

Ứng dụng thuật toán Rao tối ưu khung thép sử dụng phân tích phi tuyến tính phi đàn hồi

Hà Mạnh Hùng^{1*}, Trương Việt Hùng², Nguyễn Minh Phương²

¹Khoa Xây dựng dân dụng và công nghiệp, Trường Đại học Xây dựng

²Khoa Công trình, Trường Đại học Thủy lợi

Ngày nhận bài 16/4/2021; ngày chuyển phản biện 22/4/2021; ngày nhận phản biện 24/5/2021; ngày chấp nhận đăng 28/5/2021

Tóm tắt:

Các thuật toán tối ưu metaheuristic ngày càng được sử dụng rộng rãi trong thiết kế công trình nhờ khả năng vượt trội của chúng trong việc tìm kiếm các thiết kế tối ưu toàn cục. Về mặt lý thuyết, các thuật toán này rất mạnh và mang tính tổng quát cao, có thể áp dụng trong mọi dạng bài toán tối ưu. Tuy nhiên, trên thực tế, hiệu suất của các thuật toán này phụ thuộc vào đặc điểm của từng lớp bài toán. Thêm vào đó, tính phức tạp của thuật toán cũng là một yếu tố quan trọng ảnh hưởng đến khả năng áp dụng chúng trong các bài toán thiết kế cụ thể. Trong bài báo này, thuật toán tối ưu Rao, một trong những thuật toán metaheuristic mới nhất, được trình bày cho bài toán tối ưu kết cấu khung thép. Ưu điểm của thuật toán Rao là khá đơn giản (với rất ít tham số) nên các kỹ sư có thể dễ dàng ứng dụng trong công việc thiết kế hàng ngày. Phân tích phi tuyến tính phi đàn hồi được sử dụng để xét đến các ứng xử phi tuyến của kết cấu thép. Khung thép không gian 2 tầng được sử dụng để minh họa cho nghiên cứu. Kết quả thu được cho thấy Rao-1 có tính ổn định tốt hơn, hội tụ nhanh hơn nhưng dễ mắc vào cực bộ địa phương hơn so với Rao-2 và Rao-4. Rao-4 cho khả năng tìm kiếm tối ưu toàn cục tốt hơn nhưng tính ổn định lại kém nhất.

Từ khóa: khung thép, phân tích phi tuyến tính phi đàn hồi, thuật toán Rao, tối ưu.

Chỉ số phân loại: 2.1

Đặt vấn đề

Kết cấu thép được sử dụng rộng rãi cho các công trình dân dụng và công nghiệp hiện nay nhờ khả năng chịu lực tốt, đa dạng về hình dáng, kích thước, trong đó, khung thép là một trong những kết cấu điển hình, thường được sử dụng trong xây dựng. Bên cạnh đó, trong những năm gần đây, nhờ sự phát triển nhanh chóng của công nghệ tính toán, việc ứng dụng các thuật toán tối ưu vào thiết kế công trình ngày càng nhận được sự quan tâm lớn của các nhà khoa học trên thế giới và Việt Nam. Thiết kế tối ưu kết cấu công trình giúp tối đa hóa lợi ích về vật liệu và giá thành, mà vẫn đảm bảo an toàn cho công trình xây dựng. Tổng giá thành hoặc khối lượng của công trình thường được lựa chọn là hàm mục tiêu để tối thiểu hóa trong quá trình tối ưu với nhiều điều kiện ràng buộc kèm theo về cường độ và về sử dụng đối với các bài toán tối ưu kết cấu khung thép. Tiết diện của các cấu kiện dầm và cột thường được chọn là các biến thiết kế trong các bài toán tối ưu này.

Tuy nhiên độ phức tạp của các bài toán tối ưu hóa ngày càng cao, khiến các thuật toán tối ưu hóa thông thường không còn phù hợp. Đa số các bài toán tối ưu các kết cấu trong xây dựng đều khá phức tạp, do có tính phi tuyến cao, đa điểm cực trị và đa chiều. Vì vậy, thuật toán metaheuristic đã được chứng minh là cách tiếp cận tốt nhất để giải các bài

toán tối ưu hóa phức tạp trong mọi lĩnh vực. Ưu điểm nổi bật của các thuật toán này là khả năng kết hợp hài hòa giữa việc tìm kiếm cục bộ và tìm kiếm toàn cục để tìm nghiệm tối ưu tốt nhất. Một số thuật toán metaheuristic quen thuộc có thể kể đến như: tìm kiếm hài hòa (Harmony Search) (HS) [1], tiến hóa vi phân (Differential Evolution) (DE) [2], thuật toán di truyền (Genetic Algorithm) (GA) [3]... Tuy nhiên, đối với một hoặc một nhóm vấn đề tối ưu cụ thể, hiệu quả của một thuật toán metaheuristic là khác nhau. Do đó, việc đánh giá tính hiệu quả của một thuật toán metaheuristic với một loại bài toán tối ưu hóa cụ thể là điều cần thiết để cung cấp thông tin quan trọng cho người dùng phục vụ cho công việc của họ. Các thuật toán metaheuristic thường cần điều chỉnh các tham số điều khiển để đạt được hiệu quả, do đó việc ứng dụng trong tối ưu kết cấu thực tế đang còn hạn chế.

Thuật toán Rao là một trong những thuật toán metaheuristic khá mới, được giới thiệu vào năm 2020 và đặt tên theo giáo sư Rao (người Ấn Độ) [4]. Ưu điểm của thuật toán Rao là rất đơn giản vì yêu cầu rất ít tham số, bao gồm các cá thể kém nhất, tốt nhất và ngẫu nhiên trong quần thể. Mặc dù đơn giản nhưng thuật toán Rao khá hiệu quả trong nhiều dạng bài toán tối ưu hóa khác nhau [5-7]. Trong nghiên cứu của mình, Rao đã đề xuất 4 kỹ thuật đột biến khác nhau, dẫn đến có 4 thuật toán tối ưu Rao khác nhau.

*Tác giả liên hệ: Email: hungmh@nuce.edu.vn

Rao algorithm-based method for optimisation of steel frames using nonlinear inelastic analysis

Manh Hung Ha^{1*}, Viet Hung Truong²,
Minh Phuong Nguyen²

¹Faculty of Building and Industrial Construction,
National University of Civil Engineering

²Faculty of Civil Engineering, Thuyloi University

Received 16 April 2021; accepted 28 May 2021

Abstract:

Metaheuristic optimisation algorithms have been increasingly used because of their superior ability to find globally optimal solutions. Theoretically, these algorithms are very powerful and can be applied in all types of optimisation problems. However, in reality, their performance depends on the characteristics of each optimisation problem class. In addition, the complexity of an algorithm is an important factor affecting its application in specific design problems. In this paper, the Rao optimisation algorithm, one of the newest metaheuristic algorithms, is presented for the optimisation algorithm of steel frame structures. The advantage of the Rao algorithm is that it is quite simple with few parameters, so engineers can easily apply it in daily design tasks. A nonlinear inelastic analysis is used to consider the nonlinear behaviors of the steel structure. A two-story space steel frame is studied. The results show that Rao-1 is more stable and converged more quickly but easily trapped in local solutions than Rao-2 and Rao-4. Rao-4 is more efficient in global search but its stability is less than other algorithms.

Keywords: nonlinear inelastic analysis, optimisation, Rao algorithm, steel frame.

Classification number: 2.1

Tùy vào bài toán tối ưu cụ thể, người sử dụng có thể tự lựa chọn thuật toán hiệu quả nhất. Bên cạnh đó, trong nghiên cứu của mình, Rao mới giới hạn việc đánh giá hiệu quả của thuật toán Rao trong các hàm toán học.

Hiện nay, ứng dụng của thuật toán Rao trong tối ưu hóa kết cấu công trình chưa được nghiên cứu đầy đủ. Trong nghiên cứu này, chúng tôi sẽ giới thiệu và áp dụng thuật toán Rao để tối ưu hóa kết cấu khung thép phi tuyến, vốn được coi là một bài toán tối ưu mang tính thực tế và phi tuyến cao, do các ứng xử phi tuyến hình học và vật liệu của kết cấu, tính không liên tục của biến thiết kế. Để chứng minh hiệu quả của phương pháp đề xuất, một khung thép không gian hai tầng được nghiên cứu.

Thiết lập bài toán tối ưu khung thép sử dụng phân tích phi tuyến tính phi đàn hồi

Ứng xử thực tế của kết cấu thép dưới tác dụng của tải trọng là phi tuyến, do các ứng xử phi tuyến hình học của kết cấu và phi đàn hồi của vật liệu thép. Vì vậy, để phản ánh chính xác hơn ứng xử của kết cấu thép, một số công trình tối ưu hóa kết cấu thép sử dụng phân tích phi tuyến tính phi đàn hồi đã được công bố trong những năm gần đây [8-10]. Tối ưu hóa khung thép bằng cách sử dụng phân tích phi tuyến tính phi đàn hồi được miêu tả như sau [1]:

Tối thiểu hóa hàm:

$$W(X) = \sum_{i=1}^N \rho_i A_i L_i \quad (1)$$

Chịu điều kiện ràng buộc:

$$\begin{cases} 1 - constr_m \leq 0 & m = 1, \dots, N_{constr} \\ 1 - LF_j \leq 0 & j = 1, \dots, N_{strength} \\ \left| \frac{h_{k,l}}{h_{k,l}^u} \right| - 1 \leq 0 & k = 1, \dots, N_{service}; l = 1, \dots, N_{story} \\ A_i \in [A]_i \end{cases} \quad (2)$$

Trong đó i , j và k lần lượt là số thứ tự của các phần tử kết cấu và tổ hợp tải trọng theo giới hạn cường độ và sử dụng; ρ là khối lượng riêng của vật liệu; L và A là chiều dài và diện tích tiết diện của phần tử kết cấu; $constr_m$ là giá trị tương ứng với điều kiện ràng buộc về cấu tạo thứ m ; $[A]$ là tập hợp các tiết diện được sử dụng của biến thiết kế (là tiết diện của phần tử kết cấu); $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ là vec-tơ biến thiết kế với x_i là số thứ tự của loại tiết diện được sử dụng trong tập hợp tiết diện đã cho; h_j và h_j^u là chuyển vị lệch tầng và giá trị

giới hạn của nó; $LF = R/S$ - hệ số chịu tải tối đa của kết cấu, là tỷ lệ giữa khả năng chịu tải của công trình (R) và hiệu ứng do tải trọng gây ra (S).

Các ràng buộc về cấu tạo hình học thường là các yêu cầu về kích thước chiều rộng của cột và dầm, chiều rộng của cột bên dưới và cột bên trên [1].

Để có thể áp dụng các thuật toán metaheuristic, bài toán tối ưu có điều kiện ràng buộc được trình bày trong công thức (1) phải được chuyển đổi thành bài toán tối ưu không có điều kiện ràng buộc. Để thực hiện vấn đề này, một cách đơn giản nhất là sử dụng phương pháp hàm phạt được trình bày trong công thức (3):

$$W_{un}(X) = \left(1 + \sum_{m=1}^{N_{constr}} \alpha_{constr,m} \beta_{1,m} + \sum_{j=1}^{N_{width}} \alpha_{str,j} \beta_{2,j} + \sum_{k=1}^{N_{displacement}} \alpha_{disp,k} \beta_{3,k} \right) \times W(X) \quad (3)$$

$$\beta_{1,m} = \max(1 - constr_m, 0); \beta_{2,j} = \max(1 - LF_j, 0); \beta_{3,k} = \sum_{l=1}^m \max\left(\frac{|h_{k,l}|}{h_{k,l}^u} - 1, 0\right)$$

Trong đó, $\alpha_{constr,m}$, $\alpha_{str,j}$ và $\alpha_{disp,k}$ là các hệ số phạt. Các hệ số này được lựa chọn với giá trị đủ lớn nhằm đảm bảo rằng, các cá thể vi phạm điều kiện ràng buộc sẽ tự động bị loại bỏ dần trong quá trình tối ưu. Trong nghiên cứu này, các hệ số phạt được lấy bằng 10,000.

Ứng dụng thuật toán Rao trong bài toán tối ưu khung thép phi tuyến

Thuật toán tối ưu Rao

Thuật toán tối ưu Rao được đề xuất vào năm 2020 và đặt tên theo giáo sư Rao (người Ấn Độ) với 4 kỹ thuật đột biến cơ bản như sau [5]:

$$Rao-1: \mathbf{x}_i' = \mathbf{x}_i + \mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{x}_{best} - \mathbf{x}_{worst}) \quad (4)$$

$$Rao-2: \mathbf{x}_i' = \mathbf{x}_i + \mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{x}_{best} - \mathbf{x}_{worst}) + \mathbf{r}_2 \cdot d \cdot (|\mathbf{x}_i| - |\mathbf{x}_j|) \quad (5)$$

$$Rao-3: \mathbf{x}_i' = \mathbf{x}_i + \mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{x}_{best} - |\mathbf{x}_{worst}|) + \mathbf{r}_2 \cdot d \cdot (|\mathbf{x}_i| - \mathbf{x}_j) \quad (6)$$

$$Rao-4: \mathbf{x}_i' = \mathbf{x}_i + \mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{x}_{best} - \mathbf{x}_{worst}) + 0.5 \cdot \left(\mathbf{r}_2 \cdot (\mathbf{x}_{best} - \mathbf{x}_j) + \mathbf{r}_3 \cdot (\mathbf{x}_{best} - \mathbf{x}_j) \right) - \mathbf{r}_4 \cdot (\mathbf{x}_{worst} - \mathbf{x}_j) \quad (7)$$

Trong đó $\mathbf{x}_i$ là cá thể thứ i trong quần thể hiện tại; $\mathbf{x}_{best}$ và $\mathbf{x}_{worst}$ tương ứng là cá thể tốt nhất và kém nhất trong quần thể hiện tại; $\mathbf{x}_j$ là một cá thể ngẫu nhiên của quần thể; $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ và $\mathbf{r}_4$ là các véc-tơ số thực ngẫu nhiên trong khoảng $[0, 1]$ của vòng tiến hóa hiện tại; $d=1$ nếu hàm mục tiêu của $\mathbf{x}_i$ là tốt hơn so với của $\mathbf{x}_j$, ngược lại thì $d=-1$. Nếu hàm mục tiêu của $\mathbf{x}_i$ tốt hơn của $\mathbf{x}_j$, nó sẽ được lựa chọn thay thế cho vị trí của $\mathbf{x}_i$ trong quần thể mới.

Tối ưu khung thép phi tuyến sử dụng thuật toán tối ưu Rao

Dựa trên thuật toán Rao, bài toán tối ưu khung thép sử dụng phân tích phi tuyến tính phi đàn hồi trình bày trong

công thức (3) được xây dựng với các bước chính như sau:

Bước 1: thiết lập bài toán tối ưu. Trong bước này, điều quan trọng nhất là thiết lập được công thức tối ưu không có điều kiện ràng buộc được trình bày trong công thức (3). Các thông số về biến thiết kế, tập thiết kế tương ứng, thông số của thuật toán Rao cũng được xác định. Lưu ý rằng, đối với thuật toán Rao, chỉ có 2 thông số cơ bản cần xác định là: số lượng cá thể trong quần thể (NP) và số vòng tiến hóa tối đa cho chương trình tối ưu (MaxIter).

Bước 2: thiết lập quần thể ban đầu một cách ngẫu nhiên bao gồm NP cá thể. Các cá thể này được xác định giá trị hàm mục tiêu bằng cách sử dụng công thức (3), trong đó, phân tích phi tuyến tính phi đàn hồi được sử dụng để xác định ứng xử của kết cấu.

Bước 3: xây dựng quần thể mới dựa trên kỹ thuật đột biến. Quần thể mới được xây dựng dựa trên kỹ thuật đột biến. Lần lượt, từng cá thể trong quần thể hiện tại được chọn là cá thể mục tiêu để xây dựng nên một cá thể mới tương ứng. Nếu cá thể mới này có giá trị hàm mục tiêu tốt hơn so với cá thể mục tiêu, thì nó được lựa chọn thay thế cho cá thể mục tiêu trong quần thể mới. Trong trường hợp ngược lại, cá thể mục tiêu vẫn tiếp tục được giữ lại.

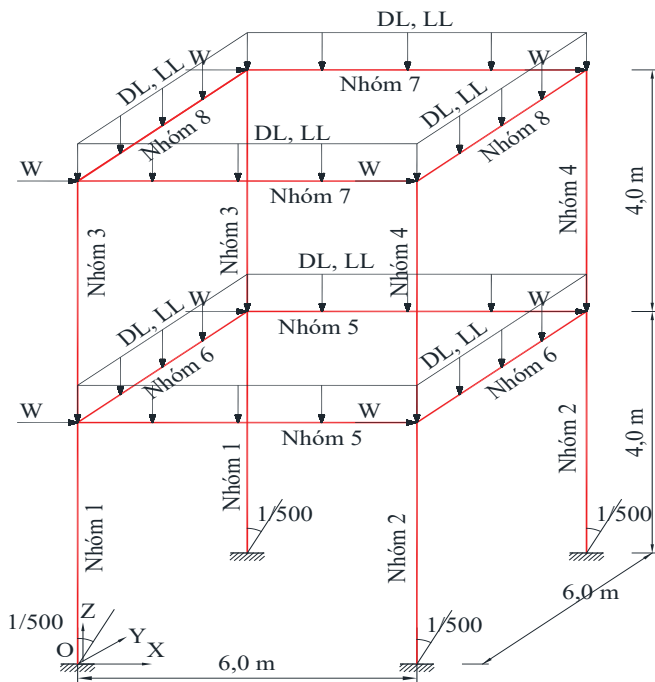
Bước 4: kết thúc quá trình tối ưu. Bước 3 được thực hiện cho đến khi số vòng tiến hóa đạt đến giá trị tối đa MaxIter. Lúc này, kết quả tối ưu thu được là cá thể tốt nhất trong quần thể cuối cùng.

Ví dụ minh họa

Trong phần ví dụ minh họa cho phương pháp này, một kết cấu khung không gian 2 tầng bằng thép được nghiên cứu nhằm đánh giá hiệu quả của các thuật toán Rao đối với bài toán tối ưu khung thép sử dụng phân tích phi tuyến tính phi đàn hồi. Kích thước của khung thép: nhịp là 6 m và chiều cao các tầng là 4 m, được thể hiện trong hình 1. Độ lệch cột ban đầu được lấy bằng 1/500 theo cả 2 phương X và Y nhằm xét đến sự không hoàn hảo ban đầu của kết cấu. Bài toán tối ưu được nghiên cứu trong ví dụ này gồm 8 biến thiết kế (nhóm 1 đến nhóm 8), là tiết diện của các phần tử khung. Các cột được thiết kế, chọn lựa từ các tiết diện W10, W12, W14 và W16. Các dầm được thiết kế từ tiết diện W10 đến W44. Vật liệu thép sử dụng cho kết cấu là A992, với mô đun đàn hồi $E=200$ (GPa) và cường độ chảy $f_y=345$ (MPa). Tải trọng gồm tĩnh tải DL và hoạt tải LL là các tải trọng phân bố đều tác dụng lên các dầm. Giá trị của tĩnh tải là 40 (kN/m) và của hoạt tải là 30 (kN/m). Tải trọng gió tác dụng lên các nút khung theo chiều trục X và có giá trị bằng 100 kN. Các tổ hợp tải trọng được xét đến trong bài toán dựa theo tiêu chuẩn AISC-LRFD của Mỹ [11], trong đó, hai tổ hợp

cường độ được xem xét ($1,2DL + 1,6LL$) và ($1,2DL + 1,6W + 0,5LL$) là 2 điều kiện ràng buộc về cường độ, còn lại một tổ hợp ($1,0DL + 0,7W + 0,5LL$) là điều kiện ràng buộc về chuyển vị (đảm bảo điều kiện tương ứng là chuyển vị lệch tầng của khung không vượt quá $h/400$, với h là chiều cao tầng). Phần mềm phân tích phi tuyến tính phi đàn hồi PAAP [12] được sử dụng để phân tích kết cấu khung thép.

Trong nghiên cứu này, các tác giả tiến hành so sánh hiệu suất của 3 thuật toán Rao-1, Rao-2 và Rao-4. Thuật toán Rao-3 không được xem xét vì khi các biến thiết kế trong bài toán này đều nhận giá trị dương cho nên Rao-3 với Rao-2 là như nhau. Các thông số được sử dụng là: tổng số vòng tiến hóa tối đa = 4000 và số cá thể trong quần thể = 25.



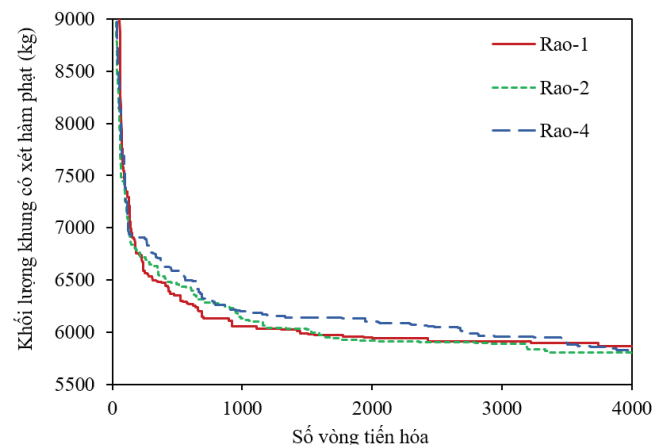
Hình 1. Khung thép 2 tầng.

Kết quả tối ưu hóa được trình bày trong bảng 1, trong đó, mỗi thuật toán tối ưu được chạy 10 lần nhằm giảm bớt ảnh hưởng của tính ngẫu nhiên trong thuật toán metaheuristic. Chúng ta có thể thấy rằng, kết quả tối ưu tốt nhất tìm được của thuật toán Rao-1 bằng 5741,30 (kg) là kém hơn so với Rao-2 (5641,10 kg) và Rao-4 (5606,30 kg). Tuy nhiên, khối lượng tối ưu kém nhất tìm được của thuật toán Rao-1 (6006,20 kg) lại tốt hơn so với của Rao-2 (6015,70 kg) và Rao-4 (6176,40 kg). Điều này cho thấy, kết quả của Rao-1 có tính ổn định tốt hơn so với Rao-2 và Rao-4. Điều này cũng được thể hiện qua độ lệch chuẩn của kết quả tối ưu tìm được của Rao-1 là tốt nhất trong 3 thuật toán.

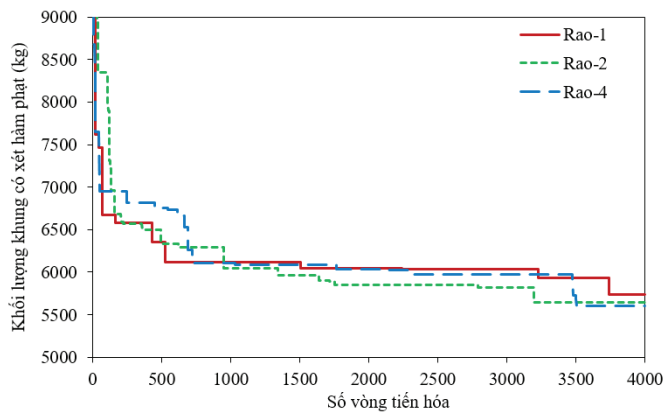
Bảng 1. Kết quả tính toán tối ưu kết cấu khung thép 2 tầng.

	Rao-1	Rao-2	Rao-4
Khối lượng thiết kế tối ưu tốt nhất tìm được (kg)	5741,30	5641,10	5606,30
Khối lượng thiết kế tối ưu kém nhất tìm được (kg)	6006,20	6015,70	6176,40
Khối lượng thiết kế tối ưu trung bình tìm được (kg)	5861,63	5804,17	5824,11
Độ lệch chuẩn khối lượng tối ưu tìm được (kg)	129,66	175,42	198,48
Thiết kế tối ưu tìm được	16x50,16x57,12x40,16x77,24x62,14x38,18x35,16x36	16x45,16x67,14x30,16x67,21x57,18x35,18x40,14x43	16x45,16x67,12x35,16x77,21x57,16x31,18x35,16x40

Hình 2 thể hiện đường cong hội tụ trung bình của các thuật toán tối ưu. Có thể thấy rằng, khi số vòng tiến hóa lớn (4000 vòng) kết quả thu được của 2 thuật toán Rao-2 và Rao-4 là tốt hơn so với Rao-1. Điều này phù hợp với phân tích kết quả tối ưu đã được trình bày. Tuy nhiên, một kết quả khá thú vị ở đây là khi số vòng tiến hóa là nhỏ (dưới 1500) thì kết quả trung bình thu được của Rao-1 lại tốt hơn đáng kể so với Rao-2 và Rao-4. Điều này cho thấy rằng, tốc độ hội tụ của thuật toán Rao-1 là tốt hơn so với Rao-2 và Rao-4. Hay nói cách khác, Rao-1 được ưu tiên sử dụng nếu như chúng ta sử dụng số vòng tiến hóa là nhỏ. Tuy nhiên, khi số vòng tiến hóa là lớn thì Rao-1 dễ bị mắc vào hội tụ cục bộ hơn Rao-2 và Rao-4, vậy nên, kết quả tối ưu tìm được của nó là kém hơn. Để minh họa thêm cho tính hội tụ của các thuật toán, hình 3 trình bày đường cong hội tụ tương ứng với các trường hợp các tối ưu tốt nhất tìm được. Ta cũng có thể nhận ra, trong trường hợp cụ thể này, tốc độ hội tụ của Rao-1 tốt hơn so với Rao-2 và Rao-4, nhưng bị hội tụ vào cực trị địa phương khi mà kết quả tối ưu tốt nhất không thay đổi ở một giai đoạn khá dài từ vòng tiến hóa 1500 đến 3300.



Hình 2. Đường cong hội tụ trung bình.



Hình 3. Đường cong hội tụ của thiết kế tối ưu tốt nhất tìm được.

Kết luận

Trong bài báo này, ứng dụng thuật toán Rao vào giải quyết bài toán tối ưu khung thép phi tuyến đã được trình bày. Bài toán tối ưu khung thép phi tuyến được thành lập dựa trên sử dụng phân tích phi tuyến tính phi đàn hồi, bao gồm hàm tối ưu là tổng khối lượng kết cấu, biến thiết kế là loại tiết diện của dầm cột và điều kiện ràng buộc gồm điều kiện ràng buộc về cấu tạo và điều kiện ràng buộc theo các tổ hợp tải trọng cường độ và sử dụng. Hiệu quả của ba kỹ thuật đột biến cơ bản của thuật toán Rao gồm Rao-1, Rao-2 và Rao-4 được phân tích đánh giá thông qua bài toán tối ưu khung thép không gian 2 tầng với 8 biến thiết kế. Kết quả thu được cho thấy, Rao-1 có tính ổn định tốt hơn, hội tụ nhanh hơn nhưng dễ mắc vào cực bộ địa phương hơn so với Rao-2 và Rao-4. Rao-4 cho khả năng tìm kiếm tối ưu toàn cục tốt hơn nhưng tính ổn định lại kém nhất. Do vậy, Rao-1 sẽ được ưu tiên sử dụng trong trường hợp các bài toán tối ưu có số vòng tiến hóa là nhỏ, còn Rao-2 và Rao-4 thì ưu tiên trong trường hợp số vòng tiến hóa là lớn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] V.H. Truong, S.E. Kim (2018a), "A robust method for optimization of semi-rigid steel frames subject to seismic loading", *Journal of Constructional Steel Research*, **145**, pp.184-195.

[2] H.M. Ha, Q.V. Vu, V.H. Truong (2020), "Optimization of nonlinear inelastic steel frames considering panel zones", *Advances in Engineering Software*, **142**, DOI: 10.1016/j.advengsoft.2020.102771.

[3] H.M. Ha, Q.A. Vu, V.H. Truong (2018), "Optimum design of stay cables of steel cable-stayed bridges using nonlinear inelastic analysis and genetic algorithm", *Structures*, **16**, pp.288-302.

[4] R.V. Rao (2020), "Rao algorithms: three metaphor-less simple algorithms for solving optimization problems", *International Journal of Industrial Engineering Computations*, **11**, pp.107-130.

[5] R.V. Rao, H.S. Keesari (2020), "Rao algorithms for multi-objective optimization of selected thermodynamic cycles", *Engineering with Computers*, DOI: 10.1007/s00366-020-01008-9.

[6] R.V. Rao, R.B. Pawar (2020a), "Self-adaptive multi-population Rao algorithms for engineering design optimization", *Applied Artificial Intelligence*, **34**(3), pp.197-250.

[7] R.V. Rao, R.B. Pawar (2020b), "Constrained design optimization of selected mechanical system components using Rao algorithms", *Applied Soft Computing*, **89**, DOI: 10.1016/j.asoc.2020.106141.

[8] V.H. Truong, S.E. Kim (2017), "An efficient method for reliability-based design optimization of nonlinear inelastic steel space frames", *Struct. Multidisc. Optim.*, **56**(2), pp.331-351.

[9] V.H. Truong, H.M. Hung, P.H. Anh, T.D. Hoc (2020), "Optimization of steel moment frames with panel-zone design using an adaptive differential evolution", *Journal of Science and Technology in Civil Engineering*, **14**(2), pp.65-75.

[10] V.H. Truong, S.E. Kim (2018b), "Reliability-based design optimization of nonlinear inelastic trusses using improved differential evolution algorithm", *Advances in Engineering Software*, **121**, pp.59-74.

[11] AISC-LRFD (1999), "Manual of steel construction - load and resistance factor design", *Chicago (IL): American Institute of Steel Construction*.

[12] H.T. Thai, S.E. Kim (2009), "Practical advanced analysis software for nonlinear inelastic analysis of space steel structures", *Advances in Engineering Software*, **40**(9), pp.786-797.