

VỀ VÀNH PF VÀ CÁC MỞ RỘNG CỦA MÔĐUN NỘI XẠ

Lê Văn Thuyết*

Tóm tắt

Một vành R được gọi là giả Frobenius phải (gọi tắt là PF) nếu R là một vành nửa hoàn chỉnh, nội xạ phải và có để cốt yếu. Trong bài báo này, chúng tôi sẽ cung cấp một số đặc điểm của vành PF thông qua nội xạ bé và các tính chất ef – mở rộng; đồng thời đề cập đến phương pháp Faith-Walker về các vành PF.

Từ khóa: vành PF, mở rộng, môđun nội xạ

1. Giới thiệu

Trong bài báo này, vành được cho là có đơn vị $1 \neq 0$. Trọng tâm của bài viết này xoay quanh vành giả nội xạ (pseudo-Frobenius), viết tắt là PF, với các liên quan đến mở rộng của môđun và vành nội xạ. Theo thứ tự, chúng ta phải kể đến lớp vành rất gần với các không gian vectơ đó là vành nửa đơn. Kế tiếp là lớp vành tựa Frobenius (quasi-Frobenius), viết tắt là QF, là lớp vành mở rộng của vành nửa đơn. Các vành QF có vai trò rất quan trọng trong lý thuyết vành kết hợp không giao hoán và đang được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu, như Faith, Osofsky, Wisbauer, Dung, Huynh, Vanaja, Smith, Quynh, Thoang,... Có rất nhiều đặc trưng của vành QF, nhưng ở đây chúng tôi đề cập đến một vài đặc trưng quan trọng sau:

Định lý 1.1. ([NY, Theorem 1.50]) *Các điều kiện sau là tương đương đối với vành R đã cho:*

- (1) R là QF.
- (2) R là tự nội xạ phải (hay trái) và Note phải (hay trái).
- (3) R là tự nội xạ phải (hay trái) và thỏa ACC đối với các linh hóa tử phải.
- (4) R là tự nội xạ phải (hay trái) và thỏa ACC đối với các ideal phải cốt yếu.

Nhiều đặc trưng khác của vành QF ra đời cố gắng trả lời giả thuyết Faith: Phải chăng một vành nửa nguyên sơ, tự nội xạ một phía là QF?. Tuy nhiên, do đến nay, câu trả lời toàn thể cho vấn đề trên vẫn chưa được khẳng định nên nhiều nhà toán học cố gắng tiếp cận giả thuyết trên với các điều kiện yếu hơn. Một trong những điều kiện đưa ra đó chính là mở rộng của tính nội xạ. Trên vành QF thì mỗi môđun trung thành đều là một vật sinh. Sự phân loại giữa vật sinh và môđun trung thành trong phạm trù $\text{Mod-}R$ ($R\text{-Mod}$), đã tạo ra các lớp vành tổng quát của vành QF. Năm 1966, Osofsky đã chứng tỏ rằng tồn tại vành mà mọi môđun trung thành đều là vật sinh nhưng không là

* GS TS, Trường ĐH Huế

vành QF. Đồng thời, Osofsky đã định nghĩa lớp vành PF phải (trái), vành mà mọi R-môđun phải (trái) trung thành đều là vật sinh. Các vành PF đã được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu. Cấu trúc nội tại của vành PF phải (trái) cũng được mô tả qua:

Định lý 1.2. ([NY, Theorem 1.56: Azumaya - Kato - Osofsky - Utumi]) *Các điều kiện sau là tương đương đối với vành R đã cho:*

- (1) *R là PF phải.*
- (2) *R là tự nội xạ phải nửa hoàn chỉnh với đề phải cốt yếu.*
- (3) *R là tự nội xạ phải và hữu hạn đối sinh.*
- (4) *R là vật đối sinh trong phạm trù Mod-R, và ${}_R R$ đối sinh mọi môđun đơn trong R-Mod.*

Chú ý rằng khái niệm PF phải và PF trái là không trùng nhau, điều đó được các tác giả Dischinger và Muller khẳng định trong bài báo của mình ([DM]).

Khi sử dụng phạm trù Mod-R để nghiên cứu vành R, hai lớp vành trên đều cùng dựa vào một loại môđun đó chính là môđun nội xạ. Như vậy, nếu chúng ta quan tâm đến việc nghiên cứu các mở rộng của nội xạ thì khi quay trở lại áp dụng vào việc đặc trưng vành QF, PF ở trên sẽ tạo nên những kết quả thú vị. Hướng nghiên cứu này tiếp nối nhiều kết quả của Dung, Huynh, Smith, Wisbauer, Rizvi, Vanaja, Quynh, Thoang ... và của chính bản thân tác giả.

Trong bài viết này, chúng tôi sẽ nêu lên những kết quả cổ điển và những kết quả mới đây của các tác giả khác về vành PF, sau đó chúng tôi nêu lên những kết quả liên quan của chúng tôi về vành PF theo hướng là nghiên cứu lớp các môđun tổng quát hoá các môđun nội xạ (đối ngẫu của nó) và áp dụng đặc trưng các vành liên quan, đặc biệt là PF. Để dễ dàng trích dẫn và độc giả dễ theo dõi, tác giả xin nêu ra ở đây 2 quyển sách xuất bản trong thời gian gần đây của Dung, Huynh, Smith và Wisbauer [DHSW] và Nicholson, Yousif [NY], có liên quan nhiều đến các kết quả của tác giả. Những khái niệm và ký hiệu được dùng ở các phần sau, không được định nghĩa ở đây, xin xem trong [DHSW] và [NY].

2. Kết quả.

2.1. Một khái niệm tổng quát từ định nghĩa của nội xạ: Nội xạ bé

Trước hết, chúng tôi quan tâm đến môđun nội xạ bé. Xét giản đồ sau: Cho M là một R-môđun phải và I một idêan phải của R . Chúng ta lấy một R-đồng cấu f từ I đến M .

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{i} & R \\ & & f \downarrow & \swarrow h & \\ & & M & & \end{array}$$

Nếu tồn tại $h \in \text{Hom}_R(R, M)$ sao cho $ih = f$ với mọi idêan phải I trong R và mọi $f \in \text{Hom}_R(I, M)$, thì chúng ta nói rằng M là nội xạ.

Chúng ta sẽ xét nhiều tổng quát hóa của khái niệm nội xạ.

Trước hết nếu ta lấy I chỉ là những idêan phải chính thì lúc đó chúng ta có khái niệm P -nội xạ. Nếu một vành R là P -nội xạ như là R -môđun phải, thì R được gọi là vành P -nội xạ phải. Nhiều tính chất của lớp vành này đã được viết trong [NY].

Nhưng khi lấy I chỉ là các idêan phải bé thì chúng ta có khái niệm nội xạ bé. Một R -môđun phải được gọi là nội xạ bé nếu mỗi R -đồng cấu từ một idêan phải bé đến M đều có thể được mở rộng đến một R -đồng cấu từ R -môđun phải chính quy R đến M . Một vành R được gọi là nội xạ bé phải, nếu R -môđun phải chính quy R là nội xạ bé.

Ví dụ 2.1.1. (1) Cho $R = \mathbb{Z}$ là vành các số nguyên, thì R là nội xạ bé nhưng không phải tự nội xạ.

(2) Cho $R = \left\{ \begin{pmatrix} n & x \\ 0 & n \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{Z}_2 \right\}$, xem [YZ], Example 1.6). Thì R là

một vành giao hoán và $J = S_r = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Z}_2 \right\}$. Vì vậy, R là nội xạ bé.

Chúng ta cần khẳng định rằng R không là nội xạ. Nếu R là nội xạ và $I = \left\{ \begin{pmatrix} 2n & 0 \\ 0 & 2n \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ là một idêan của R , đồng thời cho $g: I \rightarrow R$ với

$g\left(\begin{pmatrix} 2n & 0 \\ 0 & 2n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \bar{n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, thì g là một đồng cấu. Giả sử rằng $\bar{g}: R \rightarrow R$ là một mở

rộng của g . Lúc đó tồn tại $\begin{pmatrix} n_1 & x_1 \\ 0 & n_1 \end{pmatrix} \in R$ sao cho $\bar{g}\left(\begin{pmatrix} n & x \\ 0 & n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} n_1 & x_1 \\ 0 & n_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & x \\ 0 & n \end{pmatrix}$ với

mọi $\begin{pmatrix} n & x \\ 0 & n \end{pmatrix} \in R$. Như vậy $g\left(\begin{pmatrix} 2n & 0 \\ 0 & 2n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} n_1 & x_1 \\ 0 & n_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2n & 0 \\ 0 & 2n \end{pmatrix}$.

Suy ra rằng $\begin{pmatrix} 0 & \bar{n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2nx_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, mâu thuẫn.

Một vành R được gọi là *đối xứng đơn phải* (xem [NY]) nếu, với mỗi $k \in R$, khi kR là idêan phải đơn của R thì Rk cũng là idêan trái đơn của R .

Kế tiếp, chúng ta nêu lên bổ đề sau được dùng để chứng minh các kết quả chính.

Bổ đề 2.1.2. (McCoy' s Lemma) Cho R là một vành và $a, c \in R$. Nếu $b = a - aca$ là một phần tử chính quy của R , thì a cũng vậy.

Chứng minh. Dễ dàng suy ra từ định nghĩa.

Bổ đề 2.1.3. Cho R là vành đối xứng đơn phải với $S_r \leq^e R_R$. Nếu dãy tăng $r(a_1) \leq r(a_2 a_1) \leq \dots \leq r(a_n a_{n-1} \dots a_1) \leq \dots$ dừng với mọi dãy vô hạn $a_1, a_2, \dots \in R$, thì R là hoàn chỉnh phải.

Chứng minh. Xem ([TQ1], Lemma 2.2).

Từ bổ đề trên, ta đưa ra một số tính chất của vành PF.

Hệ quả 2.1.4. Cho R là một vành nội xạ bé phải với $S_r \leq^e R_R$. Nếu dãy tăng $r(a_1) \leq r(a_2 a_1) \leq \dots \leq r(a_n a_{n-1} \dots a_1) \leq \dots$ dừng với mọi dãy vô hạn $a_1, a_2, \dots \in R$, thì R là vành PF phải.

Chứng minh. Theo Bổ đề 2.1.3, R là hoàn chỉnh phải. Nhưng vì R là nội xạ bé phải, R là tự nội xạ phải theo ([SC], Theorem 3.16). Như vậy, R là tự nội xạ phải, nửa hoàn chỉnh với $S_r \leq^e R_R$; nghĩa là, R là PF phải theo Định lý 1.2.

Một vành R được gọi là CS trái (resp., CS đơn trái) nếu mọi idêan trái (t.u. idêan trái đơn) là cốt yếu trong một hạng tử trực tiếp của ${}_R R$. Một kết quả đã biết quen thuộc là: R là PF phải nếu và chỉ nếu R là tự nội xạ phải, Kasch phải. Nhưng không biết một vành Kasch phải, nội xạ bé phải có là PF phải không?. Chúng ta sẽ trả lời một phần cho câu hỏi đó.

Định lý 2.1.5. Cho R là một vành. Lúc đó các điều kiện sau là tương đương:

(1) R là PF phải.

(2) R là nội xạ bé phải, Kasch phải và CS đơn trái.

(3) R là nội xạ bé phải, Kasch phải và $lr(a)$ là cốt yếu trong một hạng tử trực tiếp của ${}_R R$ với mọi idêan phải (t.u. trái) đơn aR (t.u., Ra) của R .

Chứng minh. (1) $\Rightarrow$ (2) là rõ ràng.

(2) $\Rightarrow$ (3). Giả sử rằng Ra là một idêan trái đơn. Nếu $(Ra)^2 \neq 0$ thì $Ra \leq^{\oplus} {}_R R$ và từ đó suy ra rằng $lr(a) = Ra$. Hơn nữa, $a^2 = 0$ và vì thế $a \in J$. Vì R là nội xạ đơn phải, $Ra = lr(a)$ là idêan trái đơn. Lúc đó theo (2), $lr(a)$ là cốt yếu trong một hạng tử trực tiếp của ${}_R R$. Ngoài ra, nếu bR là idêan phải đơn thì Rb là idêan trái đơn do R là vành đối xứng đơn. Dễ dàng suy ra rằng $lr(b)$ cốt yếu trong một hạng tử trực tiếp của ${}_R R$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Cho T là một ideal phải cực đại của R . Vì R là Kasch phải, $l(T) \neq 0$. Tồn tại $0 \neq a \in l(T)$ hay $T \leq r(a)$ và dẫn đến $T = r(a)$. Nhưng $aR \simeq R/r(a)$ và vì thế aR là một ideal phải đơn. Vì vậy, $l(T) = lr(a) \leq^e Re$ với $e^2 = e \in R$ nào đó theo giả thiết. Như vậy, R là nửa hoàn chỉnh theo ([NY], Lemma 4.1). Điều này suy ra rằng R là tự nội xạ phải và từ đó PF phải theo Định lý 1.2.

Hệ quả 2.1.6. Nếu R là vành nội xạ bé phải, Kasch phải và CS trái, thì R là PF phải.

2.2. Vành ef-mở rộng.

Dựa trên một tính chất quan trọng của môđun nội xạ là: Nếu M là một môđun nội xạ thì $M = E(M)$, bao nội xạ của M và khi lấy môđun con N của M thì N cốt yếu trong $E(N)$ và $E(N)$ là hạng tử trực tiếp của M , người ta đã đưa ra định nghĩa: Môđun M được gọi là CS (hay mở rộng) nếu mọi môđun con của M đều cốt yếu trong một hạng tử trực tiếp. Nhiều chương trong quyển sách [DHSW] đã dành để viết về lớp môđun này. Trong bài báo trước đó (xem [TW]), Wisbauer và tác giả đã đưa ra khái niệm mở rộng khái niệm CS, đó là:

Định nghĩa 2.2.1. Môđun M được gọi là *ef - mở rộng* nếu mọi môđun con đóng chứa một môđun con cốt yếu hữu hạn sinh, là một hạng tử trực tiếp của M . Môđun M được gọi là *f - mở rộng* nếu mọi môđun con hữu hạn sinh đều cốt yếu trong một hạng tử trực tiếp của M .

Wisbauer và tác giả (xem [TW]) đã thu được nhiều kết quả về tính chất của lớp môđun và vành này. Chẳng hạn, một trong những kết quả chính thu được đó là tính chất của môđun ef-mở rộng M trên vành thỏa ACC đối với các ideal phải nào đó. Mà từ tính chất này chúng ta suy ra được một số tính chất liên quan đến tính đều của sự phân tích của môđun ef-mở rộng, mà trước đây nó cũng có trong môđun mở rộng (xem [DHSW, 8.2]). Ngoài ra, ta cũng có đặc trưng của một môđun ef-mở rộng tương tự với tính chất của môđun π -nội xạ nêu ra bởi Wisbauer (xem [DHSW, 2.1]).

Sau khi đưa ra khái niệm này, nhiều tác giả tiếp tục nghiên cứu lớp môđun này, đặc biệt trong đó có nhóm học trò của Smith, Harmanci, Ozcan. Ngoài ra, Liu Zhongkui và Du Yanjun trong bài báo: "On ECG-extending and ECG- quasicontinuous modules" của mình, đã đưa ra khái niệm tổng quát hơn môđun ef-mở rộng. Chúng tôi tiếp tục thu được một số tính chất của vành R mà tổng trực tiếp của R và R là ef-mở rộng như là một R -môđun phải. Sau đó, chúng ta nghiên cứu cấu trúc của vành thỏa điều kiện tổng trực tiếp của bất kỳ hai R -môđun phải ef-mở rộng là ef-mở rộng. Những điều này mở rộng các kết quả có được trong sách chuyên khảo về môđun mở

rộng của Dũng, Huỳnh, Smith và Wisbauer ([DHSW]). Chúng tôi đã chứng minh được:

Mệnh đề 2.2.1. (xem [TQ3], Proposition 2.4) *Cho R là một vành. Lúc đó các điều kiện sau là tương đương:*

- (1) R là ef-mở rộng phải và mọi R -đối ngẫu của các R -môđun trái đơn là đơn.
- (2) R là nửa hoàn chỉnh liên tục phải với $S_r = S_l$ cốt yếu trong R_R .

Chứng minh. (1) $\Rightarrow$ (2). Theo [NY, Theorem 4.8], chúng ta có R là nửa hoàn chỉnh, Kasch trái với $S_r = S_l \leq^e R_R$. Vì R là ef-mở rộng phải, $e_i R$ là ef-mở rộng với mọi $i = 1, 2, \dots, n$. Suy ra rằng $e_i R$ là đều (vì $e_i R$ là không phân tích được) và vì thế $\text{Soc}(e_i R)$ là đơn và cốt yếu trong $e_i R$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$. Vì vậy, S_r là hữu hạn sinh và từ đó R là mở rộng phải theo [TQ3, Lemma 2.2]. Như vậy R là liên tục phải theo [NY, Theorem 4.10].

(2) $\Rightarrow$ (1). là rõ ràng.

Nhờ vào kết quả này, chúng ta có một số đặc trưng của vành PF và QF.

Định lý 2.2.2. (xem [TQ3], Theorem 2.5) *Cho R là một vành. Lúc đó các điều kiện sau là tương đương:*

- (1) R là vành PF phải.
- (2) $R \oplus R$ là ef-mở rộng như là R -môđun phải và mọi R -đối ngẫu của các R -môđun trái đơn là đơn.

Chứng minh. (1) $\Rightarrow$ (2) là dễ dàng.

(2) $\Rightarrow$ (1). Giả sử rằng $R \oplus R$ là ef-mở rộng như là R -môđun phải và mọi R -đối ngẫu của các R -môđun trái đơn là đơn. Thì R là vành nửa hoàn chỉnh liên tục phải với $S_r = S_l \leq^e R_R$ theo Định lý 2.2.2. Vì R là vành nửa hoàn chỉnh, ef-mở rộng phải và $S_r \leq^e R_R$, nên S_r là hữu hạn sinh. Từ đó, $\text{Soc}(R \oplus R)_R$ là hữu hạn sinh và cốt yếu trong $(R \oplus R)_R$. Vì vậy, $(R \oplus R)_R$ là mở rộng theo [TQ3, Lemma 2.2]. Chúng ta có $J = Z_r$ (vì R là liên tục phải) và R là nửa chính quy (do R là nửa hoàn chỉnh), thì $(R \oplus R)_R$ thỏa điều kiện C2 theo [NY, Example 7.18], và vì thế $(R \oplus R)_R$ là liên tục. Như vậy R là tự nội xạ phải theo [NY, Theorem 1.35].

Hệ quả 2.2.3. ([Y], Theorem 2) *Các điều kiện sau là tương đương đối với vành R đã cho:*

- (1) R là PF phải.

(2) $R \oplus R$ là mở rộng như là một R -môđun phải và mọi R -đối ngẫu của các R -môđun trái đơn là đơn.

Hệ quả 2.2.4. Các điều kiện sau là tương đương đối với vành R đã cho:

- (1) R là PF phải.
- (2) R Kasch phải và trái, và $R \oplus R$ là ef-mở rộng.

2.3. Một đặc trưng quan trọng của vành PF.

Ta đã đề cập đến vành PF ở trên. Chúng ta biết đến một Định lý nổi tiếng của Faith và Walker về đặc trưng vành QF như sau:

Định lý 2.3.1. Vành R là QF khi và chỉ khi mọi R -môđun phải (hay trái) nội xạ là xạ ảnh, khi và chỉ khi mọi R -môđun phải (hay trái) xạ ảnh là nội xạ.

Chúng tôi tiếp cận với Định lý Faith-Walker cho vành PF. Khi đó, ta có:

Định lý 2.3.2. (xem [TT], Theorem 3) Cho vành R có chiều Goldie hữu hạn phải. Lúc đó vành R là PF phải khi và chỉ khi mọi R -môđun phải đối địa phương, nội xạ là xạ ảnh.

Chứng minh. Điều kiện cần là hiển nhiên.

Chứng minh điều kiện đủ. Cho R là vành sao cho mọi R -môđun phải đối địa phương, nội xạ là xạ ảnh. Trước hết, chúng ta chứng minh rằng R có hữu hạn lớp các R -môđun phải đơn. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng tập các R -môđun phải đơn từng cặp không đẳng cấu với nhau là đếm được. Cho $S = \{S_i \mid i \in I\}$ là tập đếm được các R -môđun phải đơn từng cặp không đẳng cấu với nhau ($I = \{1, 2, 3, \dots\}$).

Chúng ta sẽ chứng minh rằng $R_R = \left(\bigoplus_{i \in I} e_i R \right) \oplus N$ với $N \leq R_R$ nào đó và các lũy đẳng e_i của R sao cho $e_i R \simeq E(S_i)$. Thật vậy, theo [TT, Lemma 1], ta viết $R_R = e_1 R \oplus M$ với $M \leq R_R$ nào đó và $e_1 R \simeq E(S_1)$. Giả sử $R_R = \left(\bigoplus_{i \in J} e_i R \right) \oplus M_1$ với $M_1 \leq R_R$ nào đó và $e_i R \simeq E(S_i)$, $\emptyset \neq J \subset I$.

Cho $i \in I - J$ tùy ý thì theo [TT, Lemma 1], $R_R = e_j R \oplus M_2$. Cho $f: e_j R \rightarrow \left(\bigoplus_{i \in J} e_i R \right) \oplus M_1$ là một đơn cấu thì $f(Soc(e_j R)) \leq M_1$ vì $Soc(e_j R) \not\leq Soc(e_i R)$ với bất kỳ $i \in J$. Vì $e_j R \leq R_R = \left(\bigoplus_{i \in J} e_i R \right) \oplus M_1$, dễ dàng có được

$$e_j R \cap \left(\bigoplus_{i \in J} e_i R \right) \oplus M_1 = \left(e_j R \cap \left(\bigoplus_{i \in J} e_i R \right) \right) \oplus (e_j R \cap M_1).$$

Từ đó suy ra $e_j R \leq M_1$. Theo tính chất nội xạ của $e_j R$, $M_1 = e_j R \oplus M_3$. Vì thế $R_R = \left(\bigoplus_{i \in J \cup \{j\}} e_i R \right) \oplus M_3$. Bằng quy nạp, chúng ta có được $R_R = \left(\bigoplus_{i \in I} e_i R \right) \oplus N$ đó là điều phải chứng minh. Vì $1 \in R$ có giá hữu hạn nên suy ra I hữu hạn.

Bây giờ, giả sử rằng R là vành nửa hoàn chỉnh và thì R -môđun phải cơ sở của nó là nội xạ với đề cốt yếu, hữu hạn sinh.

Để chứng minh rằng R là nửa hoàn chỉnh, theo [AF, Theorem 27.6, p.304], chỉ cần chứng minh rằng mọi R -môđun phải đơn có phủ xạ ảnh. Cho $S = \{S_i \mid i = 1, \dots, t\}$ là tập các R -môđun phải đơn từng cặp không đẳng cấu với nhau. Theo [TT, Lemma 1], tồn tại các lũy đẳng e_i của R sao cho $e_i R \simeq E(S_i) = E_i$ ($i = 1, \dots, t$), và thì mỗi $e_i R$ là R -môđun phải nội xạ, không phân tích được và từ đó $\text{End}(e_i R)$ là vành địa phương với mọi $i = 1, \dots, t$ (xem [AF, Lemma 25.4, p.290]). Theo [TT, Lemma 2], $\text{Rad}(e_i R) = e_i J(R)$ là một môđun con cực đại, bé của $e_i R$ với mọi $i = 1, \dots, t$. Từ đó, $e_i R / e_i J(R)$ là một môđun đơn và $e_i R$ là một phủ xạ ảnh của $e_i R / e_i J(R)$, với mọi $i = 1, \dots, t$. Hơn nữa, $e_i R / e_i J(R) \simeq e_j R / e_j J(R)$ nếu và chỉ nếu $e_i R \simeq e_j R$ (xem [AF, Proposition 17.18, p.200]), từ đó, $\{e_1 R / e_1 J(R), e_2 R / e_2 J(R), \dots, e_t R / e_t J(R)\}$ cũng là tập đại diện các R -môđun phải đơn. Như vậy, R là nửa hoàn chỉnh, điều cần chứng minh.

Từ khẳng định trên, dễ dàng suy ra R -môđun phải cơ sở của R , $B = e_1 R \oplus \dots \oplus e_t R$ là nội xạ và hữu hạn sinh có đề cốt yếu, và vì thế R_R cũng vậy. Theo Định lý 1.2, R là vành PF phải.

Hệ quả 2.3.3. Cho R là một vành. Lúc đó các điều kiện sau là tương đương:

- (1) R là PF phải;
- (2) R là một đối sinh phải và R_R là một CS-môđun phải;
- (3) R là một đối sinh phải và R_R có chiều Goldie hữu hạn;
- (4) R là một đối sinh phải và nửa địa phương;
- (5) R là một đối sinh phải và R có lớp các R -môđun phải đơn từng cặp không đẳng cấu với nhau hữu hạn.

Chứng minh. (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3), (1) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) là rõ ràng.

(3) $\Rightarrow$ (1) Cho $S = \{S_i \mid i \in I\}$ là tập các R -môđun phải đơn từng cặp không đẳng cấu với nhau và $C = \bigoplus_{i \in I} E(S_i)$. Thì theo [NY, Proposition 1.43] và (3), C_R nhúng vào trong R_R . Vì R_R có chiều Goldie hữu hạn, C_R có chiều Goldie hữu hạn. Suy ra rằng I cũng phải hữu hạn. Chúng ta viết $R_R = C_R \oplus M_R$, vì thế $E(S_i)$ là xạ ảnh. Theo Định lý 2.3.2, suy ra rằng R là vành PF phải.

Theo cách chứng minh tương tự như (3) $\Rightarrow$ (1), chúng ta có (5) $\Rightarrow$ (1).

Hệ quả 2.3.4. Cho R là một vành. Lúc đó các điều kiện sau là tương đương:

- (1) R là PF phải;
- (2) R là vành QF-2 phải, QF-3 phải và Kasch phải.

Chứng minh. (1) $\Rightarrow$ (2) là rõ ràng.

(2) $\Rightarrow$ (1). Giả sử rằng vành R thỏa giả thiết (2). Thì $R_R = \bigoplus_{i=1}^n e_i R$ trong đó $e_i R$ ($i = 1, 2, \dots, n$) là idêan phải đều của R và n là một số nguyên dương. Suy ra rằng $G.\dim(R_R) = n$. Vì R là Kasch phải, $Soc(R_R)$ chứa một bản sao của mọi R -môđun phải đơn. Từ đó, suy ra rằng R có ít nhất n lớp các R -môđun phải đơn, vì chiều $G.\dim(Soc(R_R)) \leq G.\dim(R_R)$. Cho $t = G.\dim(Soc(R_R))$ thì $Soc(R_R) = \bigoplus_{i=1}^t S_i$, trong đó S_i ($i = 1, 2, \dots, t$) là các idêan phải đơn của R , vì thế $E(Soc(R_R)) = E(\bigoplus_{i=1}^t S_i) = \bigoplus_{i=1}^t E(S_i)$ là một hạng tử trực tiếp của $E(R_R)$. Vì R là QF-3 phải, $E(S_i)$ là xạ ảnh với $i = 1, 2, \dots, t$. Suy ra rằng bao nội xạ của mọi R -môđun phải đơn là xạ ảnh. Theo Định lý 2.3.2, R là một vành PF phải $\square$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [AF] ANDERSON F. W. and FULLER K. R., *Rings and Categories of Modules*, Heidelberg - New York (1992) (2nd edition).
- [DM] DISCHINGER F. and MULDER W., *Left PF is not right PF*, Comm. Alg., 14(7), (1986) 1223-1227.
- [DHSW] DUNG N. V., HUYNH D. V., SMITH P. F. and WISBAUER R., *Extending modules*, Longman Scientific and Technical, New York, 1994.
- [NY] NICHOLSON W. K. and YOUSIF M. F., *Quasi-Frobenius rings*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [SC] SHEN L. and CHEN J., *Small injective rings*, arXiv: Math., RA/0505445 v.21 (2005).

- [TQ1] THUYET L. V. and QUYNH T. C., *On small injective rings and modules*, J. Algebra Appl. 8, No. 3 (2009), 379-387.
- [TQ2] THUYET L. V. and QUYNH T. C., *On small injective, simple-injective and quasi-Frobenius rings*, Acta Math. Univ. Comen., New Ser. 78, No. 2 (2009), 161-172.
- [TQ3] THUYET L. V. and QUYNH T. C. *Some properties of ef-extending rings*, Math. J of Okayama Univ. 52 (2010), 123-131.
- [TQ4] THUYET L. V. and QUYNH T. C., *On ef-extending modules and rings with chain conditions*, Advances in Ring Theory Trends in Mathematics, @ 2010 Birkhauser Verlag Basel/Switzerland.
- [TT] THUYET L. V. and THOANG L. D., *An approach of Faith - Walker to PF-rings*, Submitted.
- [TW] THUYET L. V. and WISBAUER R., *Extending property for finitely generated submodules*, Vietnam J. of Math. 25(1)(1997) 65 - 73.
- [Y] YOUSIF M.F., *CS rings and Nakayama permutations*, Comm. Algebra 25 (1997) 3787- 3795.
- [YZ] YOUSIF M.F. and ZHOU Y. Q., *FP-injective, simple-injective and quasi- Frobenius rings*, Comm. Algebra 32 (2004) 2273–2285.

Abstract

On PF-rings and the extensions of injective modules

A ring R is called right pseudo-Frobenius (briefly, PF) if R is a right self-injective, semiperfect ring with right essential socle. In this paper, we will give some characterizations of a PF-ring via small injectivity, ef-extending property. We also give an approach of Faith-Walker to PF-rings.

Key words: PF rings, extensions, injective modules