

TOÁN TỬ KHẢ NGHỊCH SUY RỘNG VÀ HỆ ĐIỀU KHIỂN LIÊN QUAN

Nguyễn Văn Mậu*

TÓM TẮT: Bài viết này nhằm tổng quan các kết quả của lý thuyết toán tử khả nghịch một phía, khả nghịch suy rộng để từ đó điểm lại một số kết quả nghiên cứu về bài toán điều khiển được của các hệ mô tả bởi toán tử khả nghịch phải và khả nghịch suy rộng, xem xét tính điều khiển được từ trạng thái này đến trạng thái khác đối với hệ vô hạn chiều. Gắn với chúng là các bài toán giá trị ban đầu, các bài toán giá trị biên hỗn hợp đối với các hệ mô tả bởi toán tử khả nghịch phải, khả nghịch suy rộng và nghiên cứu tính điều khiển được của các hệ đó.

Một trong những mục đích chính của bài toán điều khiển hệ thống là tìm điều khiển (đầu vào) sao cho hệ thống (đầu ra) có những tính chất mà ta mong muốn. Thông thường, việc chuyển một hệ thống có điều khiển từ vị trí này tới vị trí khác có thể thực hiện được bằng nhiều phương pháp dưới tác động của các biến điều khiển. Căn cứ vào những mục đích cụ thể của hệ thống để xác định các bài toán điều khiển khác nhau (như điều khiển được, điều khiển tối ưu, ổn định và ổn định hóa, ...). Bài toán điều khiển được là bài toán nghiên cứu các lớp hàm điều khiển chấp nhận được sao cho dưới tác động của nó hệ thống được điều khiển về các vị trí mà chúng ta mong muốn, kiểu một hệ động lực được mô tả bởi phương trình vi phân dạng:

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow[u(t)]{\text{vào}} & \boxed{\mathcal{K} = f(t, x, u)} & \xrightarrow[x(t)]{\text{ra}} \end{array}$$

Trong đó $x(\cdot)$ là biến trạng thái mô tả đối tượng đầu ra, $u(\cdot)$ là biến điều khiển mô tả đối tượng đầu vào của hệ thống. Dựa vào mục đích điều khiển của hệ thống, người ta đưa ra các khái niệm khác nhau của bài toán điều khiển được, như điều khiển được về 0, đạt được từ một trạng thái nào đó, điều khiển được hoàn toàn, điều khiển được địa phương, ... Tính điều khiển được của các hệ động lực được bắt đầu bởi những ý tưởng và kết quả quan trọng của R. Kalman từ đầu thập kỷ 60 của thế kỷ XX, đã chỉ ra một tiêu chuẩn đại số (còn gọi là tiêu chuẩn hạng Kalman) về điều kiện điều khiển được đối với hệ vi phân tuyến tính có hệ số hằng số. Từ đó đến nay, bài toán điều khiển được đã được nghiên cứu và phát triển mạnh mẽ, trở thành một hướng quan trọng của lý thuyết điều khiển hệ động lực (xem [3]-[6], [25]-[26]).

Lý thuyết đại số các toán tử khả nghịch phải được bắt đầu từ kết quả nghiên

* GS TSKH, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội.

cứu của D. Przeworska- Rolewicz (xem [16-19]), sau đó đã được phát triển bởi nhiều nhà toán học như H. Von Trotha, Z. Binderman, M. Tasche, W. Z. Karwowski ... (xem [1-4],[7-18]). Với sự ra đời của lý thuyết này, bằng một ngôn ngữ thống nhất đã tổng quát hoá các phương trình vi phân, tích phân, vi tích phân, phương trình đạo hàm riêng, phương trình sai phân, ... thành các phương trình toán tử khả nghịch phải, khả nghịch suy rộng. Việc áp dụng lý thuyết đại số của các toán tử khả nghịch phải không chỉ cho phép tìm được các điều kiện đủ, điều kiện cần và đủ về sự tồn tại và duy nhất nghiệm đối với một số lớp phương trình vi - tích phân, sai phân, đạo hàm riêng, mà còn có thể mô tả được nghiệm của phương trình cũng như các bài toán giá trị biên, giá trị ban đầu đối với những lớp phương trình này ở dạng biểu thức đại số tường minh. Theo hướng này, ở nước ta từ cuối những năm 80 của thế kỷ XX đã có một số nhà toán học nghiên cứu và nhận được một số kết quả đáng kể.

Trên cơ sở của lý thuyết toán tử khả nghịch phải, ta tiếp cận lý thuyết điều khiển, xét tính điều khiển được của hệ tuyến tính mô tả bởi toán tử khả nghịch phải trong trường hợp toán tử giải khả nghịch (xem [7-14],[21-25]). Các kết quả liên quan đến tính điều khiển được của các hệ này đã được tổng quát hoá đối với các trường hợp toán tử giải khả nghịch một phía đối với hệ mô tả bởi toán tử khả nghịch suy rộng (xem [7-11]).

Tiếp theo, việc nghiên cứu các hệ suy biến, các bài toán giá trị ban đầu, bài toán điều khiển được của các hệ suy biến này được nghiên cứu (xem [27], [29]).

Bài viết này nhằm tổng quan các kết quả của lý thuyết toán tử khả nghịch một phía, khả nghịch suy rộng để từ đó điểm lại một số kết quả nghiên cứu về bài toán điều khiển được của các hệ mô tả bởi toán tử khả nghịch phải và khả nghịch suy rộng, xem xét tính điều khiển được từ trạng thái này đến trạng thái khác đối với hệ vô hạn chiều. Gắn với chúng là các bài toán giá trị ban đầu, các bài toán giá trị biên hỗn hợp đối với các hệ mô tả bởi toán tử khả nghịch phải, khả nghịch suy rộng và nghiên cứu tính điều khiển được của các hệ suy biến đó.

1. Toán tử khả nghịch phải trong không gian tuyến tính

Ta nhắc lại một số kết quả được dùng trong các phần sau.

Giả sử X và Y là các không gian tuyến tính trên cùng một trường vô hướng $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F} = \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$). Ký hiệu $L(X \rightarrow Y)$ là tập tất cả các toán tử tuyến tính có miền xác định trong X và nhận giá trị trong Y . Ký hiệu $\text{dom } A$, $\text{Im } A$ lần lượt là miền xác định và tập giá trị của toán tử A . Đặt $L(X) = L(X \rightarrow X)$, $L_0(X \rightarrow Y) := \{A \in L(X \rightarrow Y) : \text{dom } A = X\}$ và $L_0(X) := L_0(X \rightarrow X)$.

Toán tử $A \in L_0(X)$ được gọi là *toán tử Volterra* nếu $I - \lambda A$ khả nghịch với mọi $\lambda \in \mathcal{F}$. Tập tất cả các toán tử Volterra trong $L_0(X)$ ký hiệu bởi $V(X)$.

Cho X và Y là các không gian Banach, chuẩn trong các không gian này đều được ký hiệu bởi $\|\cdot\|$. Tập hợp tất cả các toán tử tuyến tính liên tục từ X vào Y được

ký hiệu bởi $\mathcal{A}(X, Y)$, sẽ là không gian Banach với chuẩn xác định bởi $\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$. Hơn nữa, chúng ta sẽ ký hiệu $\mathcal{A}_0(X, Y) = \{A \in \mathcal{A}(X, Y) : \text{dom } A = X\}$ và $\mathcal{A}_0(X) = \mathcal{A}_0(X, X)$

1.1. Tính chất của toán tử khả nghịch phải

Định nghĩa 1. Toán tử $D \in L(X)$ được gọi là *toán tử khả nghịch phải* nếu tồn tại toán tử $R \in L_0(X)$ sao cho $\text{Im } R \subset \text{dom } D$ và $DR = I$ trên $\text{dom } R$, với I là toán tử đồng nhất. Khi đó R gọi là một *nghịch đảo phải* của D .

Ký hiệu bởi $R(X)$ tập tất cả các toán tử khả nghịch phải trong $L(X)$, P_D là tập tất cả các nghịch đảo phải của $D \in R(X)$.

Mệnh đề 1. Nếu $D \in R(X)$ và $R \in P_D$ thì

$$\text{dom } D = RX \oplus \text{Ker } D. \quad (1)$$

Định lý 1. Giả sử $D \in R(X)$ và $R_1 \in P_D$. Khi đó, tập các nghịch đảo phải của D được xác định bởi

$$P_D = \{R_1 + (I - R_1 D)A : A \in L_0(X), AX \subset \text{dom } D\}. \quad (2)$$

Định nghĩa 2. Toán tử $\Delta \in L_0(X)$ được gọi là *khả nghịch trái* nếu tồn tại toán tử $L \in L(X)$ sao cho $\text{Im } \Delta \subset \text{dom } L$ và

$$L\Delta = I \text{ trên } \text{dom } \Delta. \quad (3)$$

Khi đó, toán tử L được gọi là *nghịch đảo trái* của Δ . Ký hiệu $\lambda(X)$ là tập các toán tử khả nghịch trái trong $L(X)$, λ_Δ là tập tất cả các nghịch đảo trái của $\Delta \in \lambda(X)$.

1.2. Toán tử ban đầu và các tính chất

Định nghĩa 3. Mỗi toán tử $F \in L_0(X)$ được gọi là *toán tử ban đầu* của $D \in R(X)$ tương ứng với nghịch đảo phải $R \in P_D$ nếu

- (i) $F^2 = F, FX = \text{Ker } D,$
- (ii) $FR = 0$ trên $\text{dom } R$.

Từ định nghĩa suy ra rằng: $Fz = z$ với mọi $z \in \text{Ker } D$, $DF = 0$ trên X , $\text{Ker } F = RX$ và $\text{Ker } D \cap \text{Ker } F = \{0\}$.

Định lý 2. Cho $D \in R(X)$. Điều kiện cần và đủ để $F \in L_0(X)$ là một toán tử ban đầu của D tương ứng với $R \in P_D$ là

$$F = I - RD \text{ trên } \text{dom } D. \quad (4)$$

Định lý 3 (Công thức Taylor-Gontcharov). Giả sử $D \in R(X)$ và họ $\mathcal{F}_D = \{F_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ các toán tử ban đầu của D sinh bởi $\mathcal{R}_D = \{R_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$. Lấy $\{\gamma_n\} \in \Gamma$ là một dãy tùy ý các chỉ số. Khi đó đối với mỗi số nguyên dương N đều thỏa mãn

$$I = F_{\gamma_0} + \sum_{k=1}^{N-1} R_{\gamma_0} \dots R_{\gamma_{k-1}} F_{\gamma_k} D^k + R_{\gamma_0} \dots R_{\gamma_{N-1}} D^N \text{ trên dom } D^N.$$

(5)

Hệ quả 1 (Công thức Taylor). Nếu $D \in R(X)$ và F là toán tử ban đầu của D tương ứng với $R \in \mathcal{R}_D$ thì

$$I = \sum_{k=0}^{N-1} R^k F D^k + R^N D^N \text{ trên dom } D^N (N = 1, 2, \dots).$$

(6)

2. Toán tử khả nghịch suy rộng

Mục này trình bày các khái niệm về toán tử khả nghịch suy rộng, toán tử ban đầu phải và trái, một số tính chất cơ bản của toán tử khả nghịch suy rộng.

Định nghĩa 4. Toán tử $V \in L(X)$ được gọi là *khả nghịch suy rộng* nếu tồn tại $W \in L(X)$ (gọi là *nghịch đảo suy rộng* của V) sao cho

$$\text{Im } V \subset \text{dom } W, \text{Im } W \subset \text{dom } V \text{ và } VWV = V \text{ trên dom } V.$$

Ký hiệu $W(X)$ là tập tất cả các toán tử khả nghịch suy rộng trong $L(X)$, và Ω_V là tập các nghịch đảo suy rộng của $V \in W(X)$.

- Nếu $V \in W(X)$, $W \in \Omega_V$ và $WVW = W$ trên dom W thì W gọi là *hầu nghịch đảo* của V . Tập tất cả các hầu nghịch đảo của V được ký hiệu bởi W_V^1 .

Bổ đề 1. Nếu $V \in W(X)$ và $W \in \Omega_V$ thì $\text{dom } V = WV(\text{dom } V) \oplus \text{Ker } V$.

Định lý 4. Nếu $V \in W(X)$ và $W_1 \in \Omega_V$ thì tất cả các nghịch đảo suy rộng của V được xác định bởi $W = W_1 + A - W_1 V A V W_1$, ở đây $A \in L(X)$, $\text{Im } A \subset \text{dom } V$ và $\text{Im } V \subset \text{dom } A$.

Ta có khẳng định sau:

Định lý 5. Nếu $V \in W(X)$ và $W \in \Omega_V$ thì

$$\text{dom } V = \{Wx + z : z \in \text{Ker } V, x \in \text{Im } V\}.$$

Định nghĩa 5. Toán tử $F^{(r)} \in L(X)$ được gọi là *toán tử ban đầu phải* của $V \in W(X)$ tương ứng với $W \in \Omega_V^1$ nếu $(F^{(r)})^2 = F^{(r)}$, $\text{Im } F^{(r)} = \text{Ker } V$, $\text{dom } F^{(r)} = \text{dom } V$ và $F^{(r)}W = 0$ trên dom W .

Tập tất cả các toán tử ban đầu phải của V được ký hiệu là $F_V^{(r)}$

Toán tử ban đầu phải cũng có tính chất: $F^{(r)}v = v$, $\forall v \in \text{Ker } V$, $VF^{(r)} = 0$ và $\text{Ker } F^{(r)} \cap \text{Ker } V = \{0\}$.

Định lý 6. Giả sử $V \in W(X)$ và $W \in \Omega_V^1$. Khi đó $F^{(r)} \in L(X)$ là toán tử ban đầu phải của V tương ứng với W nếu và chỉ nếu

$$F^{(r)} = I - WV \text{ trên dom } V.$$

(7)

Định nghĩa 6. Toán tử $F^{(l)} \in L_0(X)$ được gọi là *toán tử ban đầu trái* của V

tương ứng với $W \in \Omega_V^1$ nếu $(F^{(1)})^2 = F^{(1)}$, $F^{(1)}X = \text{Ker } W$ và $F^{(1)}V = 0$ trên $\text{dom } V$.

Tập tất cả các toán tử ban đầu trái của V được ký hiệu bởi $F_V^{(r)}$

Định lí 7. Giả sử $V \in W(X)$ và $W \in \Omega_V^1$. Điều kiện cần và đủ để $F^{(1)} \in L_0(X)$ là toán tử ban đầu trái của V tương ứng với W là

$$F^{(1)} = I - VW \text{ trên } \text{dom } W. \quad (8)$$

Định lí 8. Giả sử $A, B \in L(X)$, $\text{Im } A \subset \text{dom } B$ và $\text{Im } B \subset \text{dom } A$. Khi đó $I - AB$ khả nghịch phải (khả nghịch trái, khả nghịch, khả nghịch suy rộng) nếu và chỉ nếu $I - BA$ khả nghịch phải (khả nghịch trái, khả nghịch, khả nghịch suy rộng). Hơn nữa, nếu $R_{AB} (L_{AB}, (I - AB)^{-1}, W_{AB})$ là nghịch đảo phải (nghịch đảo trái, nghịch đảo, nghịch đảo suy rộng) của $I - AB$ thì tồn tại $R_{BA} \in P_{I-BA} (L_{BA} \in \Lambda_{I-BA}, (I-BA)^{-1}, W_{BA} \in \Omega_{I-BA})$ thỏa mãn

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & R_{AB} = I + AR_{BA}B, & R_{BA} &= I + BR_{AB}A, \\ \text{(ii)} \quad & L_{AB} = I + AL_{BA}B, & L_{BA} &= I + BL_{AB}A, \\ \text{(iii)} \quad & (I - AB)^{-1} = I + A(I - BA)^{-1}B, & (I - BA)^{-1} &= I + B(I - AB)^{-1}A, \\ \text{(iv)} \quad & W_{AB} = I + AW_{BA}B, & W_{BA} &= I + BW_{AB}A. \end{aligned}$$

Ví dụ 1. Cho Γ là đường cong đóng chính qui trong $\mathbb{C}$ và không gian $X = H^\mu(\Gamma)$ ($0 < \mu < 1$). Xét các toán tử $K_1 := a_1I + b_1S$, $K_2 := a_2I + b_2S$, trong đó $a_j, b_j \in H^\mu(\Gamma)$, $j = 1, 2$ và

$$(Sx)(t) := \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{x(s)}{s-t} ds$$

Nếu $a_j^2 - b_j^2 \neq 0, \forall t \in \Gamma (j=1,2)$ và $k_1 = \text{Ind} K_1 > 0$, $k_2 = \text{Ind} K_2 < 0$ thì $M := K_2 K_1$ là toán tử khả nghịch suy rộng.

Ví dụ 2. Giả sử $D_1, D_2 \in R(X)$. Lấy $R_1 \in P_{D_1}$, $R_2 \in P_{D_2}$. Đặt $V := R_1 D_2$, $W := R_2 D_1$ Khi đó V là toán tử khả nghịch suy rộng và $W \in \Omega_V^1$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} VWV &= R_1 D_2 R_2 D_1 R_1 D_2 = R_1 D_2 = V, \\ WVW &= R_2 D_1 R_1 D_2 R_2 D_1 = R_2 D_1 = W. \end{aligned}$$

Các toán tử ban đầu phải, trái của V tương ứng với W được xác định như sau:

$$\begin{aligned} F^{(r)} &= I - WV = I - R_2 D_1 R_1 D_2 = I - R_2 D_2 = F_2, \\ F^{(l)} &= I - VW = I - R_1 D_2 R_2 D_1 = I - R_1 D_1 = F_1, \end{aligned}$$

ở đây F_i là các toán tử ban đầu của D_i tương ứng với $R_i (i = 1, 2)$.

3. Các bài toán giá trị ban đầu

Mục này nhắc lại một số kết quả về bài toán giá trị ban đầu đối với đa thức của toán tử khả nghịch phải. Bài toán này đã được D. Przeworska-Rolewicz và nhiều nhà toán học khác nghiên cứu, đó là bài toán tìm nghiệm của phương trình toán tử khả nghịch phải thỏa mãn các điều kiện ban đầu nào đó.

3.1. Bài toán giá trị ban đầu đối với hệ bậc nhất

Giả sử $D \in R(X)$ với $\dim(\text{Ker } D) \neq 0$ (nghĩa là D khả nghịch phải nhưng không khả nghịch); $F \in \mathcal{F}_D$ là toán tử ban đầu của D tương ứng với $R \in P_D$; toán tử $A \in L_0(X)$. Xét bài toán giá trị ban đầu đối với hệ bậc nhất dạng

$$Dx = Ax + y, y \in X, Fx = x_0, x_0 \in \text{Ker } D.$$

(9)

Mệnh đề 2. Giả sử $D \in R(X)$, $\dim(\text{ker } D) \neq 0$; F là toán tử ban đầu của D tương ứng với $R \in P_D$ và $A \in L_0(X)$. Khi đó, các đồng nhất thức sau nghiệm đúng:

- (i) $D - A = D(I - RA)$ trên $\text{dom } D$,
- (ii) $(D - A)R = I - AR$ trên X ,
- (iii) $D - A = (I - AR)D - AF$ trên $\text{dom } D$.

Định nghĩa 7. Các toán tử $I - RA$ và $I - AR$ được gọi là *toán tử giải* (resolving operator) đối với hệ (9). Nếu $I - RA$ hoặc $I - AR$ khả nghịch thì hệ (9) gọi là *xác định đúng đắn* (well-determined), trái lại các toán tử $I - RA$ và $I - AR$ không khả nghịch thì hệ này được gọi là *không xác định đúng đắn* (ill-determined).

Tính giải được của các hệ phương trình không xác định đúng đắn trong trường hợp toán tử giải khả nghịch một phía đã được nghiên cứu bởi A. Pogorzaletc (xem [12]-[14]), tổng quát hơn N. V. Mật đã giải quyết bài toán này khi toán tử giải khả nghịch suy rộng (xem [7]- [11]).

Vậy toán tử $I - RA$ khả nghịch phải (khả nghịch trái, khả nghịch, khả nghịch suy rộng) khi và chỉ khi $I - AR$ khả nghịch phải (khả nghịch trái, khả nghịch, khả nghịch suy rộng) tương ứng. Do đó, không mất tính tổng quát chúng ta sẽ xét bài toán với toán tử giải $I - RA$.

Định lý 9. Giả sử $D \in R(X)$, $\dim(\text{ker } D) \neq 0$, $A \in L_0(X)$ và toán tử giải $I - RA$ khả nghịch suy rộng. Khi đó, bài toán giá trị ban đầu có nghiệm nếu và chỉ nếu

$$Ry + x_0 \in (I - RA)\text{dom } D. \quad (10)$$

Hơn nữa, nếu điều kiện được thỏa mãn thì tập tất cả các nghiệm của bài toán được xác định bởi

$$G = \{x = W_A(Ry + x_0) + u : W_A \in \Omega_{I-RA}, u \in \text{Ker } (I - RA)\}. \quad (11)$$

Xét bài toán giá trị ban đầu:

$$\begin{aligned} Dx &= Ax + y, \\ Fx &= \bar{x}_0, \bar{x}_0 \in \text{Ker } D, \end{aligned}$$

trong đó $A\{x_n\} = \{a_n\}$, $a_n = 0$, $0 \leq n \leq 1$, $a_2 = x_3$, $a_n = x_{n+1} - x_n$, $n \geq 3$ và $y = \{y_n\}$, $y_0 + y_1 + y_2 = 0$, $y_n = 0$, $n \geq 3$. Toán tử $(I - RA)$ khả nghịch suy rộng, bởi vì

$$(I - RA)(I - RA)\{x_n\} = (I - RA)\{x_n\} = \{u_n\}, u_n = x_n, 0 \leq n \leq 2, u_n = 0, n \geq 3.$$

Hơn nữa, ta có $Ry + \bar{x}_0 \in \text{Im}(I - RA)$ và

$$\text{Ker } (I - RA) = \{\{v_n\} : v_n \in R, v_n = 0, 0 \leq n \leq 3\}.$$

Thì bài toán có nghiệm

$$x = (Ry + \overline{x_0}) + v, v \in \text{Ker}(I - RA). \quad (12)$$

3.2. Bài toán giá trị ban đầu đối với đa thức tổng quát

Cho D là toán tử khả nghịch phải, F là toán tử ban đầu của D tương ứng với $R \in P_D$. Bài toán giá trị ban đầu đối với đa thức tổng quát của toán tử khả nghịch phải là bài toán tìm nghiệm của phương trình tổng quát dạng

$$Q[D]x = y, y \in X \quad (13)$$

thỏa mãn các điều kiện ban đầu

$$FD^j x = y_j, y_j \in \text{Ker } D \ (j = 0, 1, \dots, M + N - 1), \quad (14)$$

ở đây đa thức $Q[D]$ xác định bởi

$$Q[D] := \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N D^m A_{mn} D^n, \quad (15)$$

với $M, N \in \mathbb{N}$, $A_{mn} \in L(X)$ ($m = 0, 1, \dots, M; n = 0, 1, \dots, N$) và $A_{MN} = I$. Hơn nữa, giả sử $A_{mn}X_{M+N-n} \subset X_m$ ($m = 0, 1, \dots, M; n = 0, 1, \dots, N; m + n < M + N$), $X_j := \text{dom } D^j$.

Định nghĩa 8. Đặt

$$Q' := \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N R^{M-m} B_{mn} R^{N-n}, \quad (16)$$

ở đây

$$B_{mn} = \begin{cases} A'_{0n} & \text{nếu } m=0 \\ A'_{mn} - \sum_{\mu=m}^M FD^{\mu-m} A'_{\mu n} & \text{nếu } m \neq 0 \end{cases} \quad A'_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } m = M \text{ và } n = N \\ A_{mn} & \text{nếu } m \neq M, n \neq N \end{cases}$$

Khi đó $I + Q'$ được gọi là toán tử giải đối với bài toán đã cho.

Bổ đề 2. Giả sử

$$Q := \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N R^{M+N-m} B_{mn} D^N. \quad (17)$$

Khi đó, các đồng nhất thức sau nghiệm đúng

$$\begin{aligned} QR^N &= R^N Q'; D^{M+N} (I + Q) = Q[D]; \\ FD^j (I + Q) &= FD^j \ (j = 0, 1, \dots, M + N - 1). \end{aligned}$$

Bổ đề 3. Bài toán giá trị ban đầu đặt đúng đắn nếu và chỉ nếu toán tử $I + Q$ khả nghịch trên X_{M+N} .

Định lý 10. Bài toán giá trị ban đầu là đặt đúng đắn khi và chỉ khi toán tử giải $I + Q'$ khả nghịch.

Định lý 11. Cho $D \in R(X)$, $R \in P_D$ và $F \in \mathcal{F}_D$ là toán tử ban đầu của D tương ứng với R . Khi đó:

(i) Nếu toán tử giải $I + Q'$ khả nghịch thì bài toán đặt đúng đắn và có nghiệm duy nhất

$$x = M_Q(R^{M+N}y + \sum_{j=0}^{M+N-1} R^j y_j),$$

trong đó

$$M_Q := I - R^N(I + Q')^{-1}Q_1, \quad Q_1 = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N R^{M-m} B_{mn} D^n.$$

(ii) Nếu toán tử giải $I + Q'$ khả nghịch phải và $\dim \ker(I + Q') \neq 0$ thì bài toán không đặt đúng đắn. Tuy nhiên, bài toán luôn có nghiệm

$$x = R_Q(R^{M+N}y + \sum_{j=0}^{M+N-1} R^j y_j) + z, \quad (18)$$

ở đây $R_Q = I - R^N R_Q' H$, $R_Q' \in P_{1-Q'}$ và $z \in \ker(I + Q)$ là tùy ý.

(ii) Nếu toán tử giải $I + Q'$ khả nghịch trái nhưng không khả nghịch thì bài toán không đặt đúng đắn. Tuy nhiên, bài toán có nghiệm khi và chỉ khi

$$R^{M+N}y + \sum_{j=0}^{M+N-1} R^j y_j \in (I + Q)X_{M+N}. \quad (19)$$

Điều kiện (19) thỏa mãn thì bài toán cũng có nghiệm duy nhất

$$x = L_Q(R^{M+N}y + \sum_{j=0}^{M+N-1} R^j y_j), \quad (20)$$

ở đây $L_Q = I - R^N L_Q' H$ và $L_Q' \in \Lambda_{I+Q'}$.

2.3. Bài toán giá trị ban đầu đối với phương trình toán tử khả nghịch suy rộng

Cho $V \in W(X)$, với $\dim(\ker V) \neq 0$ (nghĩa là V khả nghịch suy rộng nhưng không khả nghịch); $F^{(r)}$, $F^{(l)}$ là các toán tử ban đầu phải, trái của V ứng với $W \in \Omega_V^1$. Giả sử $A \in L_0(X)$ sao cho $A(\text{dom } V) \subset \text{Im } V$.

Xét bài toán giá trị ban đầu

$$Vx = Ax + y, y \in X, F^{(r)}x = x_0, x_0 \in \ker V. \quad (21)$$

Bổ đề 4. Bài toán giá trị ban đầu (21) có nghiệm khi và chỉ khi

$$Wy + x_0 \in (I - WA)X_y, \quad (22)$$

ở đây X_y được xác định bởi $X_y = \{x \in \text{dom } V : F^{(l)}(Ax + y) = 0\}$, $y \in X$.

Xét bài toán giá trị ban đầu

$$(P + DQAQ)x = y, Qx = x_0, x_0 \in \ker P. \quad (23)$$

Để kiểm tra được $P^2 = P$, $Q^2 = Q$, $PQ = QP = 0$. Do đó, $P \in W(X)$ và $P \in \Omega_V^1$. Từ đó suy ra các toán tử ban đầu phải, trái của P tương ứng với P được xác định bởi $F^{(r)} = I - PP = Q$ và $F^{(l)} = I - PP = Q$.

Do $QDQ = 0$ nên ta có điều kiện cần và đủ để bài toán (23) tồn tại nghiệm là $y = 0$. Khi đó

$$(I + PDAQ)x = Py + x_0$$

và vì toán tử $I + PDAQ$ khả nghịch và $(I + PDAQ)^{-1} = I - PDAQ$, nên nghiệm của bài toán xác định như sau $x = Py + x_0 - PDAx_0$.

4. Tính điều khiển được của hệ suy biến mô tả bởi toán tử khả nghịch phải

Tính điều khiển được của hệ mô tả bởi toán tử khả nghịch phải được xét đến đầu tiên bởi N. D. Quyết trong trường hợp toán tử giải khả nghịch (xem [21]-[25]), sau đó A. Pogorzelec, N. V. Mậu đã xét tính điều khiển của hệ này trong các trường hợp toán tử giải khả nghịch một phía, khả nghịch suy rộng (xem [7]-[14]). ở mục này, tính điều khiển được của các hệ suy biến mô tả bởi toán tử khả nghịch phải được nghiên cứu. Một số kết quả về điều kiện đủ, điều kiện cần và đủ để hệ điều khiển được sẽ được chứng minh.

Cho X, Y và U là các không gian tuyến tính trên cùng một trường vô hướng $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F} = \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$). Giả sử $D \in R(X)$, $\dim(\text{Ker } D) \neq 0$; $F \in \mathcal{F}_D$ là toán tử ban đầu của D tương ứng với $R \in P_D$, các toán tử $A, B \in L_0(X)$, với $A \neq 0$ và không khả nghịch, $C \in L_0(U \rightarrow X)$, $A_1 \in L_0(X \rightarrow Y)$ và $B_1 \in L_0(U \rightarrow Y)$.

Xét hệ điều khiển suy biến (ký hiệu là (DS)) dạng:

$$ADx = Bx + Cu, RCU \oplus \{x_0\} \subset \{I - R[(I - A)D + B]\} \text{dom } D,$$

$$Fx = x_0, x_0 \in \text{Ker } D, y = A_1x + B_1u.$$

Các không gian X và U được gọi là *không gian trạng thái* (space of states) và *không gian điều khiển* (space of controls) tương ứng. Các phần tử $x \in X$ và $u \in U$ được gọi là *trạng thái* và *điều khiển* tương ứng. Phần tử $x_0 \in \text{Ker } D$ được gọi là *trạng thái ban đầu* (initial state). Mỗi cặp $(x_0, u) \in (\text{Ker } D) \times U$ được gọi là *đầu vào* (input) và y xác định bởi (2.28) được gọi là *đầu ra* (output) của hệ tương ứng với đầu vào. Do đó, không gian $(\text{Ker } D) \times U$ gọi là *không gian vào* và tập các y tương ứng trong Y là *không gian đầu ra*. Thông thường ta xét hệ điều khiển với $A_1 = I$ và $B_1 = 0$, nghĩa là với $Y = X$ và đầu ra $y = x$, một hệ như vậy ta sẽ ký hiệu bởi $(DS)_0$.

Ta đã chứng minh được bài toán giá trị ban đầu có nghiệm khi và chỉ khi

$$RCu + x_0 \in \{I - R[(I - A)D + B]\} \text{dom } D$$

và khi đó bài toán tương đương với

$$\{I - R[(I - A)D + B]\}x = RCu + x_0.$$

Do đó, bao hàm thức $RCU \oplus \{x_0\} \subset \{I - R[(I - A)D + B]\} \text{dom } D$ là điều kiện cần và đủ để bài toán có nghiệm đối với mọi $u \in U$. Ký hiệu $\Phi_i (i = 1, 2, 3, 4)$ là các tập được xác định đối với mọi $x_0 \in \text{Ker } D, u \in U$ như sau:

- (i) Nếu $A - BR \in R(X)$ và $R_{AB} \in P_{A-BR}$, thì $\Phi_1(x_0, u) := \{x = T_1(RCu + x_0) + \frac{1}{2}\}$

trong đó $\mathcal{H} \in \text{Ker } \{I - R[(I - A)D + B]\}$, $T_1 = I + RR_{AB}[(I - A)D + B]$;

(ii) Nếu $A - BR \in \mathcal{A}(X)$ và $L_{AB} \in \Lambda_{A-BR}$, thì

$$\Phi_2(x_0, u) = \{x = [I + RL_{AB}[(I - A)D + B]](RCu + x_0)\};$$

(iii) Nếu $A - BR$ khả nghịch thì

$$\Phi_3(x_0, u) = \{x = [I + R(A - BR)^{-1}[(I - A)D + B]](RCu + x_0)\};$$

(iv) Nếu $A - BR \in W(X)$ và $W_{A,B} \in \Omega_{A-BR}$, thì $\Phi_4(x_0, u) := \{x = T_4(RCu + x_0) + \mathcal{H}\}$, trong đó $\mathcal{H} \in \text{Ker } \{I - R[(I - A)D + B]\}$, $T_4 = I + RW_{A,B}[(I - A)D + B]$.

Định nghĩa 9. Cho hệ suy biến $(DS)_0$ và $F_i \in \mathcal{F}_D$ ($i = 1, 2, 3, 4$) là các toán tử ban đầu tùy ý của D (không nhất thiết phân biệt nhau).

(i) Mỗi trạng thái $x_1 \in \text{Ker } D$ được gọi là F_i -đạt được từ trạng thái ban đầu $x_0 \in \text{Ker } D$ nếu tồn tại điều khiển $u \in U$ sao cho $x_1 \in F_i\Phi_i(x_0, u)$. Khi đó x_1 được gọi là *trạng thái kết thúc*.

(ii) Hệ $(DS)_0$ được gọi là F_i -điều khiển được nếu đối với mọi trạng thái ban đầu $x_0 \in \text{Ker } D$, ta có $F_i(\text{Rang}_{U, x_0}\Phi_i) = \text{Ker } D$.

(iii) Mỗi hệ $(DS)_0$ được gọi là F_i -điều khiển được tới $x_1 \in \text{Ker } D$ nếu như $x_1 \in F_i(\text{Rang}_{U, x_0}\Phi_i)$, đối với mọi trạng thái ban đầu $x_0 \in \text{Ker } D$. Trường hợp $x_1 = 0$, ta còn nói hệ $(DS)_0$ là F_i -điều khiển được về 0.

Bổ đề 5. Cho hệ suy biến $(DS)_0$ và các toán tử $F_i \in \mathcal{F}_D$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Giả sử hệ $(DS)_0$ là F_i -điều khiển được về 0 và

$$F_i(T_i \text{Ker } D + \text{Ker } \{I - R[(I - A)D + B]\}) = \text{Ker } D.$$

Khi đó, mọi trạng thái $x_1 \in \text{Ker } D$ là F_i -đạt được từ 0.

Định lý 12. Hệ suy biến $(DS)_0$ là F_i -điều khiển được ($i = 1, 2, 3, 4$).

Định lý 13. Cho hệ suy biến $(DS)_0$ và các toán tử ban đầu $F_i \in \mathcal{F}_D$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Lấy $T_1 = I + RR_{AB}[(I - A)D + B]$ nếu $A - BR \in R(X)$, $T_2 = I + RL_{AB}[(I - A)D + B]$ nếu $A - BR \in \mathcal{A}(X)$, $T_3 = I + R(A - BR)^{-1}[(I - A)D + B]$ nếu toán tử $A - BR$ khả nghịch và $T_4 = I + RW_{A,B}[(I - A)D + B]$ nếu $A - BR \in W(X)$. Giả sử rằng $D \in L(X, X')$, $A, B, R \in L_0(X, X')$ và $C \in L_0(U \rightarrow X, X' \rightarrow U')$. Khi đó hệ $(DS)_0$ là F_i -điều khiển được nếu và chỉ nếu

$$\text{Ker } C^*R^*T_i^*F_i^* = \{0\}, \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (24)$$

Định lý 14. Giả sử hệ $(DS)_0$ là F_i -điều khiển được. Khi đó hệ này là F_i -điều khiển được đối với mọi toán tử ban đầu $F'_i \in \mathcal{F}_D$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

Định lý 15. Cho hệ suy biến $(DS)_0$ và các toán tử ban đầu $F_i \in \mathcal{F}_D$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Khi đó hệ $(DS)_0$ là F_i -điều khiển được nếu và chỉ nếu nó là F_i -điều khiển được tới mọi phần tử $v' \in F_iT_iRX$.

5. Tính điều khiển được của hệ suy biến mô tả bởi toán tử khả nghịch suy rộng

Cho X và U là các không gian tuyến tính trên cùng một trường vô hướng $\mathcal{F} = R$ hoặc C). Giả sử $V \in W(X)$, $\dim(\ker V) \neq 0$. Lấy $F^{(r)} \in \mathcal{F}_V^{(r)}$ là toán tử ban đầu phải của V tương ứng với $W \in \Omega_V^1$; các toán tử $A, B \in L_0(X)$, $A \neq 0$ và không khả nghịch, $C \in L_0(U, X)$.

Xét hệ điều khiển suy biến của toán tử khả nghịch suy rộng $(DS)_0$ dạng

$$AVx = Bx + Cu, CU \oplus \{Bx_0\} \subset (A - BW)(\text{Im}V), F^{(r)}x = x_0, x_0 \in \ker V.$$

Bài toán trên tương đương với $(A - BW)Vx = Cu + Bx_0$.

Do đó, bao hàm thức $CU \oplus \{Bx_0\} \subset (A - BW)(\text{Im}V)$ thỏa mãn là điều kiện cần và đủ để bài toán có nghiệm đối với mọi $u \in U$.

Định lý 16. Hệ suy biến $(DS)_0$ là $F_1^{(r)}$ - điều khiển được.

Định lý 17. Giả sử $F_1^{(r)} \in \mathcal{F}_V^{(r)}$ là toán tử ban đầu phải của V , toán tử $T \in \Omega_{A-BW}$ tùy ý, $V \in L(X, X')$, $A, B, W \in L_0(X, X')$ và $C \in L_0(U \rightarrow X, X' \rightarrow U')$. Khi đó hệ $(DS)_0$ là $F_1^{(r)}$ - điều khiển được nếu và chỉ nếu

$$\ker C^*T^*W^*(F_1^{(r)})^* = \{0\}.$$

Định lý 18. Giả sử hệ $(DS)_0$ là $F_1^{(r)}$ - điều khiển được. Khi đó hệ này là $F_2^{(r)}$ - điều khiển được đối với tùy ý toán tử ban đầu $F_2^{(r)} \in \mathcal{F}_V^{(r)}$ □

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Z. Binderman (1992), "Cauchy integral formula induced by right invertible operators", *Demonstratio Math.*, Vol. 25, pp. 671-690.
- [2] Z. Binderman (1993), "Applications of sequential shifts to an interpolation problem", *Collect. Math.*, Vol. 44, pp. 47-57.
- [3] R. E. Kalman (1960), "Contribution to the theory of optimal control", *Bol. Soc. Math. Mexicana*, Vol. 5, pp. 102-119.
- [4] W. Z. Karwowski and D. Przeworska - Rolewicz (1992), "Linear boundary value problems for polynomials in right invertible operators", *Demonstratio Math.*, Vol. 25, pp. 325- 340.
- [5] V. I. Korobov and N. K. Son (1980), "Controllability of linear systems with constrained controls in Banach spaces", *Diff. Equations*, Vol. 16, pp. 1010-1022 (in Russian).
- [6] E. B. Lee and L. Markus (1967), *Foundations of Optimal Control Theory*, John Wiley & Sons., New York-London-Sydney.
- [7] N. V. Mau (1990), "On ill-determined equations in right invertible operator of order one in non-commutative case", *Math. Nachr.*, Vol. 147, pp. 95-105.
- [8] N. V. Mau (1990), "Controllability of general linear systems with right invertible operators", Preprint No. 472, Institute of Mathematics, Polish Acad. Sci., Warszawa.
- [9] N. V. Mau (1992), "Properties of generalized almost inverses", *Demonstratio Math.*, Vol. 25, pp. 493- 511.
- [10] N. V. Mau (1992), *Boundary value problems and controllability of linear systems with right invertible operators*, Dissertationes Math., CCCXVI, Warszawa.
- [11] N. V. Mau, (2005) "Algebraic elements and boundary value problems in linear spaces", *VNU Publ. House*, Hanoi 2005.
- [12] A. Pogorzalet (1983), "Initial value problems with ill-determined linear systems with right invertible operators", *Demonstratio Math.*, Vol. 16, pp. 407- 420.
- [13] A. Pogorzalet (1983), *Solvability and controllability of ill-determined systems with right invertible operators*, Ph.D.Diss., Institute of Mathematics, Technical University of Warsaw.

- [14] A. Pogorzalet (1985), "Solvability of linear systems of the first order with right invertible operators", *Demonstratio Math.*, Vol. 18, pp. 1039-1063.
- [15] L. S. Pontriagin, V. G. Boltyanski, R. V. Gamkrelidze (1969), *Theory of Optimal Processes*, Nauka, Moscow (in Russian).
- [16] D. Przeworska-Rolewicz (1973), "Algebraic theory of right invertible operators", *Studia Math.*, Vol. 48, pp. 129-143.
- [17] D. Przeworska-Rolewicz (1973), "Extension of operational calculus", *Control and Cybernetics*, Vol. 2, pp. 5-14.
- [18] D. Przeworska-Rolewicz and H. von Trotha (1981), "Right inverses in D-R algebras with unit", *J. Integral Equation*, Vol. 3, pp. 245-259.
- [19] D. Przeworska-Rolewicz (1988), *Algebraic Analysis*, PWN and Reidel, Warszawa-Dordrecht.
- [20] V. N. Phat, K. Balachandran (1992), "On the controllability of singular systems in Banach spaces", *Acta Mathematica Vietnamica*, Vol. 17, pp. 67-76.
- [21] N. D. Quyet (1978), "On linear systems described by right invertible operators acting in a linear space", *Control and Cybernetics*, Vol. 7, pp. 33-45.
- [22] N. D. Quyet (1977), "Controllability and observability of linear systems described by the right invertible operators in linear space", Preprint No. 113, Institute of Mathematics, Polish Acad. Sci., Warszawa.
- [23] N. D. Quyet (1978), "A minimizing problem of a quadratic functional for a system described by right invertible operators in Hilbert space", *Control and Cybernetics*, Vol. 7, pp. 27-36.
- [24] N. D. Quyet (1981), "On the F-controllability of the system described by the right invertible operators in the linear spaces", *Methods of Math. Programming*, System Research Institute, Polish Acad. of Sci., PWN-Polish Sci. Pub., Warszawa, 223-226.
- [25] N. D. Quyet, H. V. Thi (2002), "The controllability of degenerate system described by right invertible operators", *VNU. Journal of Science, Mathematics-Physics*, Vietnam National University, Ha Noi, T.XVIII, No3, 37-48.
- [26] S. Rolewicz (1987), *Functional Analysis and Control Theory*, PWN-Polish Scientific Publishers and D. Reidel, Dordrecht.
- [27] N. K. Son (1981), "Controllability of linear discrete-time systems with constrained controls in Banach spaces", *Control and Cybernetics*, Vol. 10, pp. 5-16.
- [28] H. V. Thi (2005), "Degenerate systems described by generalized invertible operators and controllability", *Demonstratio Mathematica*, Vol. 38 (No 2), pp. 419-430.
- [29] V. N. Phat (2001), *Nhập môn Lý thuyết điều khiển toán học*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.
- [30] H. V. Thi (1997), *Bài toán giá trị biên trong lớp các toán tử khả nghịch phải và một số kết quả về tính điều khiển được*, Luận văn thạc sĩ toán học, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội.

Abstract

The theory of right invertible operators started with works of Przeworska - Rolewicz and has been developed by her and many other mathematicians.

In this report we introduce and apply the notion of generalized right invertible operators and construct the corresponding Taylor-Gontcharov formulae and then investigate equations with generalized right invertible operators. And then apply to study the controllability of linear systems with the generalized right invertible operators.