

Vấn đề nhận giá trị và duy nhất của toán tử sai phân và tích sai phân đối với hàm phân hình trên một trường không Archimedes

Phạm Ngọc Hoa, Nguyễn Xuân Lai*

Khoa Toán, Trường Cao đẳng Hải Dương

Ngày nhận bài 5/2/2018; ngày chuyển phản biện 12/2/2018; ngày nhận phản biện 26/3/2018; ngày chấp nhận đăng 30/3/2018

Tóm tắt:

Trong bài báo này, các tác giả thảo luận vấn đề nhận giá trị và duy nhất của toán tử sai phân và tích sai phân đối với hàm phân hình trên trường số p -adic.

Từ khóa: Giả thuyết Hayman, hàm phân hình, toán tử sai phân, trường không Archimedes.

Chỉ số phân loại: 1.1

The problem of value-sharing and uniqueness between the difference operator and the differential equation for the meromorphic function of a non-Archimedean field

Ngoc Hoa Pham, Xuan Lai Nguyen*

Department of Mathematics, Hai Duong College

Received 5 February 2018; accepted 30 March 2018

Abstract:

In this paper, we discuss the value-sharing and uniqueness problem for difference operators and differential multiplications of meromorphic functions in a p -adic field.

Keywords: Difference operators, Hayman conjecture, meromorphic functions, non-Archimedean field.

Classification number: 1.1

1. Mở đầu

Phân bố giá trị và vấn đề xác định duy nhất đã được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước xét trong mối liên hệ với đạo hàm của hàm phân hình và ảnh ngược của các điểm riêng rẽ. Người khởi xướng hướng nghiên cứu này là Hayman. Năm 1967, Hayman [1] đã chứng minh kết quả sau đây:

Định lý A. Cho f là hàm phân hình trên $\mathbb{C}$. Nếu $f(z) \neq 0$ và $f^{(k)}(z) \neq 1$ với k là một số nguyên dương nào đó và với mọi $z \in \mathbb{C}$ thì f là hằng. Năm 1967, Hayman [1] cũng đưa ra giả thuyết sau đây:

Giả thuyết Hayman. Nếu một hàm nguyên f thỏa mãn $f^n(z)f'(z) \neq 1$ với n là một số nguyên dương nào đó và với mọi $z \in \mathbb{C}$ thì f là hằng.

Giả thuyết Hayman đã được Hayman kiểm tra đối với hàm nguyên siêu việt và $n > 1$, đã được Clunie [2] kiểm tra đối với $n \geq 1$. Các kết quả này và các vấn đề liên quan đã hình thành nhánh nghiên cứu được gọi là sự lựa chọn của Hayman.

Công trình quan trọng đầu tiên thúc đẩy hướng nghiên cứu này thuộc về C.C. Yang và X.H. Hua [3]. Năm 1997, hai ông đã chứng minh định lý sau đây:

Định lý B [3]. Cho f và g là hai hàm phân hình khác hằng, $n \geq 11$ là một số nguyên và $a \in \mathbb{C} - \{0\}$. Nếu $f^n f'$ và $g^n g'$ nhận giá trị a CM thì hoặc $f = dg$ với $d^{n+1} = 1$ hoặc $f(z) = c_1 e^{cz}$ và $g(z) = c_2 e^{-cz}$, ở đó c, c_1, c_2 là các hằng số và thỏa mãn $(c_1 c_2)^{n+1} c^2 = -a^2$.

Trong trường hợp p -adic, kết quả đầu tiên theo hướng nghiên cứu này thuộc về J. Ojeda [4]. Năm 2008, J. Ojeda đã xét vấn đề nhận giá trị của $f' + T f^n$ với T là hàm hữu tỷ. Ở đó, J. Ojeda đã nhận được kết quả sau:

Định lý C [4]. Cho f là hàm phân hình trên $\mathbb{C}_p$, $n \geq 2$ là một số nguyên và $a \in \mathbb{C}_p - \{0\}$. Khi đó nếu $f^n(z)f'(z) \neq a$ với mọi $z \in \mathbb{C}_p$ thì f là hằng.

Trong những năm gần đây, vấn đề trên được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước xét trong mối liên hệ với đa

*Tác giả liên hệ: Email: laicdhd@gmail.com

thức sai phân của hàm phân hình và ảnh ngược của các điểm riêng rẽ. Năm 2006, Halburd và Korhonen [5] đã thiết lập tương tự của lý thuyết Nevanlinna cho toán tử sai phân của hàm phân hình có bậc hữu hạn. Năm 2007, I. Laine và C.C. Yang [6] đã thiết lập tương tự Định lý A của Hayman cho một kiểu đa thức sai phân đặc biệt của hàm nguyên siêu việt có bậc hữu hạn. Hai ông đã chứng minh kết quả sau đây:

Định lý D [6]. Cho f là hàm nguyên siêu việt có bậc hữu hạn trên $\mathbb{C}$ và c là một số phức khác 0, n là một số nguyên, $n \geq 2$. Khi đó $f^n(z)f(z+c)$ nhận a , $a \in \mathbb{C}$, vô hạn lần.

Năm 2009, K. Liu và L.Z. Yang [7] đã chứng minh được kết quả tương tự Định lý D cho toán tử sai phân của hàm nguyên siêu việt có bậc hữu hạn, đã chứng minh được kết quả tương tự Định lý B (xem [3]) cho một kiểu đa thức sai phân đặc biệt của hàm phân hình.

Gần đây, Hà Huy Khoái và Vũ Hoài An [1, 8], Hà Huy Khoái, Vũ Hoài An và Nguyễn Xuân Lai [9] đã xét phân bố giá trị và vấn đề duy nhất đối với đạo hàm bậc cao của hàm phân hình trên một trường không Archimedes. Họ đã chứng minh được kết quả tương tự của Yang - Hua (Định lý B) cho $(f^n)^{(k)}$ với f là hàm phân hình trên một trường không Archimedes.

Trong bài báo này, chúng tôi xét vấn đề nhận giá trị và duy nhất đối với toán tử sai phân và tích sai phân của hàm phân hình trên một trường không Archimedes.

2. Vấn đề nhận giá trị của toán tử sai phân và tích sai phân của hàm phân hình trên một trường không Archimedes

Trong bài báo ta luôn giả thiết $\mathbb{K}$ là một trường đặc số không, đầy đủ với chuẩn không Archimedes và đóng đại số. Các khái niệm, ký hiệu và kết quả dùng trong bài báo này ở các tài liệu [1, 8-10]. Trước tiên ta phát biểu Giả thuyết Hayman cho toán tử sai phân trên một trường không Archimedes (p -adic).

Giả thuyết Hayman cho toán tử sai phân p -adic. Nếu một hàm phân hình p -adic f thỏa mãn $f^n(z)\Delta_c f(z) \neq 1$ với n là một số nguyên dương nào đó và với mọi $z \in \mathbb{K}$ thì f là hằng.

Ta cần các bổ đề sau:

Bổ đề 2.1. Nếu hàm phân hình f trên $\mathbb{K}$ thỏa mãn $\Delta_c f(z) = 0$ với mọi $z \in \mathbb{K}$ thì f là hằng.

Chứng minh: Giả sử ngược lại, f khác hằng. Do f là một hàm phân hình trên $\mathbb{K}$, khi đó tồn tại hai hàm nguyên f_1, f_2 sao cho f_1, f_2 không có không điểm chung và $f = \frac{f_1}{f_2}$. Do f khác hằng nên ít nhất một trong hai hàm f_1, f_2 khác hằng. Không giảm tổng quát, giả sử f_1 khác hằng. Vì $\Delta_c f(z) = 0$ với mọi $z \in \mathbb{K}$ nên $\frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{f_1(z+c)}{f_2(z+c)} = a, a \neq 0$ với mọi $z \in \mathbb{C}_p$. Khi đó $f_1(z) = af_2(z+c)$. Ta chứng minh $f_1(z)$ không có không điểm có mô đun lớn hơn $|c|$. Giả sử ngược lại, $f_1(z)$ có không điểm có mô đun lớn hơn $|c|$. Gọi b là không điểm của $f_1(z)$ sao cho $|c| < |b|$. Đặt $|b| = r$. Do $|c| < |b|$ nên $|z+mc| = |z|$ với $|z| = r, m$ là một số nguyên dương bất kỳ. Chú ý rằng, tập hợp các không điểm có cùng mô đun của một hàm nguyên là hữu hạn. Do $f_1(z) = af_2(z+c)$ nên $b, b+c, \dots, b+mc, \dots$ là các không điểm phân biệt có cùng mô đun của $f_1(z)$ với m là một số nguyên dương bất kỳ. Từ đây

ta nhận được mâu thuẫn. Vậy $f_1(z)$ không có không điểm có mô đun lớn hơn $|c|$. Do đó $f_1(z)$ là đa thức với bậc n nào đó. Từ $f_1(z) = af_2(z+c)$ nhận được $f_1(z)^{(n-1)}$ là đa thức với bậc 1 và $f_1(z)^{(n-1)} = af_2(z+c)^{(n-1)}$. Viết $f_1(z)^{(n-1)} = dz+e$. Khi đó $af_2(z+c)^{(n-1)} = a(d(z+c)+e)$ và $dz+e = adz+adc+ae$. Từ đây suy ra $a = 1, c = 0$. Mâu thuẫn với giả thiết $c \neq 0$. Vậy f là hằng.

Định lý sau đây trả lời chưa trọn vẹn Giả thuyết Hayman cho toán tử sai phân p -adic.

Định lý 2.2. Nếu hàm phân hình f trên $\mathbb{K}$ thỏa mãn $f^n(z)\Delta_c f(z) \neq 1$ với $n \geq 6$ là một số nguyên dương nào đó và với mọi $z \in \mathbb{K}$ thì f là hằng.

Chứng minh: Giả sử ngược lại, f khác hằng. Theo Bổ đề 2.1 ta có $\Delta_c f$ không đồng nhất không.

Đặt $G = f^n(z)\Delta_c f$. Ta thấy rằng, mọi cực điểm của G chỉ có thể xảy ra tại các cực điểm của $f, f(z+c)$, và mọi không điểm của G chỉ có thể xảy ra tại các không điểm của $f, \Delta_c f$.

Áp dụng Định lý chính thứ hai, thứ nhất và kết hợp với Bổ đề 3.1, 3.2 [8] ta có

$$(n-1)T(r, f) \leq T(r, f^n(z)\Delta_c f) + O(1) \leq N_1(r, G) + N_1(r, \frac{1}{G}) + N_{1,G}(r, \frac{1}{G-1}) - \log r + O(1) \leq T(r, f) + T(r, f) + T(r, f) + 2T(r, f) + N_1(r, \frac{1}{G-1}) - \log r + O(1)$$

Do đó

$$(n-6)T(r, f) + \log r \leq N_1(r, \frac{1}{G-1}) + O(1)$$

Từ f khác hằng và $n \geq 6$ ta có G nhận giá trị 1, một mâu thuẫn. Vậy f là hằng.

Định lý 2.2 góp phần khẳng định Giả thuyết Hayman p -adic.

Câu hỏi đặt ra là: Với $n = 1, \dots, 5$ thì Định lý 2.2 còn đúng nữa hay không?

Sau đây ta trình bày Giả thuyết Hayman đối với tích sai phân của hàm phân hình trên một trường không Archimedes (p -adic).

Giả thuyết Hayman được phát biểu cho tích sai phân của hàm phân hình p -adic như sau:

Giả thuyết Hayman cho tích sai phân p -adic. Nếu f là một hàm phân hình trên $\mathbb{K}$ thỏa mãn $f^n(z)f(z+c) \neq 1$ với n là một số nguyên dương nào đó, $c \neq 0$ và với mọi $z \in \mathbb{K}$ thì f là hằng.

Định lý sau đây trả lời chưa trọn vẹn Giả thuyết Hayman cho tích sai phân p -adic.

Định lý 2.3. Nếu một hàm phân hình f trên $\mathbb{K}$ thỏa mãn $f^n(z)f(z+c) \neq 1$ với $n \geq 5$ là một số nguyên dương nào đó và với mọi $z \in \mathbb{K}$ thì f là hằng.

Chứng minh: Giả sử ngược lại, f khác hằng. Theo Bổ đề 2.1 ta có $f(z+c)$ khác hằng. Đặt $F = f^n(z)f(z+c)$. Ta thấy rằng, mọi cực điểm của F chỉ có thể xảy ra tại các cực điểm của $f, f(z+c)$, và mọi không điểm của F chỉ có thể xảy ra tại $f, f(z+c)$. Áp dụng Định lý chính thứ hai, thứ nhất và kết hợp với Bổ đề 3.1, 3.2 [8] ta có

$$(n-1)T(r, f) \leq T(r, f^n(z)f(z+c)) + O(1) \leq N_1(r, F) + N_1(r, \frac{1}{F}) +$$

$$N_{1,F}(r, \frac{1}{F-1}) - \log r + O(1) \\ \leq T(r, f) + T(r, f) + T(r, f) + T(r, f) + N_1(r, \frac{1}{F-1}) - \log r + O(1)$$

Do đó

$$(n-5)T(r, f) + \log r \leq N_1(r, \frac{1}{F-1}) + O(1)$$

Từ f khác hằng và $n \geq 5$ ta có F nhận giá trị 1, một mâu thuẫn. Vậy f là hằng.

3. Vấn đề duy nhất của tích sai phân của hàm phân hình trên một trường không Archimedes

Câu hỏi đặt ra là: Với $n = 1, \dots, 4$ thì Định lý 2.3. còn đúng nữa hay không?

Tiếp theo, ta có các kết quả tương tự của Định lý B cho tích sai phân của hàm phân hình p -adic.

Định lý 3.1. Giả sử f, g là các hàm phân hình trên $\mathbb{K}$. Nếu $E_{f^n f(z+c)}(1) = E_{g^n g(z+c)}(1)$ và $n \geq 13$, n là số nguyên, thì $f = hg$ với $h^{n+1} = 1$ hoặc $fg = l$ với $l^{n+1} = 1$.

Chứng minh: Áp dụng Bổ đề 3.3 [8] với các trường hợp sau:

Trường hợp 1.

Đặt $A = f^n f(z+c)$, $B = g^n g(z+c)$. Khi đó ta có

$$T(r, A) + O(1) \leq N_1(r, A) + N_1^{\geq 2}(r, A) + N_1(r, \frac{1}{A}) + N_1^{\geq 2}(r, \frac{1}{A}) + \\ N_1(r, B) + N_1^{\geq 2}(r, B) + N_1(r, \frac{1}{B}) + N_1^{\geq 2}(r, \frac{1}{B}) - \log r + O(1)$$

Kết hợp với Bổ đề 3.2 [8] ta có

$$(n-1)T(r, f) \leq T(r, A) + O(1) \leq N_1(r, A) + N_1^{\geq 2}(r, A) + N_1(r, \frac{1}{A}) + \\ + N_1^{\geq 2}(r, \frac{1}{A}) + N_1(r, B) + N_1^{\geq 2}(r, B) + N_1(r, \frac{1}{B}) + N_1^{\geq 2}(r, \frac{1}{B}) - \log r + O(1), \\ (n-1)T(r, g) \leq T(r, B) + O(1) \leq N_1(r, B) + N_1^{\geq 2}(r, B) + N_1(r, \frac{1}{B}) + \\ + N_1^{\geq 2}(r, \frac{1}{B}) + N_1(r, A) + N_1^{\geq 2}(r, A) + N_1(r, \frac{1}{A}) + \\ + N_1^{\geq 2}(r, \frac{1}{A}) + N_1(r, B) + N_1^{\geq 2}(r, B) + N_1(r, \frac{1}{B}) + N_1^{\geq 2}(r, \frac{1}{B}) - \\ - \log r + O(1) \quad (1)$$

Mọi cực điểm của A chỉ có thể xảy ra tại các cực điểm của $f, f(z+c)$. Kết hợp với Định lý chính thứ nhất và Bổ đề 3.1 [8] ta có

$$N_1(r, A) + N_1^{\geq 2}(r, A) \leq 2N_1(r, f) + (N_1(r, f(z+c)) + \\ N_1^{\geq 2}(r, f(z+c)) + O(1)) \leq 2N(r, f) + N(r, f(z+c)) + O(1) \leq \\ 2T(r, f) + T(r, f(z+c)) + O(1) \leq 3T(r, f) + O(1)$$

Suy ra

$$N_1(r, A) + N_1^{\geq 2}(r, A) \leq 3T(r, f) + O(1) \quad (2)$$

Ta thấy rằng, mọi không điểm của A chỉ có thể xảy ra tại các không điểm của $f, f(z+c)$.

Tương tự (2) ta nhận được

$$N_1(r, \frac{1}{A}) + N_1^{\geq 2}(r, \frac{1}{A}) \leq 3T(r, f) + O(1) \quad (3)$$

Tương tự đối với B ta cũng có:

$$N_{1,B}(\infty, r) + N_{1,B}^{\geq 2}(\infty, r) \leq (k+2)T_g(r) + O(1)$$

$$N_{1,B}(0, r) + N_{1,B}^{\geq 2}(0, r) \leq (k+2)T(r, g) + O(1) \quad (4)$$

Từ (1)-(4) ta có

$$(n-1)T(r, f) \leq 6(T(r, f) + T(r, g)) - \log r + O(1)$$

Tương tự

$$(n-1)T(r, g) \leq 6(T(r, f) + T(r, g)) - \log r + O(1)$$

Suy ra ta có

$$(n-1)(T_f(r) + T_g(r)) \leq 12(T(r, f) + T(r, g)) - 2 \log r + O(1), \\ (n-13)(T_f(r) + T_g(r)) + 2 \log r \leq O(1)$$

Do $n \geq 13$ nên ta gặp mâu thuẫn.

Trường hợp 2.

$f^n f(z+c)g^n g(z+c) \equiv 1$. Khi đó ta có $(fg)^n(f(z+c)g(z+c)) = 1$.

Đặt $l = fg$ và giả sử l không phải hàm hằng. Khi đó ta có

$$l^n(z) = \frac{1}{l(z+c)}$$

Theo Bổ đề 3.1 [8] ta có

$$nT(r, l) = T(r, l^n) = T(r, \frac{1}{l(z+c)}) \leq T(r, l(z+c)) + O(1) \leq T(r, l) + O(1)$$

Điều này mâu thuẫn với $n \geq 13$. Vì vậy l phải là hàm hằng. Do đó $fg = l$ với $l^{n+1} = 1$.

Trường hợp 3.

$A = f^n f(z+c) \equiv B = g^n g(z+c)$. Đặt $h = \frac{f}{g}$. Giả sử h không phải hàm hằng. Khi đó ta có

$$h^n(z) = \frac{1}{h(z+c)}$$

Theo Bổ đề 3.1 [8] ta có

$$nT(r, h) =$$

$$T(r, h^n) = T(r, \frac{1}{h(z+c)}) \leq T(r, h(z+c)) + O(1) \leq T(r, h) + O(1)$$

Điều này mâu thuẫn với $n \geq 13$. Vì vậy h phải là hàm hằng, kéo theo $h^{n+1} = 1$, do đó $f = hg$ với $h^{n+1} = 1$.

Định lý 3.1. được chứng minh.

LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Quỹ phát triển khoa học và công nghệ quốc gia (NAFOSTED) thông qua đề tài mã số 101.01-2012.19. Các tác giả xin trân trọng cảm ơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Ha Huy Khoai and Vu Hoai An (2011), "Value distribution problem for p -adic meromorphic functions and their derivatives", *Ann. Fac. Sc. Toulouse*, **XX(Special)**, pp.135-149.
- [2] J. Clunie (1967), "On a result of Hayman", *J. London Math. Soc.*, **42**, pp.389-392.
- [3] C.C. Yang and X.H. Hua (1997), "Uniqueness and value-sharing of meromorphic functions", *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, pp.395-406.
- [4] J. Ojeda (2008), "Hayman's conjecture in a p -adic field", *Taiwanese J. Math.*, **9**, pp.2295-2313.
- [5] R.G. Halburd, R.J. Korhonen (2006), "Nevanlinna theory for the difference operator", *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, **31**, pp.463-478.
- [6] I. Laine and C.C. Yang (2007), "Value distribution of difference polynomials", *Proceedings of the Japan Academy, Series A*, **83(8)**, pp.148-151.
- [7] K. Liu and L.Z. Yang (2009), "Value distribution of the difference operator", *Archiv der Mathematik*, **92(3)**, pp.270-278.
- [8] Ha Huy Khoai and Vu Hoai An (2012), "Value - sharing problem for p -adic meromorphic functions and their difference operators and difference polynomials", *Ukrainian Math. J.*, **64(2)**, pp.147-164.
- [9] Ha Huy Khoai, Vu Hoai An and Nguyen Xuan Lai (2012), "Value sharing problem and Uniqueness for p -adic meromorphic functions", *Annales Univ. Sci. Budapest*, **38**, pp.71-92.
- [10] P.C. Hu, C.C. Yang (2000), *Meromorphic functions over non-Archimedean fields*, Kluwer.