

MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA PHẦN MỀM MACAULAY 2 GIÚP NÂNG CAO CHẤT LƯỢNG DẠY HỌC TOÁN VÀ NGHIÊN CỨU KHOA HỌC Ở TRƯỜNG ĐẠI HỌC THỦ ĐÔ HÀ NỘI

Đồng Hữu Mậu

Trường Đại học Thủ đô Hà Nội

Tóm tắt: Trong bài báo này tôi sẽ chỉ ra một số ứng dụng của phần mềm Macaulay 2 trong việc nâng cao hiệu quả dạy học các học phần liên quan đến đại số hay lý thuyết đồ thị ở trường Đại học Thủ đô Hà Nội, và một số chức năng của phần mềm phục vụ cho nghiên cứu khoa học mà các giảng viên ở trường Đại học Thủ đô Hà Nội có thể áp dụng.

Từ khóa: Phần mềm Macaulay 2, dạy học đại số, lý thuyết đồ thị, phần mềm hỗ trợ dạy học, nghiên cứu khoa học với Macaulay 2.

Nhận bài ngày 19.5.2023; gửi phản biện, chỉnh sửa và duyệt đăng ngày 24.7.2023

Liên hệ tác giả: Đồng Hữu Mậu; Email: dhmau@hnmu.edu.vn

1. MỞ ĐẦU

Phần mềm Macaulay 2 (viết tắt là M2) là một hệ thống phần mềm mã nguồn mở (miễn phí) được thiết kế cho hình học đại số và tính toán đại số giao hoán, được sáng tạo bởi Quỹ Khoa học Quốc gia từ năm 1992. Nó đã trở thành một công cụ quan trọng cho các nhà toán học, nhà giáo dục và nhà nghiên cứu trong lĩnh vực hình học đại số và đã ảnh hưởng tích cực đến việc giảng dạy toán học. Macaulay 2 cho phép người dùng trực quan hóa các cấu trúc đại số phức tạp, các yếu tố trong lý thuyết đồ thị giúp sinh viên hiểu rõ hơn và nắm bắt các khái niệm toán học trừu tượng và lý thuyết đồ thị. Macaulay 2 có thể thực hiện các phép tính phức tạp một cách nhanh chóng và hiệu quả, cho phép sinh viên khám phá các khái niệm toán học theo cách tương tác và năng động hơn. Ngày nay, Macaulay 2 đã được sử dụng trong nhiều dự án nghiên cứu về đại số hình học và các lĩnh vực liên quan. Một điều quan trọng không kém khác, Macaulay 2 được cung cấp miễn phí và dễ cài đặt, giúp nhiều sinh viên và nhà giáo dục có thể truy cập được, thậm chí có thể sử dụng trực tiếp trên trang web chính của nhà sản xuất ([5]).

Qua nhiều năm dạy học toán ở trường Đại học Thủ đô Hà Nội, tôi nhận thấy các giảng viên giảng dạy toán học rất tích cực trong việc sử dụng các phần mềm trong dạy học để tăng tính trực quan, nâng cao hiệu quả giảng dạy, các phần mềm phổ biến như phần mềm Maple, phần mềm Matlab, phần mềm R,... Tuy nhiên, phần mềm Macaulay 2 lại chưa được sử dụng. Trong bài báo này, tôi sẽ trình bày một số cách sử dụng phần mềm Macaulay 2 trong việc nâng cao hiệu quả dạy học các học phần liên quan đến đại số và lý thuyết đồ thị và nghiên cứu khoa học theo hướng hình học, đại số và lý thuyết đồ thị ở trường Đại học Thủ đô Hà Nội. Các chức năng

của phần mềm Macaulay 2 rất đa dạng, nên tôi chỉ đưa ra một số ví dụ có tính đặc trưng minh họa cho nội dung bài báo hướng tới.

2. NỘI DUNG

Trước tiên, chúng ta cùng tìm hiểu ứng dụng của phần mềm Macaulay 2 trong dạy học nội dung lý thuyết đồ thị.

2.1. Sử dụng phần mềm Macaulay 2 trong dạy học lý thuyết đồ thị

Lý thuyết đồ thị là nội dung rất quan trọng cho sinh viên các ngành công nghệ thông tin và toán học. Trong chương trình đào tạo của các ngành của trường Đại học Thủ đô Hà Nội, lý thuyết đồ thị là nội dung quan trọng trong học phần *Toán rời rạc* của hai ngành *Công nghệ thông tin* và *Toán ứng dụng*. Phần mềm Macaulay 2 rất hữu hiệu trong việc hỗ trợ cho giáo viên giảng dạy nội dung này. Giảng viên có thể sử dụng phần mềm này để giúp sinh viên hiểu rõ hơn các khái niệm như ma trận kề, đồ thị hai phần, đồ thị liên thông, thành phần liên thông,... thông qua việc cho sinh viên lấy ví dụ, làm bài tập và dùng phần mềm Macaulay 2 để kiểm tra kết quả và tăng tính trực quan. Để sử dụng được các tính năng cho lý thuyết đồ thị chúng ta cần sử dụng gói “EdgeIdeals.m2”. Dưới đây là một số lệnh hay dùng trong lý thuyết đồ thị:

Cài đặt gói EdgeIdeals.m2:

```
i1 : installPackage "EdgeIdeals"
```

```
o1 = EdgeIdeals
```

```
o1 : Package
```

Tạo một đồ thị với tập cạnh $\{\{a,b\}, \{b,c\}, \{c,d\}, \{d,a\}, \{e,c\}\}$, tập đỉnh $\{a, b, c, d, e, f\}$:

```
i2 : R=QQ[a,b,c,d,e,f]
```

```
o2 = R
```

```
o2 : PolynomialRing
```

```
i3 : E={{a,b},{b,c},{c,d},{d,a},{e,c}}
```

```
o3 = {{a, b}, {b, c}, {c, d}, {d, a}, {e, c}}
```

```
o3 : List
```

```
i4 : G=graph(R,E)
```

```
o4 = Graph{edges  $\Rightarrow$   $\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, d\}, \{e, c\}\}$ ,
```

```
ring  $\Rightarrow$  R, vertices  $\Rightarrow$   $\{a, b, c, d, e, f\}$ }
```

```
o4 : Graph
```

Ma trận kề của đồ thị G:

i5 : adjacencyMatrix(G)

$$\mathbf{o5} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

o5 : Matrix $\mathbb{Z}^6 \leftarrow \mathbb{Z}^6$

Một số lệnh kiểm tra:

Kiểm tra xem đồ thị có là hai phần không	Kiểm tra xem đồ thị có là rừng không	Kiểm tra xem đỉnh f có là đỉnh treo không
i6 : isBipartite(G) o6 = true	i7 : isForest(G) o7 = false	i8 : isLeaf(G,f) o8 = false

Một số lệnh tìm kiếm, xác định:

Tìm đỉnh cô lập của G	Tìm đỉnh kề với đỉnh c trong G
i10 : isolatedVertices(G) o10 = {f} o10 : List	i11 : neighbors(G,c) o11 = {b, d, e} o11 : List
Số thành phần liên thông trong G	Tìm số tam giác trong đồ thị G
i13 : numConnectedGraphComponents(G) o13 = 2	i12 : numTriangles(G) o12 = 0

2.2. Sử dụng phần mềm Macaulay 2 trong dạy học các cấu trúc đại số

Nội dung cấu trúc đại số nằm trong học phần *Đại số đại cương* của chương trình đào tạo ngành *Sư phạm Toán học, Toán ứng dụng*. Đây là phần kiến thức nền cho chuyên ngành đại số nhưng với người học nói chung và sinh viên trường Đại học Thủ đô Hà Nội nói riêng lại luôn cảm nhận nội dung này rất trừu tượng, có tính tổng quát cao. Nguyên nhân của vấn đề này, một mặt là phần lớn nội dung môn học đều là lý thuyết, bài tập tính toán rất ít. Mặt khác, các khái niệm liên kết chặt chẽ, xây dựng theo dạng bậc thang. Để cải thiện, nâng cao chất lượng dạy học nội dung này người dạy có thể sử dụng phần mềm Macaulay 2 để tạo ra những ví dụ cụ thể, minh chứng cho một định lý hay khái niệm. Ta lấy việc dạy học khái niệm *idêan* trong một vành làm ví dụ, sau khi dạy phần lý thuyết xong, giảng viên có thể lấy ví dụ về các *idêan* sinh bởi hữu hạn phần tử trong vành đa thức trên trường $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ hay $\mathbb{C}$, để người học dễ

hiểu về ideal và các phép toán trên ideal. Trong vành đa thức $\mathbb{Q}[x, y, z]$, với ideal $I = (x, y^2) = \{a \cdot x + b \cdot y^2 \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$; $J = (x^2, y) = \{c \cdot x^2 + d \cdot y \mid c, d \in \mathbb{Q}\}$ ta có:

$$I + J = \{f + g \mid f \in I, g \in J\} = \{a \cdot x + b \cdot y^2 + c \cdot x^2 + d \cdot y \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\} = (x, y^2, x^2, y).$$

Bằng việc sử dụng phần mềm Macaulay 2 giảng viên giúp sinh viên kiểm tra được kết quả thực hiện của sinh viên có đúng hơn, tạo thêm niềm tin, hứng thú cho sinh viên khi học học phần được cho là trừu tượng này. Dưới đây là một số lệnh thông dụng trong Macaulay 2 về ideal.

Tạo vành đa thức và các ideal:

Tạo vành đa thức 3 biến x, y, z trên $\mathbb{Q}$	Tạo ideal I sinh bởi hai phần tử x, y^2	Tạo ideal J sinh bởi hai phần tử x, y^2
<code>i1 : R=QQ[x,y,z]</code>	<code>i2 : I = ideal (x, y^2)</code>	<code>i3 : J = ideal (x^2, y)</code>
<code>o1 = R</code>	<code>o2 = ideal (x, y^2)</code>	<code>o3 = ideal (x^2, y)</code>
<code>o1 : PolynomialRing</code>	<code>o2 : Ideal of R</code>	<code>o3 : Ideal of R</code>

Tổng và tích các ideal:

<code>i4 : K=I+J</code>	<code>i5 : G=I*J</code>
<code>o4 = ideal (x, y^2, x^2, y)</code>	<code>o5 = ideal (x^3, xy, x^2y^2, y^3)</code>
<code>o4 : Ideal of R</code>	<code>o5 : Ideal of R</code>

Lũy thừa của ideal, giao của hai ideal, kiểm tra tính nguyên tố của một ideal:

<code>i6 : I^2</code>	<code>i7 : intersect(I,J)</code>	<code>i8 : isPrime I</code>
<code>o6 = ideal (x^2, xy^2, y^4)</code>	<code>o7 = ideal (y^2, xy, x^2)</code>	<code>o8 = false</code>
<code>o6 : Ideal of R</code>	<code>o7 : Ideal of R</code>	

2.3.Sử dụng phần mềm Macaulay 2 trong dạy học Đại số tuyến tính

Phần mềm Macaulay 2 cũng có thể hỗ trợ các giảng viên trong việc dạy học học phần đại số tuyến tính với các chức năng liên quan đến các tính toán trên ma trận như tính tổng, tích các ma trận, tính định thức ma trận hay tìm ma trận nghịch đảo của một ma trận, cũng như giải hệ phương trình tuyến tính...

Tạo ma trận A:

`i1 : A=matrix{{1,-2,3},{1,4,-5},{2,0,5}}`

$$o1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -5 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

`o1 : Matrix  $\mathbb{Z}^3 \leftarrow \mathbb{Z}^3$`

Tạo ma trận B:

i2 : B=matrix{{0.2,3,0.5},{3,2/5,5},{-2,3,7}}

$$\underline{o2} = \begin{pmatrix} .2 & 3 & .5 \\ 3 & .4 & 5 \\ -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

o2 : Matrix $\mathbb{R}_{53}^3 \leftarrow \mathbb{R}_{53}^3$

Tổng và hiệu hai ma trận:

i3 : A+B $\underline{o3} = \begin{pmatrix} 1.2 & 1 & 3.5 \\ 4 & 4.4 & 0 \\ 0 & 3 & 12 \end{pmatrix}$ o3 : Matrix $\mathbb{R}_{53}^3 \leftarrow \mathbb{R}_{53}^3$	i4 : A-B $\underline{o4} = \begin{pmatrix} .8 & -5 & 2.5 \\ -2 & 3.6 & -10 \\ 4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ o4 : Matrix $\mathbb{R}_{53}^3 \leftarrow \mathbb{R}_{53}^3$
--	--

Nhân hai ma trận, nhân một số với một ma trận:

i8 : A*B $\underline{o8} = \begin{pmatrix} -11.8 & 11.2 & 11.5 \\ 22.2 & -10.4 & -14.5 \\ -9.6 & 21 & 36 \end{pmatrix}$ o8 : Matrix $\mathbb{R}_{53}^3 \leftarrow \mathbb{R}_{53}^3$	i10 : -7*A $\underline{o10} = \begin{pmatrix} -7 & 14 & -21 \\ -7 & -28 & 35 \\ -14 & 0 & -35 \end{pmatrix}$ o10 : Matrix $\mathbb{Z}^3 \leftarrow \mathbb{Z}^3$
---	---

Tính định thức, tìm ma trận nghịch đảo:

i5 : det A o5 = 26	i12 : inverse B $\underline{o12} = \begin{pmatrix} .134747 & .215374 & -.163464 \\ .34239 & -.0265076 & -.00552242 \\ -.108239 & .072896 & .09852 \end{pmatrix}$ o12 : Matrix $\mathbb{R}_{53}^3 \leftarrow \mathbb{R}_{53}^3$
--	---

Để giải hệ phương trình tuyến tính $A.x = b$ (*). Ta nhập ma trận A và b, sau đó dùng câu lệnh $x = solve(A, b)$ ta được nghiệm của hệ (*). Chẳng hạn, để giải hệ:

$$\begin{cases} x + 3y - z + t = -2 \\ x - y + z + 2t = 4 \\ 2x - 4y - 3z - 3t = 5 \\ 2x - y - z + 3t = 7 \end{cases}, \text{ ta thực hiện như sau:}$$

Nhập ma trận hệ số:

i16 : A=matrix{{1,3,-1,1},{1,-1,1,2},{2,-4,-3,-3},{2,-1,-1,3}}

$$\text{o16} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & -3 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

o16 : Matrix $\mathbb{Z}^4 \leftarrow \mathbb{Z}^4$

Nhập ma trận tự do:	Nhập lệnh giải hệ:
<u>i18</u> : b=matrix{{-2},{4},{5},{7}} $\text{o18} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ <u>o18</u> : Matrix $\mathbb{Z}^4 \leftarrow \mathbb{Z}^1$	<u>i19</u> : x=solve(A,b) $\text{o19} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ <u>o19</u> : Matrix $\mathbb{Z}^4 \leftarrow \mathbb{Z}^1$

2.4. Sử dụng phần mềm Macaulay 2 trong nghiên cứu khoa học

Phần mềm Macaulay 2 được sử dụng rất nhiều trong việc hỗ trợ các nhà khoa học nghiên cứu về đại số nói chung, lý thuyết đồ thị nói riêng. Macaulay 2 giúp các nhà khoa học giảm bớt các khâu tính toán phức tạp, giúp nhà khoa học kiểm chứng các nghiên cứu đạt được và dự đoán kết quả nghiên cứu.

Khi nghiên cứu về ideal hay môđun trong vành đa thức, phần mềm Macaulay 2 giúp các nhà khoa học dễ dàng tính được bao đóng nguyên của một ideal, dải tự do phân bậc tối tiểu, bảng Betti, chỉ số chính quy, chiều xạ ảnh, chuỗi Hilbert, phân tích nguyên sơ, tập các ideal nguyên tố liên kết, chiều Krull hay kiểm tra một ideal có là ideal nguyên tố, ideal nguyên sơ, ideal đơn thức, ideal Cohen-Macaulay hay không,...

Dưới đây là một số lệnh minh họa trong Macaulay 2, trước tiên ta tạo vành đa thức với một ideal:

i2 : R=QQ[x,y,z]

o2 = R

o2 : PolynomialRing

i3 : I=ideal(x+y+z-3,2*x+y-z-6,3*x-4*y-2*z+7)

o3 = ideal(x + y + z - 3, 2x + y - z - 6, 3x - 4y - 2z + 7)

o3 : Ideal of R

Các phần tử sinh của cơ sở Grobner	Căn của idêan I
<u>i4</u> : gens gb I	<u>i5</u> : radical I
<u>o4</u> = $(z + 1 \ y - 3 \ x - 1)$	<u>o5</u> = $\text{ideal}(z + 1, y - 3, x - 1)$
<u>o4</u> : Matrix $R^1 \leftarrow R^3$	<u>o5</u> : Ideal of R

Bao đóng nguyên của lũy thừa một idêan:

i6 : integralClosure(I,3)
o6 = $\text{ideal}(z^3 + 3z^2 + 3z + 1, yz^2 + 2yz - 3z^2 + y - 6z - 3,$
 $xz^2 + 2xz - z^2 + x - 2z - 1, y^2z + y^2 - 6yz - 6y + 9z + 9,$
 $xyz + xy - 3xz - yz - 3x - y + 3z + 3, x^2z + x^2 - 2xz - 2x + z + 1,$
 $y^3 - 9y^2 + 27y - 27, xy^2 - 6xy - y^2 + 9x + 6y - 9,$
 $x^2y - 3x^2 - 2xy + 6x + y - 3, x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$
o6 : Ideal of R

Dãi tự do của môđun I:

i15 : G=res module I
o15 = $R^3 \xleftarrow{\begin{pmatrix} -2x - y + z + 6 & -3x - 7y + z + 25 & 11y + z - 32 \\ x + y + z - 3 & 7y + 5z - 16 & -7y - 5z + 16 \\ 0 & x - 2z - 3 & y + 3z \end{pmatrix}} R^3$
 $\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$
 $\qquad \qquad \qquad \begin{pmatrix} 7y + 5z - 16 \\ -y - 3z \\ x - 2z - 3 \end{pmatrix} \xleftarrow{\qquad} R^1 \xleftarrow{0} 0$
 $\qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$
o15 : ChainComplex

Kiểm tra I có là idêan nguyên sơ không	Kiểm tra I có là idêan đơn thức không	Tính chiều Krull của môđun $\frac{R}{I}$
<u>i7</u> : isPrimary I <u>o7</u> = true	<u>i8</u> : isMonomialIdeal I <u>o8</u> = false	<u>i9</u> : $\dim(R/I)$ <u>o9</u> = 0
Chiều xạ ảnh của môđun R/I	Bảng Betti của giải tự do của I	Chỉ số chính quy của I

i12 : pdim(R ¹ /I)	i14 : betti res I	i13 : regularity I
o12 = 3	$ \begin{array}{cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \text{total:} & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0: & 1 & 3 & 3 & 1 \end{array} $	o13 = 1
	o14 : BettiTally	

Tập các ideal nguyên tố liên kết với I	Tập ideal trong phân tích nguyên sơ của I
i10 : associatedPrimes I	i11 : primaryDecomposition I
o10 = {ideal($z + 1, y - 3, x - 1$)}	o11 = {ideal($z + 1, y - 3, x - 1$)}
o10 : List	o11 : List

Một hướng nghiên cứu đang rất phổ biến đó là sự kết hợp giữa đại số và lý thuyết đồ thị, đặc biệt các nghiên cứu tính chất của các khái niệm liên quan đến các ideal được xây dựng từ đồ thị như ideal cạnh, ideal phủ và các tính chất của đồ thị cũng được nghiên cứu sâu hơn (xem thêm [1]). Dưới đây là một số lệnh minh họa cho ứng dụng Macaulay 2 trong nghiên cứu các vấn đề liên quan đến lý thuyết đồ thị.

Tạo một siêu đồ thị:

```
o1 = EdgeIdeals
```

```
o1 : Package
```

```
i2 : R = QQ[w,x,y,z]
```

```
o2 = R
```

```
o2 : PolynomialRing
```

```
i3 : H = hyperGraph(R, {{w,x},{w,y,z},{x,y,z}})
```

```
o3 = HyperGraph{edges => {{w, x}, {w, y, z}, {x, y, z}},
ring => R, vertices => {w, x, y, z}}
```

```
o3 : HyperGraph
```

Ideal phủ của siêu đồ thị H:

```
i5 : coverIdeal(H)
```

```
o5 = monomialIdeal(w x, w y, x y, w z, x z)
```

```
o5 : MonomialIdeal of R
```

Ideal cạnh của siêu đồ thị H:

1. Adam Van Tuyl (2011). *A beginner's guide to edge and cover ideals*.
2. David Eisenbud, Daniel R. Grayson, Michael E. Stillman, and Bernd Sturmfels, Springer Berlin, Heidelberg (2011). *Computations in Algebraic Geometry with Macaulay 2*.
3. Hal Schenck, Cambridge University Press (2003). *Computational algebraic geometry*.
4. Kenneth H. Rosen, Monmouth University (2012). *Discrete Mathematics and Its Applications (Seventh Edition)*.

**SOME APPLICATIONS OF MACAULAY 2 SOFTWARE TO IMPROVE
THE QUALITY OF TEACHING MATHEMATICS AND SCIENTIFIC
RESEARCH AT HANOI METROPOLITAN UNIVERSITY**

***Abstract:** In this article, I will show some applications of Macaulay 2 software in improving the teaching efficiency of courses related to algebra or graph theory at Hanoi Metropolitan University, and Some functions of the software for scientific research can be applied by the lecturers.*

***Keywords:** Macaulay 2 software, algebra teaching, graph theory, teaching support software, scientific research with Macaulay 2.*