ĐẠI LƯỢNG BIẾN THIÊN TRONG TOÁN HỌC VÀ Ý NGHĨA CỦA NÓ TRONG NHẬN THỨC KHOA HỌC

LÊ VĂN ĐOÁN (*)

Tóm tắt: *Trong toán học, các đại lượng biến thiên và các đại lượng bất biến luôn có mối quan hệ hữu cơ, mật thiết trên nền tảng là sự thống nhất giữa hai mặt đối lập: biến thiên và bất biến. Các đại lượng biến thiên xuất hiện trước hết là do nhu cầu của toán học, nhưng suy cho cùng, cũng là do nhu cầu thực tiễn. Chúng được sử dụng để nghiên cứu sự chuyển động của các vật thể, xem xét các phép biến hình,... Với vai trò đó, chúng đã trở thành công cụ thuận lợi cho việc giải quyết những vấn đề có liên quan đến thực tiễn do các khoa học đặt ra và là bằng chứng chứng minh tính hiện thực của khoa học toán học trừu tượng.*

Trong triết học mácxít, vận động và đứng yên luôn có mối quan hệ biện chứng sâu sắc. Mối quan hệ này đã được thể hiện trong tất cả các lĩnh vực tự nhiên, xã hội và tư duy của con người, kể cả trong lĩnh vực toán học.

Từ lập trường của chủ nghĩa duy vật biện chứng, chúng ta nhận thấy rằng, trong toán học, những đại lượng biến thiên luôn có mối quan hệ mật thiết với những đại lượng bất biến. Đó là mối quan hệ hữu cơ, gắn bó, không thể tách rời nhau, nếu thiếu mối quan hệ đó thì toán học không còn ý nghĩa thực tiễn và không thể phát triển được. Những đại lượng biến thiên trong toán học là rất đa dạng và phong phú. Sự phong phú và đa dạng đó dựa trên nền tảng là sự thống nhất giữa hai mặt đối lập: biến thiên và bất biến.

Chẳng hạn, phương trình bậc hai $ax^2 + bc + c = 0$, ($a \neq 0$) với những giá trị a, b, c bất kỳ, chúng ta có thể nhận được rất nhiều phương trình cụ thể khác nhau, nhưng có một cái không biến đổi - đó là công thức để tính nghiệm tổng quát:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Tương tự như vậy, trong hình học có rất nhiều tam giác vuông với cạnh huyền là c và hai cạnh góc vuông a, b, nhưng có cái không biến đổi - đó là công thức tổng quát xác định mối quan hệ giữa a, b, c: $a^2 + b^2 = c^2$.

Những đại lượng biến thiên trong toán học xuất hiện trước hết là do nhu cầu của chính bản thân toán học, nhưng suy cho cùng, sự xuất hiện của chúng là do nhu cầu thực tiễn quyết định. Như chúng ta đã biết, vào thế kỷ thứ XVII, lịch sử toán học đã được đánh dấu bởi một bước ngoặt rất lớn. Thời kỳ Phục hưng ở châu Âu đã giải phóng xã hội khỏi sự kìm kẹp của đêm trường trung cổ, mở đường cho khoa học phát triển. Trong thời kỳ này, nhu cầu cơ giới hoá nền sản xuất xã hội đã thúc đẩy cơ học và vật lý học phát triển mạnh mẽ. Những vấn đề như vận tốc, gia tốc tức thời cộng thêm phương pháp toạ độ của Đềcáctơ đã làm nảy sinh và phát triển mạnh mẽ phép tính vi phân và tích phân. Theo đánh giá của Ph.Ăngghen: "*Vận động và biện chứng* đã đi vào toán học"(1). Trọng tâm của toán học hướng vào việc

(*) Giảng viên triết học, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội.

(1) C.Mác và Ph.Ăngghen. *Toàn tập*, t.20. Nxb Chính trị Quốc gia, Hà Nội, 1995, tr.756.

nghiên cứu sự biến thiên của các hàm số theo các biến số, sự nghiên cứu đạo hàm rồi nguyên hàm và tích phân. Những bài toán về cơ học và vật lý học đã làm nảy sinh vấn đề tìm các hàm số chưa biết dựa trên mối liên hệ giữa các hàm đó và đạo hàm của chúng do các định luật cơ học và vật lý học cung cấp.

Trong thực tế, khi nghiên cứu chuyển động của một vật, bắt buộc phải nghiên cứu mối quan hệ giữa vị trí của vật đó và thời gian diễn ra vận động, tức là giữa không gian và thời gian. Ở đây, cái đặc trưng cho mối quan hệ này chính là sự tăng hay giảm tốc độ của sự vật được nghiên cứu. Toán học đã nghiên cứu các mối quan hệ đó và biểu diễn chúng dưới dạng các phương trình của chuyển động. Trước đó, trong toán học thời kỳ Hy Lạp cổ đại và trong đại số học, người ta luôn cho rằng, trong một chuyển động, khi ta biết được vận tốc thì quãng đường đi được bao giờ cũng tỉ lệ với thời gian đi. Nhưng, điều khẳng định trên chỉ đúng đối với những vật chuyển động đều, vì chỉ có chuyển động đều thì vận tốc mới luôn không đổi. Đó là một thứ chuyển động cực kỳ lý tưởng, bởi trong thực tế không có vật thể nào chuyển động đều cả, chuyển động bao giờ cũng có vận tốc thay đổi. Như vậy, vấn đề đặt ra là làm sao đo được vận tốc tức thời ở từng thời điểm. Để giải quyết vấn đề này, người ta đã sử dụng những đại lượng biến thiên trong toán học để xác định vận tốc của một chuyển động ở những thời điểm cần thiết. Ví dụ, ta xét một chuyển động biến đổi theo phương trình $S = f(t)$, trong đó S: quãng đường đi, t: thời gian. Để tính vận tốc của chuyển động trên ở một thời điểm t nào đó, người ta giả sử cộng thêm vào thời gian $t + \Delta t$. Giả sử đoạn đường đi được của vật chuyển động trong thời gian Δt là ΔS. Khi đó, ta có:

$$S + \Delta S = f(t + \Delta t) \Leftrightarrow \Delta S = f(t + \Delta t) - f(t)$$

Nếu như Δt càng nhỏ thì ΔS càng nhỏ và vận tốc trung bình trong đoạn rất bé này được xem như không biến đổi và chính là $\frac{\Delta S}{\Delta t}$. Điều đó đã dẫn tới một thực tế là, khi tìm vận tốc của một chuyển động biến đổi ở một thời điểm t nào đó, ta thấy Δt càng nhỏ thì vận tốc trung bình trên đoạn ΔS càng gần với vận tốc ở thời điểm cần tìm. Nếu gọi vận tốc ở thời điểm t là v_t, ta có:

$$v_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Một khi chúng ta đã đưa ra khái niệm vận tốc tức thời của một chuyển động thì rất có thể là ở các thời điểm khác nhau, vận tốc sẽ khác nhau.

Trong toán học, người ta gọi khái niệm $\Delta t \to 0$ là vô cùng bé. Khái niệm vô cùng bé là một trong những khái niệm quan trọng về đại lượng biến thiên trong toán học. Khái niệm này đã có quá trình lịch sử hình thành và gây ra không ít tranh cãi. Trước đây đã có thời kỳ người ta quan niệm vô cùng bé là một số lớn hơn không và nhỏ hơn một số dương hữu hạn bất kỳ nào đó. Chính quan niệm này đã dẫn tới một loạt các mâu thuẫn liên quan đến vô hạn thực tại và là nguyên nhân của cuộc khủng hoảng cơ sở toán học vào thế kỷ XVII. Trên thực tế, vô cùng bé có lúc phải xem như bằng không, điều đó cũng có nghĩa là phải quan niệm nó như một quá trình, là một đại lượng biến thiên chứ không phải là một con số, không phải là một đại lượng tĩnh tại. Chỉ có trên cơ sở quan niệm như vậy thì việc vận dụng vô cùng bé mới giải quyết được những bài toán thực tiễn và mới chứng minh được nhiều định lý quan trọng trong giải tích học. Đây là một vấn đề có ý nghĩa rất lớn không chỉ đối với sự phát triển của toán học, mà còn với cả triết học. Trong *Biện chứng của tự nhiên,* Ph.Ăngghen đã viết: "Trong tất cả những thành tựu lý luận, chưa chắc đã có một thành tựu nào được mọi người xem là thắng lợi tối cao của trí óc con người như sự phát minh ra phép tính các đại lượng vô cùng nhỏ vào nửa cuối thế kỷ XVII. Nếu như chúng ta đã gặp ở một nơi nào đó, một thành tích thuần túy và hoàn toàn riêng của trí não con người, thì nơi đó chính là ở đây. Cái bí mật cho đến nay vẫn còn bao trùm những đại lượng được sử dụng trong phép tính các đại lượng vô cùng nhỏ - các vi phân và những cái vô cùng nhỏ ở những bậc khác nhau - là bằng chứng tốt nhất về tình trạng vẫn còn lưu hành cái ảo tưởng cho rằng ở đây, thuần túy chỉ có "những sự sáng tạo tự do và những sản phẩm của sự tưởng tượng" của trí não con người, không phù hợp với thế giới khách quan. Thế nhưng ngược lại như vậy mới đúng. Giới tự nhiên cung cấp những nguyên hình của tất cả những đại lượng tưởng tượng đó"(2).

Những đại lượng biến thiên trong toán học đã được sử dụng để nghiên cứu sự chuyển động của các vật thể. Để thực hiện được điều đó, người ta đã đề cập đến hàng loạt vấn đề như vận động, tính liên tục và giới hạn, để rồi từ đó đi đến khái niệm về đạo hàm của hàm số. Lý thuyết giới hạn là một bộ phận quan trọng trong giải tích học; nó đã sử dụng những đại lượng biến thiên để rút ra những kết luận có ý nghĩa thực tiễn rất lớn. Trên cơ sở khái niệm về đạo hàm của một hàm số, chúng ta có thể xác định được vận tốc và gia tốc của một chuyển động biến đổi ở những thời điểm nhất định. Để minh chứng cho nhận định trên, chúng ta hãy trở lại ví dụ về tìm vận tốc tức thời của một chuyển động. Trong ví dụ đó, nếu ta gọi y là quãng đường đi, x là thời gian chuyển động, thì khi đó, giới hạn của tỷ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ khi $\Delta x \to 0$ là vận tốc tức thời của chuyển động và người ta gọi giới hạn trên là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ theo biến số x. Nếu chúng ta lấy đạo hàm một lần nữa, tức là đạo hàm của vận tốc theo thời gian, thì ta sẽ được gia tốc của chuyển động. Trong cơ học cổ điển, thông thường người ta chỉ dùng đến đạo hàm bậc hai để xác định gia tốc thôi.

Như chúng ta đã biết, công thức của định luật Niutơn về lực là $F = m.a$, trong đó F: lực tác dụng vào vật; m: khối lượng của vật; a: gia tốc của vật.

Ở đây, nếu gia tốc a là đạo hàm bậc hai của quãng đường theo thời gian thì tất cả mọi loại chuyển động, mọi phương trình biểu diễn chuyển động của cơ học cổ điển đều có thể đưa về vận dụng quy luật quan hệ giữa lực và gia tốc của chuyển động. Từ luận điểm trên, trong thực tế, muốn xác định vị trí của một con tàu vũ trụ thì chúng ta phải xác định xem trong không trung có những lực nào tác động lên con tàu để từ đó, dựa vào phương trình $F = m.a$, ta tính được gia tốc của nó. Từ chỗ biết được gia tốc, lại biết được vận tốc ban đầu v_0, ta sẽ tính được vận tốc con tàu ở thời điểm xác định theo công thức: $v_t = v_0 + at$.

Trên cơ sở đó, ta xác định được vị trí của con tàu ở thời điểm t theo một hàm số thời gian. Vị trí đó là một tọa độ nào đó trong không gian ba chiều.

Nói chung, đối với các loại vận động thông thường trong đời sống hàng ngày của chúng ta, thì chỉ cần những định luật của cơ học cổ điển là có thể giải thích được. Nhưng, nếu từ cơ sở toán học để xem xét quá trình thực hiện các phép toán dựa trên các khái niệm về giới hạn, liên tục và đạo hàm mà nền tảng của chúng là căn cứ vào những đại lượng biến thiên, thì về mặt hình thức, tưởng chừng như là vô lý.

Ph.Ăngghen đã từng nói: "Một khi các nhà toán học đã rút lui vào trong sự trừu tượng, cái thành lũy bất khả xâm phạm của họ, tức là vào trong cái mà người ta gọi là toán học thuần túy thì lập tức tất cả những điều tương tự như thế đều bị lãng quên đi, cái vô hạn đã trở thành một cái gì hoàn toàn thần bí và cách mà người ta

(2) C.Mác và Ph.Ăngghen. *Sđd*., tr.768.

dùng nó trong giải tích cũng trở thành một cái gì hoàn toàn khó hiểu, mâu thuẫn với mọi kinh nghiệm và mọi tri thức. Những điều điên rồ và vô lý mà những nhà toán học họ dùng để bào chữa chứ không phải để giải thích cái phương pháp ấy của họ, - phương pháp, lạ thay, lại luôn luôn đưa đến những kết quả đúng đắn - đều vượt xa những điều không tưởng, ảo và thực, hết sức tồi của triết học của tự nhiên (của Hêghen chẳng hạn), những điều tưởng tượng mà các nhà toán học và các nhà khoa học tự nhiên không có đủ lời để nói lên nỗi kinh sợ của họ đối với chúng"(3).

Vì sao trong toán học lại có sự vận dụng những lý luận không lôgíc hình thức mà lại đưa đến những kết quả kỳ diệu. Bản thân Ph.Ăngghen đã nhiều lần xem đó là sự xâm nhập của phương pháp biện chứng vào toán học. Chính tư tưởng này đã dẫn tới lập luận: Trong cùng một quá trình, một đại lượng có thể bằng 0, có thể khác 0. Ph.Ăngghen đã mở rộng quan điểm trên của mình và đi đến nhiều cách giải thích có ý nghĩa biện chứng đối với các hiện tượng trong toán học. Tư tưởng đó đã được thể hiện rất rõ ràng, khi ông nhận xét về bản chất của phép tính vi phân: "Quan hệ biện chứng cũng đã có trong phép tính vi phân, ở đó dx là vô cùng bé, nhưng lại có tác dụng và tạo ra mọi cái"(4). Đồng thời, để khẳng định ý nghĩa triết học của phép vi phân, Ăngghen đã nhấn mạnh: "Chỉ có phép tính vi phân mới đem lại cho khoa học tự nhiên khả năng miêu tả bằng toán học không những chỉ những trạng thái, mà cả những quá trình: vận động"(5). Về thực chất, đó cũng chính là ý nghĩa triết học của những đại lượng biến thiên trong toán học.

Theo đánh giá của Ph.Ăngghen, C.Mác là người rất am hiểu toán học. Ông đã quan tâm, nghiên cứu các nguyên tắc lập luận của phép tính vi phân. Lần đầu tiên, C.Mác đã đưa ra tư tưởng về lập luận đạo hàm của một hàm số trên cơ sở biện chứng. Điều này hoàn toàn đối lập với những nhà toán học đương thời, đồng thời chính C.Mác đã đi tới quan niệm phi mâu thuẫn về cơ sở của phép tính vi phân một cách lôgíc. Khi xác định giá trị đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x (tại x hàm số tồn tại đạo hàm), C.Mác đã xuất phát từ hai quá trình mâu thuẫn biện chứng. Quá trình thứ nhất là: tại vùng lân cận của x lấy một điểm x_1 phân biệt với x, sau đó lập tỷ số $\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$. Quá trình thứ hai mâu thuẫn biện chứng với quá trình đầu; nó diễn ra như sau: Ta trở lại điểm x nhưng không phải trực tiếp, bởi vì nếu cho $x_1 = x$, thì tức là biến tỷ số $\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$ thành $\frac{0}{0}$ là không xác định được, nhưng nếu ta cho $x_1 \to x$ hay $(x_1 - x) \to 0$ thì rõ ràng là ở đây, có sự trở lại vị trí cũ nhưng ở một mức độ mới, mà vị trí mới đó chứng tỏ tính chất biện chứng của định nghĩa đạo hàm. Cách tiếp cận biện chứng khoa học của C.Mác về việc lập luận phép tính vi phân được thể hiện như sau: C.Mác không bắt đầu từ những ký hiệu và công thức có sẵn của phép toán, mà từ việc làm sáng tỏ vấn đề, xem xét những kí hiệu và công thức đó đã xuất hiện như thế nào trong quá trình tìm đạo hàm của các hàm số và các số vi phân.

Tính chất biện chứng của sự phát triển nhận thức toán học ở dạng chung nhất tìm thấy trong sự biến đổi về chất của chính bản thân đối tượng của toán học. Việc chuyển từ toán học về những đại lượng bất biến sang toán học về những đại lượng biến thiên đã xác nhận những nét cơ bản trong sự tiến bộ của tri thức toán học.

Tư tưởng biến thiên còn ảnh hưởng đến

(3) C.Mác và Ph.Ăngghen. *Sđd.*, tr.773.
(4) C.Mác và Ph.Ăngghen. *Sđd.*, tr.766.
(5) C.Mác và Ph.Ăngghen. *Sđd.*, tr.774.

hình học về phương diện xem xét các phép biến hình. Song, điều quan trọng ở đây là lợi dụng các bất biến trong các phép biến hình để biến một bài toán khó thành một bài toán dễ hơn bằng cách thay hình đã cho bằng ảnh của nó qua một phép biến hình hợp lý để giữ nguyên các quan hệ đang xem xét nhưng mang lại nhiều thuận lợi nhất cho việc giải bài toán thông qua ảnh đó. Khởi đầu là việc xem xét những bất biến qua các loại phép chiếu trong hội họa và kiến trúc, trong việc vẽ bản đồ, v.v., rồi từ những bất biến đó mà phân loại các khái niệm, các tính chất ra thành những khái niệm, những tính chất kèm theo các tính từ như Mêtríc (mêtríc), afin, xạ ảnh v.v.. Sự phân loại này tạo ra nhiều thuận lợi cả trong những bài toán lý thuyết, những bài toán quỹ tích và dựng hình - những bài toán có ý nghĩa thực tiễn rất lớn.

Vào thế kỷ XVII - XVIII, khi toán học chuyển trọng tâm sang các hàm số, thì ở đại số có cách tiếp cận mới về phương trình. Việc nghiên cứu phương trình $P(x) = 0$ được nhìn nhận dưới khía cạnh xét sự biến thiên của hàm số $y = P(x)$ và xét xem trong sự biến thiên đó, khi nào thì y triệt tiêu. Với cách tiếp cận đó, việc tính gần đúng các nghiệm thực của một phương trình được giải quyết bằng nhiều cách, trong đó các đạo hàm tham gia và có thể đạt đến một giá trị mong muốn.

Xuất phát từ cơ sở những đại lượng biến thiên, sự ra đời của đạo hàm đã cho phép chúng ta giải những bài toán cực trị gắn liền với sự biến thiên liên tục của các hàm số và biến số. Tuy nhiên, thực tiễn lại đưa đến những bài toán cực trị, trong đó cái phải tìm để đạt cực trị không phải là giá trị của một biến số, mà là một hàm số. Ví dụ, bài toán về một hình với diện tích cho trước và có chu vi bé nhất, bài toán về đường cong khép kín có chiều dài cho trước và bao một diện tích lớn nhất. Việc giải các bài toán đó đã dẫn tới sự ra đời của phép tính biến thiên và mở rộng khái niệm "biến", từ chỗ chỉ có thể là một số thay đổi đến chỗ có thể là một đường cong thay đổi, tức là một hàm số thay đổi. Với những bài toán cực trị phức tạp, theo sự phát triển của tính biến thiên, dần dần đã hình thành một lĩnh vực toán học gọi là "điều khiển tối ưu". Lý thuyết này nghiên cứu việc xử lý các tham số điều khiển một quá trình vận động nào đó (cơ học, vật lý học, hóa học, v.v.) sao cho mục tiêu đạt được là tối ưu (chẳng hạn như thời gian - sớm nhất, không gian - ngắn nhất, chi phí - ít tốn kém nhất).

Tóm lại, với sự phát triển mạnh mẽ của cuộc cách mạng khoa học và công nghệ hiện đại trên nhiều lĩnh vực, sự vận động đã đi vào toán học, làm nảy sinh trong toán học những đại lượng biến thiên hết sức đa dạng. Những đại lượng biến thiên đó đã trở thành công cụ thuận lợi cho việc giải quyết những nhiệm vụ của các khoa học, đặc biệt là những vấn đề có liên quan đến thực tiễn, từ quan điểm của chủ nghĩa duy vật biện chứng.

Nghiên cứu những đại lượng biến thiên trong toán học, về thực chất, là khẳng định lập trường của triết học mácxít trong tư duy khoa học. Chính trong lĩnh vực này, hơn lúc nào hết, đã khẳng định tính hiện thực của khoa học toán học trừu tượng. Những đại lượng biến thiên trong toán học, mặc dù hết sức trừu tượng, có khi dưới dạng là một quá trình và dường như rất xa rời hiện thực, nhưng từ chúng, ta lại có thể rút ra được những kết quả rất phù hợp với hiện thực. Giá trị nhận thức khoa học to lớn của chúng là ở chỗ đó. Điều này phù hợp với nhận xét của V.I.Lênin: "*Tất cả* những sự trừu tượng khoa học (đúng đắn, nghiêm túc, không tùy tiện) phản ánh giới tự nhiên sâu sắc hơn, chính xác hơn, *đầy đủ hơn*"(6).□

(6) V.I.Lênin. *Toàn tập* t.29. Nxb Tiến bộ, Mátxcơva, tr.179.