

# MÔ HÌNH TOÁN HỌC QUÁ TRÌNH KẾT ĐÔNG THỰC PHẨM BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN KẾT HỢP VỚI BIẾN ĐỔI ENTHALPY – KIRCHHOFF

Đặng Văn Lái\*

Võ Phú Quốc\*\*

**TÓM TẮT:** Mô hình toán học quá trình kết đông thực phẩm bằng phương pháp phần tử hữu hạn Galerkin kết hợp với biến đổi enthalpy – Kirchhoff và phương pháp quy tụ được trình bày trong bài báo này. Kết quả tính toán theo phương pháp nêu trên khá phù hợp so với thí nghiệm, sai số không quá 10 %.

## 1. Đặt vấn đề

Thời gian kết đông thực phẩm không chỉ ảnh hưởng đến chất lượng sản phẩm mà còn đến tiêu hao năng lượng trong các nhà máy đông lạnh. Tính thời gian kết đông thực phẩm có các hình dạng chuẩn thường sử dụng công thức Plank (1913) [4]. Tuy nhiên, trong thực tế việc sử dụng công thức Plank để tính thời gian kết đông thực phẩm có sai số rất lớn.

Hiện nay, có 2 hướng nghiên cứu nhằm hoàn thiện công thức Plank:

- Phương pháp giải tích: chia quá trình kết đông thành 3 giai đoạn và thời gian kết đông thực phẩm là tổng thời gian của các giai đoạn này;

- Phương pháp số: xấp xỉ hóa phương trình vi phân dẫn nhiệt Fourier bằng hệ phương trình tuyến tính nhờ các phương pháp sai phân hữu hạn, phần tử hữu hạn, khối hữu hạn và sau đó giải chúng thường bằng các phương pháp lặp. Với phương pháp số, nhiệt chuyển pha được xem như nhiệt dung riêng tổng (nhiệt dung riêng hiệu quả) hoặc nguồn nhiệt [5].

Xây dựng mô hình toán học quá trình kết đông thực phẩm bằng phương pháp phần tử hữu hạn Galerkin kết hợp với biến đổi enthalpy – Kirchhoff và phương pháp quy tụ được trình bày trong bài báo này.

## 2. Cơ sở lý thuyết

### 2.1. Phương trình vi phân dẫn nhiệt Enthalpy – Kirchhoff

Phương trình vi phân dẫn nhiệt phi tuyến Fourier 1 chiều có dạng:

$$\rho(T)c_p(T)\left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{p\lambda(T)}{x}\frac{\partial T}{\partial x} \quad (1)$$

$P = 0$  đối với tấm phẳng rộng vô hạn,  $P = 1$  - hình trụ dài vô hạn,  $p = 2$  - hình cầu.

Khi kết đông nước trong thực phẩm kết tinh, do vậy các thông số nhiệt vật lý của nó thay đổi và được xác định [4]:

---

\* TS, Trường Cao đẳng Công nghiệp Tuy Hòa.

\*\* ThS, Trường Cao đẳng Công nghiệp Tuy Hòa.

Khối lượng riêng: 
$$\rho(T) = \frac{1}{\sum_{k=1}^m \frac{g_k}{\rho_k(T)}} \quad (2)$$

Hệ số dẫn nhiệt: 
$$\lambda(T) = \sum_{k=1}^m g_k^v(T) \cdot \lambda_k(T) \quad (3)$$

Nhiệt dung riêng tổng: 
$$c_p(T) = \sum_{k=1}^m g_k \cdot c_p^k(T) - L_0(g_w - 0,4g_p) \frac{T_f}{T^2} \quad (4)$$

$g_{ice}(T)$  – tỷ lệ nước đóng băng được xác định theo công thức Miles, 1974:

$$g_{ice}(T) = \left(1 - \frac{0,4 \cdot g_p}{g_w}\right) \left(1 - \frac{T_f}{T}\right), \quad (5)$$

trong đó,

$g_k$  – hàm lượng các chất trong thực phẩm tính theo khối lượng, %;

$g_k^v(T) = \frac{\rho(T)}{\rho_k(T)} g_k$  – hàm lượng các chất trong thực phẩm tính theo thể tích, %;

$g_p$  – hàm lượng protein trong thực phẩm, %.

$g_w$  – hàm lượng nước trong thực phẩm, %

$L_0 = 333600 \text{ J/kg}$  – ẩn nhiệt kết tinh nước;

$\lambda_k(T)$  – hệ số dẫn nhiệt của các chất trong thực phẩm,  $W/(m \cdot ^\circ C)$ ;

$c_p^k(T)$  – nhiệt dung riêng của các chất trong thực phẩm,  $J/(kg \cdot ^\circ C)$ ;

$\rho_k(T)$  – khối lượng riêng của các chất trong thực phẩm,  $kg/m^3$ .

Nhiệt độ Kirchhoff  $\psi(T)$  và enthalpy  $H(T)$  được xác định [5]:

$$\psi(T) = \int_{T_{ref}}^T \lambda(T) dT, \quad W/m \quad (6)$$

$$H(T) = \int_{T_{ref}}^T \rho(T) c_p(T) dT, \quad J/m^3 \quad (7)$$

$T_{ref}$  – nhiệt độ chuẩn, chọn  $-40^\circ C$ .

Thay (6), (7) vào (1), phương trình vi phân dẫn nhiệt với 2 biến mới là enthalpy và nhiệt độ Kirchhoff có dạng:

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{p}{x} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (8)$$

Để giải phương trình vi phân (8) ta cần thêm các điều kiện ban đầu và điều kiện biên:

Điều kiện ban đầu:

$$H_{\tau=0} = H_0 = \text{const} \quad (9)$$

Điều kiện biên loại 3:

$$h_0 \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \alpha (T - T_a) \quad (10)$$

$h_0$  – vector đơn vị, pháp tuyến bề mặt trao đổi nhiệt.

## 2.2. Phương pháp phần tử hữu hạn Galerkin

Để tìm nghiệm phương trình (8), tác giả bài báo sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn Galerkin. Theo phương pháp này miền tính toán được rời rạc hóa chia ra nhiều miền nhỏ  $V$ . Mỗi miền nhỏ được xem là 1 phần tử ( $e$ ) và giá trị  $\theta$  gần đúng trong mỗi phần tử ( $e$ ) được xác định [3,5]:

$$\theta^{(e)}(x, \tau) = N^{(e)}(x) \cdot \theta^{(e)}(\tau) \quad (11)$$

trong đó,

$\theta^{(e)}(\tau) = [\theta_i^{(e)} \theta_j^{(e)}]^T$  - vector enthalpy  $H$  hoặc nhiệt độ  $T$ , nhiệt độ  $\psi$  Kirchhoff;

$N^{(e)}(x) = [N_i^{(e)} N_j^{(e)}]$  - vector hàm nội suy phần tử ( $e$ );  $i, j$  - các nút phần tử ( $e$ ).

Theo phương pháp Galerkin, tích phân theo miền con  $V$  của tích hàm nội suy  $N$  và phần dư của phương trình (1) phải bằng 0:

$$\int_V N^T \left[ \frac{\partial H}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{p}{x} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] dV = 0 \quad (12)$$

Sau khi biến đổi phương trình ma trận đặc trưng cho mỗi phần tử ( $e$ ) có dạng [3,5]:

$$C^{(e)} \frac{dH^{(e)}}{d\tau} + K^{(e)} \psi^{(e)}(\tau) + M^{(e)} T(\tau) = f^{(e)} \quad (13)$$

$$\text{ở đây, ma trận nhiệt dung riêng: } C^{(e)} = \int_V N^T N dV; \quad (14)$$

$$\text{ma trận độ dẫn nhiệt: } K^{(e)} = \int_V B^T B dV - \int_V \frac{p}{x} N^T B dV; \quad (15)$$

$$\text{ma trận trao đổi nhiệt đối lưu: } M^{(e)} = \int_S \alpha N^T N dS \quad (16)$$

$$\text{véctor cột tải nhiệt: } f^{(e)} = \int_S \alpha T_a N^T dS \quad (17)$$

Ghép các ma trận nhiệt dung riêng  $C^{(e)}$ , ma trận độ dẫn nhiệt  $K^{(e)}$ , ma trận trao đổi nhiệt đối lưu  $M^{(e)}$  và các véctor tải nhiệt  $f^{(e)}$  của các phần tử để tạo ra ma trận nhiệt dung riêng  $C$ , ma trận độ dẫn nhiệt  $K$ , ma trận trao đổi nhiệt đối lưu  $M$  và véctor tải nhiệt  $F$  chung cho toàn hệ và thiết lập hệ phương trình cho toàn miền tính toán như sau:

$$C \frac{dH}{d\tau} + K\psi + MT = F \quad (18)$$

Biểu thức (18) là hệ phương trình vi phân cấp 1 với ba biến số chưa biết  $H$ ,  $\psi$ , và  $T$ . Tuy nhiên, các biến  $\psi$ ,  $T$  là hàm của enthalpy  $\psi(H)$  và  $T(H)$ . Do vậy, hệ phương trình (18) có dạng:

$$\frac{dH}{d\tau} = C^{-1}(F - K\psi - MT) = f(H) \quad (19)$$

Giải hệ phương trình này sẽ cho nghiệm enthalpy  $H(\tau)$ . Vector nhiệt độ  $T(\tau)$  được xác định nhờ hàm  $T(H)$ .

### 3. Ứng dụng mô hình toán học trên để khảo sát quá trình kết đông tôm

Giả thiết tôm có dạng hình trụ dài vô hạn đường kính  $d = 12 \text{ mm}$ , hàm lượng và các thông số nhiệt vật lý của các thành phần được xác định theo bảng 1 [4]:

**Bước 1.** Hình trụ được rời rạc theo bán kính bằng  $n = 6$  phần tử và  $n+1 = 7$  nút. Các phần tử được ký hiệu (1),(2),(3), (4), (5),(6) ; các nút được ký hiệu 1,2,3,...,7 (Hình 1).

Chiều dài mỗi phần tử:  $\Delta R = R/n$ ;

Tọa độ nút  $i$  và  $j$  được xác định:  $x_i = (i-1)\Delta R$ ,  $x_j = i\Delta R$  với  $i = 1 \dots n$ ;

Thể tích phần tử (e):  $V = \pi(x_j^2 - x_i^2)h = \pi\Delta R^2 h(2i-1)$  với  $h$  - chiều cao hình trụ;

Phân thể tích của phần tử (e):  $dV = 2\pi h x dx$ .

Bảng 1 – Các thông số nhiệt vật lý của tôm

| Thành phần                                | Hàm lượng $g_k$ , % | Khối lượng riêng $\rho_k(T)$ , $\text{kg/m}^3$                        | Hệ số dẫn nhiệt $\lambda_k(T)$ , $\text{W/(m}\cdot^\circ\text{C)}$       | Nhiệt dung riêng $c_p^k(T)$ , $\text{J/(kg}\cdot^\circ\text{C)}$ |
|-------------------------------------------|---------------------|-----------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| Nước                                      | 75,85 - $g_{ice}$   | $9,9718 \cdot 10^2 + 3,1439 \cdot 10^{-3}T - 3,7574 \cdot 10^{-3}T^2$ | $5,7109 \cdot 10^{-1} + 1,7625 \cdot 10^{-3}T - 6,7036 \cdot 10^{-6}T^2$ | $4,1762 - 9,0864 \cdot 10^{-5}T + 5,4731 \cdot 10^{-6}T^2$       |
| Nước kết tinh, $T_f = -2,2^\circ\text{C}$ | Xác định theo (5)   | $9,1689 \cdot 10^2 - 1,307 \cdot 10^{-1}T$                            | $2,2196 - 6,2489 \cdot 10^{-3}T + 1,0154 \cdot 10^{-4}T^2$               | $2,0623 + 6,0769 \cdot 10^{-3}T$                                 |
| Protein                                   | 20,31               | $1,3299 \cdot 10^3 - 5,184 \cdot 10^{-1}T$                            | $1,7881 \cdot 10^{-1} + 1,1958 \cdot 10^{-3}T - 2,7178 \cdot 10^{-6}T^2$ | $2,0082 + 1,2089 \cdot 10^{-3}T - 1,3129 \cdot 10^{-6}T^2$       |
| Chất béo                                  | 1,73                | $9,2559 \cdot 10^2 - 4,1757 \cdot 10^{-1}T$                           | $1,8071 \cdot 10^{-1} - 2,7604 \cdot 10^{-3}T - 1,7749 \cdot 10^{-7}T^2$ | $1,9842 + 1,4733 \cdot 10^{-3}T - 4,8008 \cdot 10^{-6}T^2$       |
| Hydrate cacbon                            | 0,91                | $1,5991 \cdot 10^3 - 3,1046 \cdot 10^{-1}T$                           | $2,0141 \cdot 10^{-1} + 1,3874 \cdot 10^{-3}T - 4,3312 \cdot 10^{-6}T^2$ | $1,5488 + 1,9625 \cdot 10^{-3}T - 5,9399 \cdot 10^{-6}T^2$       |
| Tro                                       | 1,2                 | $2,4238 \cdot 10^3 - 2,8063 \cdot 10^{-1}T$                           | $3,2962 \cdot 10^{-1} + 1,4011 \cdot 10^{-3}T - 2,9069 \cdot 10^{-6}T^2$ | $1,0926 + 1,8896 \cdot 10^{-3}T - 3,6817 \cdot 10^{-6}T^2$       |

**Bước 2.** Chọn hàm nội suy enthalpy và hàm dạng trong các phần tử 1 chiều:

Hàm nội suy Lagrange bậc nhất được sử dụng để xác định tọa độ và enthalpy trong các phần tử:  $N = [N_i N_j] = \frac{1}{\Delta R}[(x_j - x)(x - x_i)]$  ; như vậy đạo hàm của hàm nội

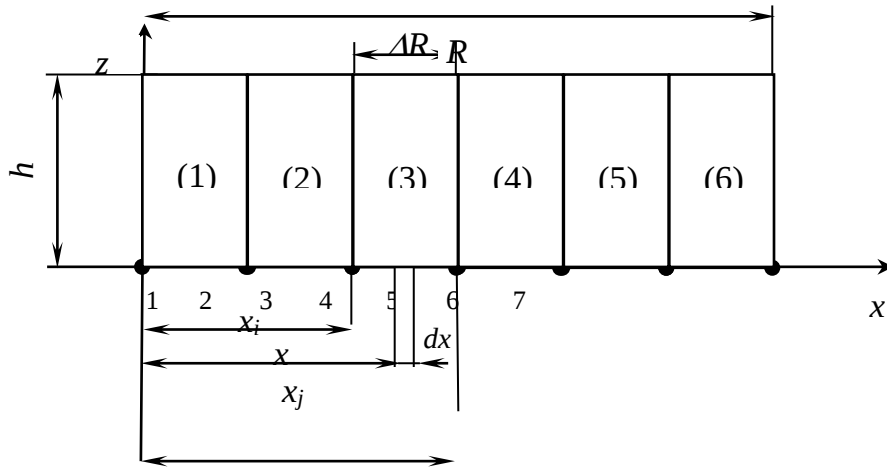
suy  $B = \frac{1}{\Delta R}[-1 \ 1]$ .

**Bước 3.** Xác định các ma trận đặc trưng của phần tử đối với hình trụ  $p=1$ :

Mật trận nhiệt dung riêng:

$$\begin{aligned}
C^{(1..6)} &= \int_V N^T N dV = \int_{\Delta R} N^T N 2\pi h x dx = 2\pi h \int_{\Delta R} \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & N_j \end{bmatrix} (N_i x_i + N_j x_j) dx = \\
&= \frac{\pi h \Delta R}{6} \begin{bmatrix} (3x_i + x_j) & (x_i + x_j) \\ (x_i + x_j) & (x_i + 3x_j) \end{bmatrix} = \frac{\pi h R^2}{6n^2} \begin{bmatrix} 4i-3 & 2i-1 \\ 2i-1 & 4i-1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Để đơn giản quá trình tính toán, phương pháp quy tụ được sử dụng. Theo phương pháp này, mọi biến đổi trạng thái nhiệt trong mỗi phân tử chỉ xảy ra tại các nút của nó [5], nghĩa là:  $C^{(1..6)} = \frac{\pi h R^2}{3n^2} \begin{bmatrix} 3i-2 & 0 \\ 0 & 3i-1 \end{bmatrix}$ .



Hình 1: Rời rạc miền tính toán theo phương pháp phần tử hữu hạn Galerkin

Ma trận độ dẫn nhiệt :

$$V_i \int_V B^T B dV = \frac{V}{\Delta R^2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} = \pi h (2i-1) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\int_V \frac{1}{x} N^T B dV = \frac{2\pi h}{\Delta R} \int_{\Delta R} \begin{bmatrix} -N_i & N_i \\ -N_j & N_j \end{bmatrix} dx = \pi h \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{nên } K^{(1..6)} = \int_V B^T B dV - \int_V \frac{1}{x} N^T B dV = 2\pi h \begin{bmatrix} i & -i \\ -i+1 & i-1 \end{bmatrix}.$$

Ma trận trao nhiệt đối lưu và ma trận tải nhiệt được xác định đối với phần tử (6), nút 7 tại bề mặt trao đổi nhiệt, các phần tử còn lại số hạng này bằng 0:

$$M^{(6)} = \int_S \alpha N^T N dS = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} S = 2\alpha \pi R h \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad M^{(1..5)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$f^{(6)} = \int_S \alpha T_a N^T dS = \alpha T_a \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} S = 2\alpha \pi R h T_a \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad f^{(1..5)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bước 4. Lắp ghép các ma trận đặc trưng các phần tử:

$$C = \frac{\pi h R^2}{3n^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \end{bmatrix}; \quad K = 2\pi h \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 8 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 10 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \end{bmatrix};$$

$$M = 2\alpha \pi R h \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad f = 2\alpha \pi R h T_a \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

*Bước 5.* Xác định hàm  $\psi(H)$  và  $T(H)$ :

Với các tính chất nhiệt vật lý đã cho, hàm  $\psi(H)$  và  $T(H)$  được xác định bằng phương pháp bình phương bé nhất, kết quả:

$$\psi(H) = 1.859 \cdot 10^{-41} H^5 - 3.7313 \cdot 10^{-32} H^4 + 2.723 \cdot 10^{-23} H^3 - 8.8295 \cdot 10^{-15} H^2 + 1.3122 \cdot 10^{-6} H - 0,44951,$$

W/m; với sai số bình phương bé nhất  $r^2 = 0,99988$ ;

$$T(H) = -2.504 \cdot 10^{-41} H^5 + 1.829 \cdot 10^{-32} H^4 + 5.0318 \cdot 10^{-25} H^3 - 2.4653 \cdot 10^{-15} H^2 + 5.4156 \cdot 10^{-7} H - 40,120,$$

°C với sai số bình phương bé nhất  $r^2 = 0,99932$ .

*Bước 6.* Thiết lập hệ phương trình vi phân cấp I

$$\frac{dH}{d\tau} = C^{-1}(F - K\psi - MT) = B(\tau, H) \text{ và giải nó bằng lệnh}$$

$H := Rkadapt(H_0, \tau_0, \tau, m, B)$  trong phần mềm Mathcad 14.

#### 4. Mô hình thiết bị thí nghiệm

Để kiểm tra kết quả tính toán, Bộ môn Nhiệt độ thấp - Trường đại học năng lượng Moscow (LB Nga) đã nghiên cứu và chế tạo hệ thống lạnh 1 cấp hiệu suất cao, sử dụng hỗn hợp môi chất lạnh không đồng sôi gồm 5 đơn chất (hình 2). Thành phần các đơn chất (theo số lượng và chủng loại) và các áp suất trong hệ thống lạnh được tối ưu hóa nhằm đạt giá trị cực đại của hàm mục tiêu đó là hiệu suất exergy của hệ thống  $\eta_e^{\max}(\bar{z}, p_m, p_n)$  [2]. Việc tối ưu hóa này được thực hiện bởi phần mềm MIXTURE.EXE do chính Bộ môn Nhiệt độ thấp nghiên cứu và xây dựng.

Hệ thống lạnh làm việc trong dải nhiệt độ  $-50 \dots -100$  °C . Vận tốc không khí trong buồng ổn định nhiệt có thể điều chỉnh trong phạm vi  $1 \dots 15$  m/c.

Để đo nhiệt độ tại tâm của tôm và nhiệt độ không khí, nhiệt điện trở loại HRTS-5760-B, dải đo từ  $-200 \dots 480$  °C với sai số tuyệt đối  $\pm 0,3$  °C được sử dụng. Hệ số tỏa nhiệt được xác định thông qua việc đo mật độ dòng nhiệt bởi thiết bị IRT - 4 với sai số 5 % ; cảm biến của nó được gắn trên bề mặt con tôm. Các thiết bị này được kết nối với

hệ thống thu thập dữ liệu để ghi lại sự thay đổi nhiệt độ của tôm, của không khí và mật độ dòng nhiệt với tần suất 8 giây/ 1 lần.

Tốc độ gió trong buồng ổn định nhiệt được kiểm soát bởi phong kế loại AVM – 07, với sai số tương đối  $\pm 3 \%$ , dải đo  $0,4...30 \text{ m/c}$ .



Hình 2: Mô hình thiết bị thí nghiệm và đối tượng nghiên cứu

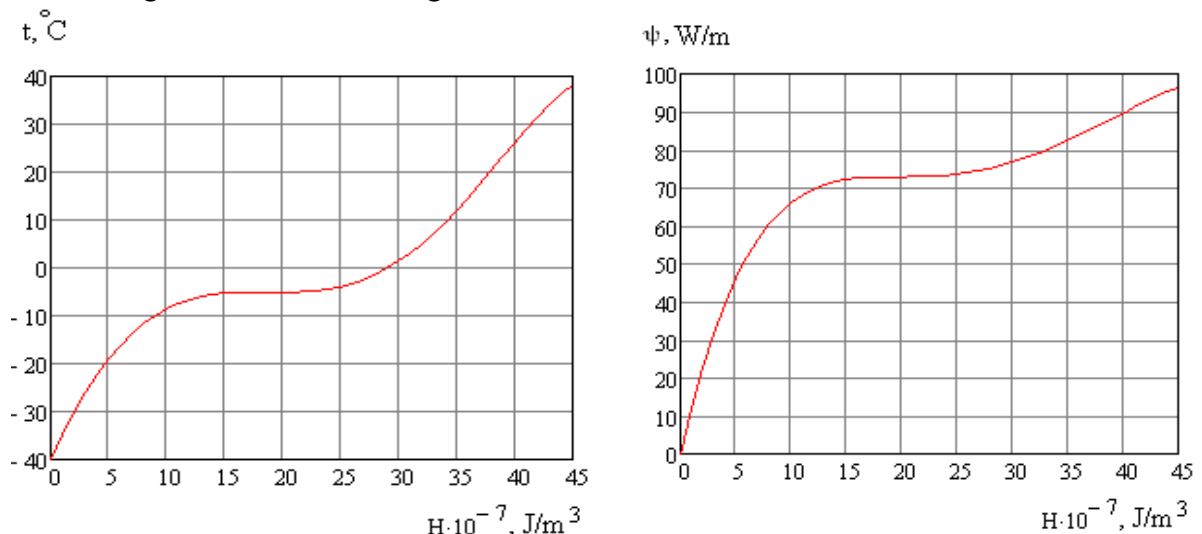
Quy trình thí nghiệm được tiến hành theo hướng dẫn của tài liệu [1].

## 5. Kết quả tính toán và thí nghiệm

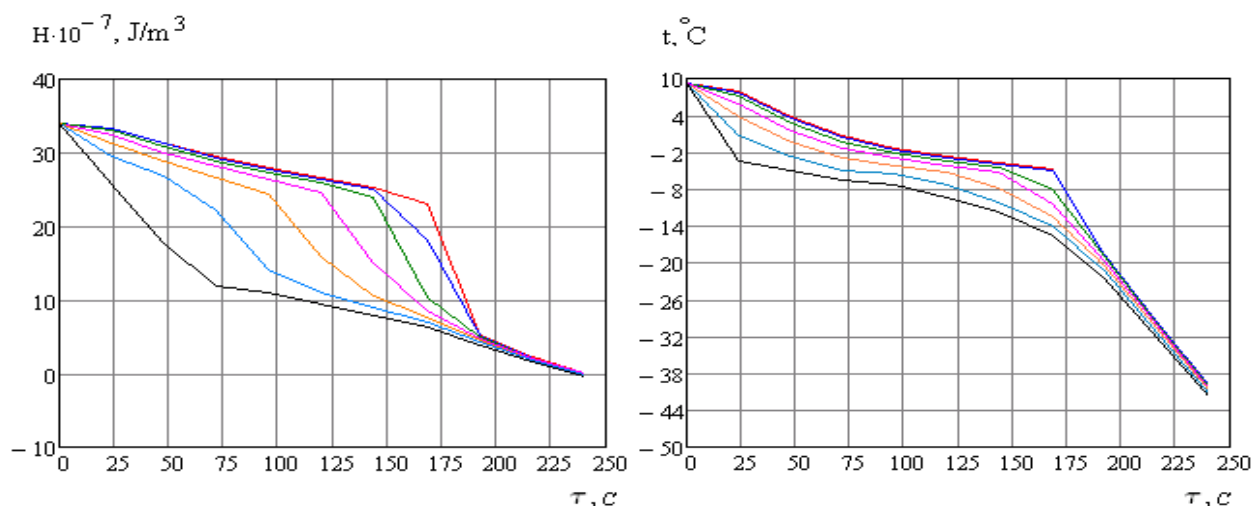
Trong thời gian kết đông, nhiệt độ không khí và mật độ dòng nhiệt thay đổi vì nhiệt độ của đối tượng được kết đông giảm. Do vậy, các giá trị nhiệt độ không khí và mật độ dòng nhiệt trung bình được ghi nhận để tính toán hệ số tỏa nhiệt. Với tốc độ không khí  $5 \text{ m/s}$  và nhiệt độ không khí  $-66,49^\circ\text{C}$ , hệ số tỏa nhiệt bằng  $38,8 \text{ W/m}^2/^\circ\text{C}$ . Các số liệu này được sử dụng để tính toán quá trình kết đông tôm.

Quy luật biến đổi hàm  $t(H)$  và  $\psi(H)$  được thể hiện ở Hình 3. Các đồ thị ở Hình 4 cho biết sự biến đổi enthalpy và nhiệt độ tại các nút theo từng thời điểm của quá trình kết đông thực phẩm.

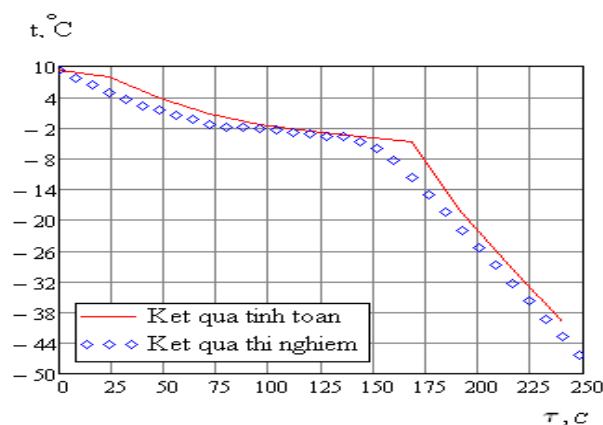
So sánh kết quả tính toán và thí nghiệm sự thay đổi nhiệt độ tại tâm của con tôm theo thời gian được mô tả bằng đồ thị ở Hình 5.



Hình 3: Sự phụ thuộc nhiệt độ, nhiệt độ Kirchhoff vào enthalpy.



Hình 4: Quy luật thay đổi enthalpy và nhiệt độ tại các nút



Hình 5: So sánh kết quả tính toán và thí nghiệm nhiệt độ tại tâm của con tôm

Phân tích đồ thị hình 5 cho thấy nhiệt độ đóng băng của tôm không cố định như giả thiết của Plank mà giảm dần từ  $-2^{\circ}\text{C}$  đến  $-5^{\circ}\text{C}$  vì nồng độ muối khoáng và chất hoà tan trong dịch tế bào của tôm tăng dần theo quá trình kết đông.

## 6. Kết luận

- Mô hình toán học dựa trên phương pháp phân tử hữu hạn Galerkin, biến đổi enthalpy – Kirchhoff kết hợp với phương pháp quy tụ rất đơn giản vì việc tính toán và ghép các ma trận đặc trưng của các phân tử chỉ được thực hiện 1 lần. Điều này làm giảm thời gian tính toán cũng như yêu cầu về bộ xử lý và dung lượng bộ nhớ máy tính;
- Tính toán theo mô hình toán học nói trên rất ổn định, hội tụ nhanh vì không có giá trị nhảy vọt tại thời điểm kết tinh như phương pháp nhiệt dung riêng tổng (hay nhiệt dung riêng hiệu quả);
- Các đường đặc trưng của quá trình kết đông ở Hình 4 và 5 gần như trùng khít khi đối tượng được rời rạc thành 10, 15 phần tử để tính toán.
- Kết quả tính toán theo phương pháp nêu trên khá phù hợp so với thí nghiệm, sai số không quá 10 %. □

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Лунин А.И., 2007. Холодильные машины и установки. Издательский дом МЭИ, Москва, 32с.
2. Лунин А.И., Могорычный В.И., Коваленко В.Н., 2009. Применение многоком-понентных рабочих тел в низкотемпературной технике. Учебное пособие. – М.: Издательский дом МЭИ, 96с.
3. Румянцев А.В., 1995. Метод конечных элементов в задачах теплопроводности: Учебное пособие/ Калинингр. ун-т. Калининград, -170 с.
4. Bryan R. Becker., 1997. Computer algorithms for calculating the cooling and freezing times, refrigeration loads and thermal properties of foods and beverages. ASHRAE Final Report, 888 RP.
5. Voller V.R., Swaminathan C.R., 1990. fixed grid techniques for phase change problems: a review. International Journal for numerical methods in engineering, vol. 30, issue 4, pp. 875-898.

## Abstract

*A mathematical model of food freezing processes using the Galerkin's finite element method was described in this article. The original heat transfer equation was reformulated using a combined enthalpy and Kirchhoff and lumped capacity formulation. The error of the calculated data and experiment amounted to 10%.*

**Key words:** *phương pháp phần tử hữu hạn, thời gian kết đông, thực phẩm...*

