Hall Inter. Ltd, 1989.
6. Eykhoff P. (ed.) - Trends and progress in system identification, Pergamon Press, Oxford, 1980.
7. Astrom K.J. and Bohlin T. - Numerical identification for linear dynamic systems from normal operating records, Hammond P.H. (Ed.), Theory of self adaptive systems, New York, Plenum Press, 1995.
8. Lin C-T. and Lee C.S.G. - Neural Fuzzy Systems, Prentice Hall Inter. Inc, Ltd, 1989.
9. Karatalopoulus S.V. - Understanding neural networks and fuzzy logic, IEEE Press, 1996.
10. Fukuda T. and Kubota N. - Intelligent Robotic System, Proc. RESCEE-98 Japan-USA-Vietnam Workshop, Plenary paper, Hanoi, May 1998.
11. Chen C.F. - Model reduction of multivariable control system by means of matrix continued fractions, Inter. J. Control **20** (1974) 225-238.
12. Friedland B. - On the properties of reduced order Kalman filters, IEEE Trans. Auto. Contr. **AC-34** (3) (1989) 321-324.
13. Hutton M. F. and Friedland B. - Rough approximation for reducing order of linear time invariant systems, IEEE Trans. Auto. Contr. **AC-20** (1975) 329-337.