

VỀ MÔ ĐUN NỬA HOÀN CHÍNH

Lê Đức Thoang *

Nguyễn Công Nhân**

TÓM TẮT: *Môđun nửa hoàn chỉnh là lớp môđun quan trọng trong lý thuyết vành và môđun. Trong bài viết này, chúng tôi giới thiệu tổng quan về môđun nửa hoàn chỉnh cùng với các tính chất xét trong mối tương quan với phủ xạ ảnh, môđun phân phụ và radican của nó.*

1. Giới thiệu

Trong bài viết này, chúng tôi luôn giả thiết vành R đã cho là vành kết hợp có đơn vị $1 \neq 0$ và mọi R -môđun được xét là môđun unita. Với vành R , ta kí hiệu $Rad(R)$ (hoặc J) để chỉ căn Jacobson và M_R (${}_R M$) để chỉ M là một R -môđun phải (trái, tương ứng). Trong một ngữ cảnh cụ thể, khi không sợ nhầm lẫn về phía của môđun, để đơn giản ta viết môđun M thay vì M_R . Môđun con $N \subseteq^{sm} M$ được gọi là đối cốt yếu, nếu với mọi $A \subseteq M, N + A = M$ thì phải có $N = M$, kí hiệu $N \subseteq^{sm} M$. Với A, B là hai môđun con của M , ta gọi A là phân phụ của B trong M nếu ta có $A + B = M$ và A là môđun con tối tiểu có tính chất $A + B = M$. M được gọi là môđun phân phụ nếu mọi môđun con của M đều có phân phụ trong M . Với A, B là hai môđun con của N thỏa mãn $A + B = N$ và $A \cap B = 0$ thì ta gọi A, B là các hạng tử trực tiếp của N , khi đó ta viết $N = A \oplus B$ và gọi là sự phân tích thành tổng trực tiếp. Cho đồng cấu môđun $\alpha: A \rightarrow M$, ta nói phân tích $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ nâng được bởi α nếu có phân tích $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ sao cho $\alpha(A_i) = M_i$. Trường hợp môđun thương $A/B = \bigoplus_{i \in I} M_i$ nâng được bởi $\alpha: A \rightarrow A/B$ thì ta gọi A/B nâng được đến A . Môđun M được gọi là xạ ảnh nếu với mỗi đồng cấu $f: M \rightarrow B$ và mỗi toàn cấu $g: A \rightarrow B$, tồn tại một đồng cấu $h: M \rightarrow A$ sao cho $g.h = f$. Cho môđun A , toàn cấu $p: P \rightarrow A$ được gọi là phủ xạ ảnh của A nếu P là môđun xạ ảnh và $Ker(p) \subseteq^{sm} P$. Khác với bao nội xạ của một môđun luôn tồn tại, phủ xạ ảnh của một môđun có thể không có. Chẳng hạn, các nhóm aben không tự do là các ϕ -môđun không có phủ xạ ảnh. Sự tồn tại của phủ xạ ảnh là duy nhất sai khác một đẳng cấu. Những khái niệm và kết quả cơ bản liên quan đến bài viết, chúng ta có thể tham khảo trong [1] và [8].

2. Môđun nửa hoàn chỉnh

Định nghĩa 1. *Môđun M được gọi là nửa hoàn chỉnh nếu mọi ảnh toàn cấu của M đều có phủ xạ ảnh.*

* TS, Trường Đại học Phú Yên

** Học viên Cao học, Trường Đại học Quy Nhơn

Mệnh đề 2.

1. Mọi môđun nửa hoàn chỉnh đều có phủ xạ ảnh;
2. Mọi ảnh toàn cấu của môđun nửa hoàn chỉnh là môđun nửa hoàn chỉnh;
3. Mọi phủ xạ ảnh của một môđun đơn là môđun nửa hoàn chỉnh;
4. Mọi ảnh toàn cấu của một môđun phần phụ là môđun phần phụ.

Chứng minh.

(1) Cho P là môđun nửa hoàn chỉnh và xét đồng cấu đồng nhất $1_P : P \rightarrow P$ ta có $P = 1_P(P)$ có phủ xạ ảnh.

(2) Cho P là môđun nửa hoàn chỉnh và $\varphi : P \rightarrow M$ là toàn cấu, ta chứng minh M là môđun nửa hoàn chỉnh. Giả sử $\psi : M \rightarrow N$ là toàn cấu, khi đó có $\psi\varphi : P \rightarrow N$ là toàn cấu, mà P là nửa hoàn chỉnh nên N có phủ xạ ảnh. Vậy M là môđun nửa hoàn chỉnh.

(3) Giả sử $\varphi : P \rightarrow M$ là phủ xạ ảnh của R -môđun đơn M , chứng minh P là nửa hoàn chỉnh. Ta có $\text{Ker}\varphi \subseteq^{sm} P$ và là môđun cực đại của P . Lấy U là môđun con thực sự của P , suy ra $U + \text{Ker}\varphi$ là môđun con thực sự của P , nên suy ra $U \subseteq \text{Ker}\varphi$. Từ đó suy ra $U \subseteq^{sm} P$ và do đó $P \rightarrow P/U$ là phủ xạ ảnh của P/U . Suy ra P là phủ xạ ảnh của mọi ảnh toàn cấu không tầm thường của P . Vậy P là môđun nửa hoàn chỉnh.

(4) Giả sử $\varphi : P \rightarrow M$ là một toàn cấu và P là một môđun phần phụ. Ta cần chứng minh M là môđun phần phụ. Thật vậy, với B là môđun con bất kỳ của M , vì là toàn cấu nên có $A \subseteq P$ sao cho $B = \varphi(A)$, vì P là môđun bù nên tồn tại phần phụ A^* của A trong P . Ta chứng minh $\varphi(A^*)$ là phần phụ của $B = \varphi(A)$ trong M . Ta có $P = A + A^*$, suy ra $M = \varphi(P) = \varphi(A) + \varphi(A^*)$. Vì A^* là phần phụ của A nên ta có $A \cap A^* \subseteq^{sm} A^*$, do đó $\varphi(A \cap A^*) \subseteq^{sm} \varphi(A^*)$. Mặt khác, ta cũng có $\varphi(A \cap A^*) = \varphi(A) \cap \varphi(A^*) = B \cap \varphi(A^*)$, nên $B \cap \varphi(A^*) \subseteq^{sm} \varphi(A^*)$. Vậy $\varphi(A^*)$ là phần phụ của B trong M và M là môđun phần phụ.

Mệnh đề 3. Cho $\varphi : P \rightarrow M$ là phủ xạ ảnh của M . Khi đó các mệnh đề sau là tương đương:

1. M là môđun nửa hoàn chỉnh;
2. P là môđun nửa hoàn chỉnh;
3. P là môđun bù.

Chứng minh.

Ta sẽ chứng minh $(2) \Rightarrow (1) \Rightarrow (3) \Leftarrow (2)$.

$(2) \Rightarrow (1)$. Vì là toàn cấu và P là nửa hoàn chỉnh, suy ra M là nửa hoàn chỉnh.

$(1) \Rightarrow (3)$. Giả sử có $A \subseteq P$, ta xét toàn cấu

$$\sigma = \nu\varphi : P \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\nu} M/\varphi(A),$$

trong đó ν là phép chiếu từ M đến $M/\varphi(A)$. Vì M là nửa hoàn chỉnh nên

$M / \varphi(M)$ có phủ xạ ảnh, P là môđun xạ ảnh và σ là một toàn cấu, suy ra tồn tại hạng tử trực tiếp $P_1 \subseteq P$ sao cho $\sigma_1 = \sigma|_{P_1}: P_1 \rightarrow M / \varphi(A)$ là một phủ xạ ảnh. Chúng ta sẽ chứng minh P_1 là phần phụ của A trong P . Từ $\sigma(P_1) = M / \varphi A = \sigma(P)$ suy ra $P = P_1 + \text{Ker}(\sigma)$. Vì $\text{Ker}(\sigma) = \text{Ker}(\nu\varphi) = \varphi^{-1}\text{Ker}(\nu) = \varphi^{-1}\varphi(A) = A + \text{Ker}(\varphi)$ nên suy ra $P = P_1 + A + \text{Ker}(\varphi)$, mà $\text{Ker}(\varphi)$ là đối cốt yếu trong P nên ta có $P = P_1 + A$. Giả sử có $U \subseteq P_1$ sao cho $P = U + A$, vì $\sigma(A) = 0$ nên $\sigma(P) = \sigma_1(P_1) = \sigma_1(U)$. Khi đó

$$P_1 = \sigma^{-1}(\sigma_1(P_1)) = \sigma^{-1}(\sigma_1(U)) = U + \text{Ker}(\sigma_1),$$

mà $\text{Ker}(\sigma_1)$ là đối cốt yếu trong P_1 nên ta suy ra $P_1 = U$. Vậy ta được P_1 là phần phụ của A trong P , tức P là môđun phần phụ.

(3) $\Rightarrow$ (2). Giả sử $\sigma: P \rightarrow N$ là một toàn cấu và đặt $U = \text{Ker}(\sigma)$, theo (3) có U^* là phần phụ của U trong P . Theo tính chất của phần phụ suy ra $U^* \cap U = U^* \cap \text{Ker}(\sigma) \subseteq^{sm} U^*$. Chúng ta sẽ chứng minh rằng U^* là hạng tử trực tiếp trong P , từ đó suy ra U^* là xạ ảnh và

$$\sigma|_{U^*}: U^* \rightarrow N$$

là phủ xạ ảnh của N . Để chứng minh điều này ta gọi U^{**} là phần phụ của U^* và chứng minh $P = U^* \oplus U^{**}$. Ta xét toàn cấu chính tắc

$$\nu: P = U^* + U^{**} \rightarrow P / (U^* \cap U^{**}).$$

Ký hiệu $\bar{P} = \nu(P), \bar{U}^* = \nu(U^*), \bar{U}^{**} = \nu(U^{**})$, chúng ta có $\bar{P} = \bar{U}^* \oplus \bar{U}^{**}$. Hơn nữa, xét $\pi: \bar{P} \rightarrow \bar{U}^*$ là phép chiếu từ $\bar{P} = \bar{U}^* \oplus \bar{U}^{**}$ đến $\bar{U}^*$. Khi đó ta có biểu đồ giao hoán:

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & \searrow \psi & \downarrow \pi\nu \\ U^* & \xrightarrow{\nu_1 = \nu|_{U^*}} & \bar{U}^* \end{array}$$

với $\pi\nu = \nu_1\psi$. Ta có $\pi\nu(U^*) = \bar{U}^* = \nu_1\psi(U^*)$ nên $U^* = \psi(U^*) + \text{Ker}(\nu_1)$ mà $\text{Ker}(\nu_1) = U^* \cap U^{**} \subseteq^{sm} U^*$, nên suy ra $U^* = \psi(U^*)$. Từ đó suy ra $P = \text{Im}\psi + \text{Ker}(\psi) = U^* + \text{Ker}(\psi), \text{Ker}(\psi) \subseteq \text{Ker}(\pi\nu) = U^{**}$ và từ điều kiện cực tiểu của U^{**} suy ra $\text{Ker}\psi = U^{**}$. Mặt khác

$$U^{**} = \text{Ker}(\pi\nu) = \text{Ker}(\nu_1\psi) = \psi^{-1}(\text{Ker}(\nu_1)) = \psi^{-1}(U^* \cap U^{**})$$

nên ta được $U^* \cap U^{**} = \psi\psi^{-1}(U^* \cap U^{**}) = \psi(U^{**}) = 0$

Hệ quả 4. Mọi môđun Artin xạ ảnh là nửa hoàn chỉnh.

Chứng minh.

Vì mọi môđun Artin P là môđun phần phụ và có $1_P : P \rightarrow P$ là phủ xạ ảnh của P nên suy ra P là nửa hoàn chỉnh.

Mệnh đề 5. Giả sử P là nửa hoàn chỉnh. Khi đó

1. M là môđun phần phụ.
2. $M/\text{Rad}(M)$ là nửa đơn.
3. $\text{Rad}(M)$ là đối cốt yếu trong M .

Chứng minh.

(1) Vì M là nửa hoàn chỉnh nên có phủ xạ ảnh $\varphi : P \rightarrow P$. Hơn nữa, theo mệnh đề 3 suy ra P là môđun phần phụ. Áp dụng mệnh đề 2, M là ảnh toàn cấu của P nên M cũng là môđun phần phụ.

(2) Vì $M/\text{Rad}(M)$ được xem như là ảnh của M qua toàn cấu chính tắc, mà M là nửa hoàn chỉnh nên suy ra $M/\text{Rad}(M)$ là nửa hoàn chỉnh. Khi đó $M/\text{Rad}(M)$ có phủ xạ ảnh $\varphi : P \rightarrow M/\text{Rad}(M)$, mà $M/\text{Rad}(M)$ là nửa hoàn chỉnh nên theo mệnh đề 3 suy ra P là môđun phần phụ. Do đó theo mệnh đề 2 suy ra $M/\text{Rad}(M) = \varphi(P)$ là môđun phần phụ. Giả sử $A \subseteq M/\text{Rad}(M)$ và A^* là phần phụ của A trong $M/\text{Rad}(M) = \varphi(P)$. Khi đó chúng ta có $M/\text{Rad}(M) = A + A^*$, $A \cap A^* \subseteq^{\text{sm}} M/\text{Rad}(M)$. Do đó $A \cap A^* \subseteq \text{Rad}(M/\text{Rad}(M)) = 0$. Từ các điều trên suy ra $M/\text{Rad}(M) = A \oplus A^*$, tức là mọi môđun con A đều là hạng tử trực tiếp của $M/\text{Rad}(M)$. Vậy $M/\text{Rad}(M)$ là môđun nửa đơn.

(3) Giả sử $\varphi : P \rightarrow M$ là phủ xạ ảnh của M . Vì $\text{Ker}(\varphi) \subseteq^{\text{sm}} P$ nên $\text{Ker}(\varphi) \subseteq \text{Rad}(P)$. Hơn nữa, $\varphi(\text{Rad}(P)) = \text{Rad}(M)$, khi đó để chứng minh $\text{Rad}(M) \subseteq^{\text{sm}} M$ ta chứng minh $\text{Rad}(P) \subseteq^{\text{sm}} P$. Vì P là nửa hoàn chỉnh và $\nu : P \rightarrow P/\text{Rad}(P)$ là toàn cấu nên $P/\text{Rad}(P)$ có phủ xạ ảnh. Hơn nữa, P là môđun xạ ảnh nên suy ra ta có phân tích $P = P_1 \oplus P_2$ thỏa $P_1 \cap \text{Rad}(P) \subseteq^{\text{sm}} P_1$ và $P_2 \subseteq \text{Rad}(P)$. Từ đó suy ra $P_2 = 0$, $P = P_1$ và $\text{Rad}(P) = P \cap \text{Rad}(P) \subseteq^{\text{sm}} P_1$ và $P_2 \subseteq \text{Rad}(P)$. Vậy ta có $\text{Rad}(M) = \varphi(\text{Rad}(P)) \subseteq^{\text{sm}} \varphi(P) = M$. Định lý được chứng minh.

Mệnh đề 6. Cho $\varphi : P \rightarrow M$ là một phủ xạ ảnh và $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ sao cho với mọi $i \in I$ đều có toàn cấu $\alpha_i : A_i \rightarrow M_i$ với A_i là xạ ảnh và $\text{Ker}(\alpha_i) \subseteq \text{Rad}(A_i)$. Khi đó phân tích $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ nâng được bởi φ .

Chứng minh.

Vì φ là toàn cấu và A là xạ ảnh nên tồn tại ψ và biểu đồ giao hoán sau

$$\begin{array}{ccc}
 & A = \bigoplus_{i \in I} A_i & \\
 \psi \swarrow & \downarrow \bigoplus \alpha_i & \\
 P & \xrightarrow{\varphi} & M = \bigoplus_{i \in I} M_i
 \end{array}$$

Vì $\bigoplus_{i \in I} \alpha_i$ là toàn cấu nên ta có $P = \text{Im}(\psi) + \text{Ker}(\varphi)$. Mà $\text{Ker}(\varphi) \subseteq^{sm} P$ nên suy ra $P = \text{Im}(\psi)$ vậy ψ là toàn cấu. Vì P là xạ ảnh nên ψ chẻ ra, tức là có môđun con P_0 của A sao cho $A = P_0 \oplus \text{Ker}(\psi)$. Vì biểu đồ trên là giao hoán nên ta có $\text{Ker}(\psi) \subseteq \text{Ker}(\bigoplus \alpha_i) = \bigoplus \text{Ker}(\alpha_i) \subseteq \bigoplus \text{Rad}(A_i) = \text{Rad}(A)$, khi đó theo [8, Hệ quả 9.6.4] thì $\text{Ker}(\psi) = 0$, vậy ψ là đẳng cấu. Do đó $P = \bigoplus_{i \in I} \psi(A_i)$, trong đó $\varphi\psi(A_i) = \alpha_i(A_i) = M_i, i \in I$. Vậy phân tích $M = \bigoplus M_i$ nâng được bởi φ , đó là điều phải chứng minh.

Hệ quả 7. Cho $\varphi: P \rightarrow M$ là phủ xạ ảnh của môđun nửa hoàn chỉnh M . Khi đó mọi phân tích trực tiếp của M đều nâng được bởi φ .

Chứng minh.

Vì mọi hạng tử trực tiếp M_i của M đều có phủ xạ ảnh toàn cấu cốt yếu α_i thỏa $\text{Ker}(\alpha_i) \subseteq^{sm} \text{Rad}(A)$ nên theo mệnh đề 6 ta có điều phải chứng minh.

Hệ quả 8. Cho P là môđun nửa hoàn chỉnh và xạ ảnh. Khi đó mọi phân tích trực tiếp của môđun nửa đơn $P / \text{Rad}(P)$ đều nâng được đến P .

Chứng minh.

Vì P là nửa hoàn chỉnh nên $\text{Rad}(P) \subseteq^{sm} P$, hơn nữa mọi hạng tử trực tiếp của $P / \text{Rad}(P)$ đều có phủ xạ ảnh nên theo mệnh đề 6 ta có điều phải chứng minh.

Mệnh đề 9. Cho P_R là môđun xạ ảnh. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:

1. P là nửa hoàn chỉnh;
2. P là môđun phần phụ;
3. P thỏa các điều kiện:
 - a. $P / \text{Rad}(P)$ là nửa đơn.
 - a. Mọi hạng tử trực tiếp của $(P / \text{Rad}(P))_R$ là ảnh của một hạng tử trực tiếp của P_R qua đồng cấu từ $P \rightarrow P / \text{Rad}(P)$.
 - b. $\text{Rad}(P) \subseteq^{sm} P$.

Chứng minh.

(1) $\Rightarrow$ (2). Ta có P là môđun xạ ảnh nên nó có phủ xạ ảnh là chính nó, do đó theo mệnh đề 3 ta được (1) $\Rightarrow$ (2).

(1) $\Rightarrow$ (3). Theo mệnh đề 5 ta có $P / \text{Rad}(P)$ là nửa đơn và $\text{Rad}(P) \subseteq^{sm} P$, theo hệ quả 8 ta được (b).

(3) $\Rightarrow$ (2). Giả sử $\nu: P \rightarrow P / \text{Rad}(P) = \bar{P}$ là phép chiếu chính tắc. Giả sử $A \subseteq P$ khi đó theo 3a, $\bar{P}$ là nửa đơn nên có phân tích trực tiếp

$$\bar{P}_R = \nu(A) \oplus T,$$

theo 3b tồn tại một hạng tử trực tiếp P_2 của P sao cho $\nu(P_2) = T$. Chúng ta chứng minh P_2 là phần phụ của A trong P . Thật vậy, từ $\bar{P} = \nu(A) \oplus \nu(P_2)$ suy ra $P = A + P_2 + \text{Rad}(P)$, $A \cap P_2 \subseteq \text{Rad}(P)$. Mà theo (c), $\text{Rad}(P) \subseteq^{sm} P$ nên $P = A + P_2$ và $A \cap P_2 \subseteq^{sm} P$. Vì P_2 là hạng tử trực tiếp trong P và $A \cap P_2 \subseteq^{sm} P$ (với $A \cap P_2$ là ảnh của chính nó qua toàn cấu chính tắc từ P lên P_2), ta suy ra $A \cap P_2 \subseteq^{sm} P_2$. Giả sử có $B \subseteq P_2$, $A + B = P$, khi đó theo luật modular có

$$A \cap P_2 + B = P_2,$$

mà $A \cap P_2 \subseteq P_2$ nên $B = P_2$. Vậy P_2 là phần phụ của A trong P , nên có (2). Vậy mệnh đề được chứng minh xong.

Mệnh đề 10. Cho $P_i \mid i \in I$ là họ các R-môđun nửa hoàn chỉnh, xạ ảnh. Khi đó $P = \bigoplus_{i \in I} P_i$ là nửa hoàn chỉnh nếu và chỉ nếu $\text{Rad}(P) \subseteq^{sm} P$.

Chứng minh.

Theo mệnh đề 9 ta có ngay chiều ($\Rightarrow$), ta chỉ còn chứng minh chiều ($\Leftarrow$). Để chứng minh P là nửa hoàn chỉnh ta chứng minh P thỏa mãn các điều kiện của (3) trong mệnh đề 9.

Thật vậy, ta có:

(c). Đúng theo giả thiết.

(a). Theo [8, Hệ quả 9.1.5] ta có $P / \text{Rad}(P) ; \bigoplus_{i \in I} P_i / \text{Rad}(P_i)$, theo mệnh đề 9 có $P_i / \text{Rad}(P_i)$ là nửa đơn với mọi $i \in I$ nên $P / \text{Rad}(P)$ cũng là nửa đơn, vậy ta có (a) đúng.

Đầu tiên ta chứng minh mọi môđun con đơn E của $P / \text{Rad}(P)$ đều có phủ xạ ảnh. Vì $P / \text{Rad}(P) ; \bigoplus_{i \in I} P_i / \text{Rad}(P_i)$ nên E đẳng cấu với một môđun con đơn E' của $\bigoplus_{i \in I} P_i / \text{Rad}(P_i)$. Nếu có phân tích $P_i / \text{Rad}(P_i)$ thành tổng trực tiếp các môđun con đơn thì E' đẳng cấu với một môđun con đơn của $P_i / \text{Rad}(P_i)$. Vì mỗi hạng tử trực tiếp của môđun nửa hoàn chỉnh $P_i / \text{Rad}(P_i)$ đều có phủ xạ ảnh nên E' cũng có phủ xạ ảnh và do đó E cũng có phủ xạ ảnh. Giả sử $P / \text{Rad}(P) = L_1 \oplus L_2$, vì $P / \text{Rad}(P)$ là nửa đơn nên L_1, L_2 phân tích thành tổng trực tiếp của các môđun con đơn $L_1 = \bigoplus_{i \in I_1} E_1^i, L_2 = \bigoplus_{i \in I_2} E_2^i$.

Đặt $\varphi_1^i: A_1^i \rightarrow E_1^i, \varphi_2^i: A_2^i \rightarrow E_2^i$ là các phủ xạ ảnh, khi đó

$$\alpha_1 = \bigoplus_{i \in I_1} \varphi_1^i: A_1 = \bigoplus_{i \in I_1} A_1^i \rightarrow L_1 = \bigoplus_{i \in I_1} E_1^i,$$

$$\alpha_2 = \bigoplus_{i \in I_2} \varphi_1^i : A_2 = \bigoplus_{i \in I_2} A_2^i \rightarrow L_2 = \bigoplus_{i \in I_2} E_2^i$$

là các toàn cầu, A_1, A_2 là các môđun xạ ảnh và chúng ta có

$$\text{Ker}(\varphi_1^i) \subseteq^{sm} A_1^i, \text{Ker}(\varphi_2^i) \subseteq^{sm} A_2^i.$$

Khi đó

$$\text{Ker}(\varphi_1^i) \subseteq \text{Rad}(A_1^i), \text{Ker}(\varphi_2^i) \subseteq \text{Rad}(A_2^i).$$

do đó

$$\text{Ker}(\alpha_1) = \bigoplus_{i \in I_1} \text{Ker}(\varphi_1^i) \subseteq \text{Rad}(A_1)$$

$$\text{Ker}(\alpha_2) = \bigoplus_{i \in I_2} \text{Ker}(\varphi_2^i) \subseteq \text{Rad}(A_2)$$

Khi đó ta xem $\varphi = \nu : P \rightarrow P / \text{Rad}(P)$ và theo mệnh đề 6 thì phân tích $P / \text{Rad}(P) = L_1 \oplus L_2$ nâng được đến P , vậy (b) đúng. Mệnh đề được chứng minh xong.

Mệnh đề 9 cho chúng ta thấy cấu trúc của một môđun nửa hoàn chỉnh thông qua tính chất của các hạng tử trực tiếp và Radican của nó, từ đó cho ta cách chứng minh một môđun là nửa hoàn chỉnh. Mệnh đề 10 cho ta tính chất của tổng hữu hạn các môđun nửa hoàn chỉnh là nửa hoàn chỉnh.

Hệ quả 11. *Từ mệnh đề trên ta có các kết quả sau.*

1. *Tổng trực tiếp của hữu hạn các R -môđun nửa hoàn chỉnh là môđun nửa hoàn chỉnh.*
2. *Nếu R_R là nửa hoàn chỉnh thì mọi R -môđun hữu hạn sinh là nửa hoàn chỉnh.*

Chứng minh.

(1). Giả sử $M_1, M_2, \dots, M_n$ là nửa hoàn chỉnh và $\varphi : P_i \rightarrow M_i, i = 1, 2, \dots, n$ là các phủ xạ ảnh. Theo mệnh đề 3, P_i là nửa hoàn chỉnh và theo mệnh đề 9 ta có $\text{Rad}(P_i) \subseteq^{sm} P_i$.

Giả sử $P = \bigoplus_{i=1}^n P_i$, khi đó ta có $\text{Rad}(P) = \bigoplus_{i=1}^n \text{Rad}(P_i)$ là tổng hữu hạn các môđun con đối cốt yếu trong P nên $\text{Rad}(P) \subseteq^{sm} P$, do đó theo mệnh đề 10 ta có P là nửa hoàn chỉnh.

Vì P là nửa hoàn chỉnh và $M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$ là ảnh của P qua toàn cầu $\bigoplus_1^n \varphi_i$ nên $M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$ cũng là nửa hoàn chỉnh. Vậy có điều phải chứng minh.

(2). Vì mỗi R -môđun hữu hạn sinh M đều là ảnh toàn cầu của một R -môđun tự do và là hữu hạn sinh F , mà mỗi môđun tự do hữu hạn sinh là tổng trực tiếp của hữu hạn môđun con đơn, hơn nữa mỗi môđun đơn là nửa hoàn chỉnh. Vậy theo (1) thì M là nửa hoàn chỉnh.

Mệnh đề 12. *Cho P là môđun xạ ảnh. Khi đó các kết quả sau là tương đương:*

1. P là nửa hoàn chỉnh;
2. P thỏa các điều kiện:
 - a. Mọi môđun con thực sự của P được chứa trong một môđun con cực đại của P .
 - b. Mọi môđun thương đơn của P có phủ xạ ảnh.

Chứng minh.

(1) $\Rightarrow$ (2). Vì mọi môđun thương của P là ảnh toàn cấu của P , mà P là nửa hoàn chỉnh nên theo định nghĩa 1 có (b) đúng, ta chỉ cần chứng minh (a). Giả sử môđun U là con thực sự của P , vì P là nửa hoàn chỉnh nên P/U là nửa hoàn chỉnh, do đó theo mệnh đề 5 suy ra $Rad(P/U) \subseteq^{sm} P/U$, do đó $Rad(P/U)$ là môđun con thực sự của P/U . Vì $Rad(P/U)$ là giao của tất cả các môđun con cực đại của P/U nên tồn tại ít nhất một môđun con cực đại của P/U có dạng X/U , với $U \subseteq X \subseteq P$. Vì X/U là cực đại trong P/U nên $P/X; (P/U)/(X/U)$ là môđun đơn và do đó X là cực đại trong P .

(2) $\Rightarrow$ (1). Chúng ta chứng minh P thỏa mãn các điều kiện của (3) trong mệnh đề 9.

(a). Chứng minh $Rad(P) \subseteq^{sm} P$. Giả sử có môđun con thực sự U của P sao cho $U + Rad(P) = P$. Theo (2a) của giả thiết tồn tại môđun con cực đại X sao cho $U \subseteq X \subseteq P$. Từ đó suy ra $U + Rad(P) \subseteq X \neq P$, điều này mâu thuẫn với giả sử. Vậy $Rad(P) \subseteq^{sm} P$.

(b). Chứng minh là nửa đơn. Giả sử không là nửa đơn, khi đó $\bar{P}$ là phép chiếu chính tắc, suy ra $\bar{P}$ là con thực sự của P . Theo (a) tồn tại một môđun con cực đại X sao cho $\bar{P} \subseteq X$. Theo (b) thì môđun thương đơn P/X có phủ xạ ảnh, do đó theo hệ quả 11 ta có phân tích

$$P = P_1 \oplus P_2 = P_1 + X$$

với $P_2 \subseteq X, P_1 \cap X \subseteq^{sm} P_1$. Do đó $P_1 \cap X \subseteq Rad(P)$ suy ra

$$\nu(P_1) \cap \nu(X) \subseteq \nu(P_1 \cap X) \subseteq Rad(\bar{P}) = 0,$$

do đó ta có phân tích

$$\bar{P} = \nu(P_1) \oplus \nu(X). (*)$$

Vì X là cực đại trong P nên $Rad(P) \subseteq X$ và

$$P/X; (P/Rad(P))/(X/Rad(P)) = \bar{P}/\nu(X); \nu(P_1)$$

là môđun đơn. Vậy $\nu(P_1) \subseteq Soc(\bar{P}) \subseteq \nu(X)$ điều này trái với (*). Vậy $\bar{P}$ là nửa đơn.

(c). Giả sử $\bar{P} = \bigoplus_{i \in I} E_i, E_i$ đơn. Khi đó với mỗi $i \notin I$,

$E_i; \bar{P}/\bigoplus_{j \in I, j \neq i} E_j; P/\nu^{-1}(\bigoplus_{j \in I, j \neq i} E_j)$ là môđun thương đơn, nên theo (2b) có

phủ xạ ảnh $\alpha_i : A \rightarrow E_i, i \in I$.

Vì E_i là môđun đơn nên theo hệ quả 11 A_i cũng là nửa hoàn chỉnh với mọi $i \in I$. Giả sử $\nu : P \rightarrow P / \text{Rad}(P)$ và $P / \text{Rad}(P) = \bigoplus_{i \in I} E_i$ thỏa mãn giả thiết của mệnh đề 6. Theo cách chứng minh của mệnh đề 6 ta có $\psi : A = \bigoplus_{i \in I} A_i \rightarrow P$ là đẳng cấu. Do đó $P = \bigoplus_{i \in I} \psi(A_i)$ là tổng trực tiếp của các môđun nửa hoàn chỉnh, mặt khác có $\text{Rad}(P) \subseteq^{\text{sm}} P$ nên theo hệ quả 11 thì P là nửa hoàn chỉnh. Vậy mệnh đề được chứng minh xong.

Mệnh đề 13. Cho $P_R \neq 0$ là môđun xạ ảnh. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:

1. P là không phân tích được;
2. P là nửa hoàn chỉnh và không phân tích trực tiếp được;
3. $\text{Rad}(P)$ là môđun con đối cốt yếu và cực đại trong P ;
4. $\text{Rad}(P)$ là môđun con thực sự lớn nhất trong P ;
4. $\text{End}(P_R)$ là địa phương.

Chứng minh.

(1) $\Rightarrow$ (2). Vì P không phân tích được nên nó cũng không phân tích trực tiếp được. Theo mệnh đề 3 ta chỉ cần chứng minh P là môđun phần phụ. Theo (1) mọi môđun con A của P đều có phần phụ là chính P . Vậy P là môđun phần phụ, suy ra (2) đúng.

(2) $\Rightarrow$ (3). Theo mệnh đề 5 chúng ta có $\text{Rad}(P) \subseteq^{\text{sm}} P$. Vì $P / \text{Rad}(P)$ là không phân tích trực tiếp được nên theo hệ quả 8 $P / \text{Rad}(P)$ không những là môđun nửa đơn mà còn là môđun đơn, vì vậy $\text{Rad}(P)$ là cực đại trong P .

(3) $\Rightarrow$ (4). Giả sử $U \subseteq P, U \not\subseteq \text{Rad}(P)$. Vì $\text{Rad}(P)$ là môđun con cực đại nên $U + \text{Rad}(P) = P$. Mà $\text{Rad}(P) \subseteq^{\text{sm}} P$ nên suy ra $U = P$. Vậy (4) đúng.

(4) $\Rightarrow$ (5). Vì P là xạ ảnh nên mọi toàn cấu $\varphi : P \rightarrow P$ là toàn cấu chẻ ra, do đó ta suy ra φ là tự đẳng cấu. Nếu $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{End}(P_R)$ là các phần tử không khả nghịch thì chúng cũng không phải là toàn cấu nên theo (4) chúng ta có

$$\text{Im}(\varphi_1 + \varphi_2) \subseteq \text{Im}(\varphi_1) + \text{Im}(\varphi_2) \subseteq \text{Rad}(P) \subsetneq P.$$

do đó $\varphi_1 + \varphi_2$ cũng không khả nghịch trong $\text{End}(P_R)$. Vậy theo [8, Hệ quả 7.2.6] suy ra P_R là địa phương.

(5) $\Rightarrow$ (1). Giả sử có $P = A + B$. Xét $\nu : P \rightarrow P / B$ là toàn cấu chính tắc. Vì P là môđun xạ ảnh nên ta có biểu đồ giao hoán

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & \searrow \varphi & \downarrow \nu \\ A & & P/B \end{array}$$

$$\xrightarrow{\nu' = \nu \setminus A}$$

Khi đó với mọi $\psi = i_A \varphi$, trong đó $i_A : A \rightarrow P$ là ánh xạ nhúng từ A vào P , ta có $\text{Im}(\psi) \subseteq A, \text{Im}(1_P - \psi) \subseteq B$. Vì $1_P = \psi + (1_P - \psi)$ và $\text{End}(P_R)$ là địa phương nên ψ hoặc $1 - \psi$ phải là tự đẳng cấu. Do đó chúng ta có $A = P$ hoặc $B = P$. Vậy P không phân tích được. Mệnh đề được chứng minh xong $\square$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. F. W. Anderson and K. R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag, New York. (1974).
2. G. Azumaya, *Characterizations of Semiperfect and Perfect Modules*, Math. Z. 140. Springer-Verlag 1974.
3. S. Bathval, * S.K. Jain, P. Kanwar and S. R. López-Permouth, *Nonsingular Semiperfect CS-Rings*, Department of Mathematics, Ohio University, Athens, Ohio 45701 Communicated by Efim Zelmanou, 1997.
4. S. Barthval, *Semiperfect CS-Rings*, 1997.
5. S. K. Jain, P. Kanwar and S. R. Lopez - Permouth, *Nonsingular Semiperfect CS- Rings II*, J. London Math. Soc, 1998.
6. N. V. Dung , D.V. Huynh, P. F. Smith and R. Wisbauer, *Extending modules*, Pitman, London, 1994.
7. A. W. Chatters and C.R. Hajarnavis, *Ring with chain conditions*, Pitman, London, 1980.
8. F. Kash, *Modules and Rings*, Graduate Text in Math. No.13, Springer-Verlag, New York, 1992.

Abstract

Semiperfect modules play an important role in Rings and Modules theory. In this article, we introduce the semiperfect modules and its properties in relation to projective cover, supplimented modules and its radican.