

SO SÁNH CẤU TRÚC CÁC LỚP VÀNH CO-H VÀ PF

Lê Đức Thoang*

Tóm tắt

Trong bài báo này chúng tôi so sánh cấu trúc hai lớp vành PF phải và co-H phải, cả hai lớp vành này đều là mở rộng của lớp vành QF. Ý tưởng nảy sinh từ sự so sánh đó, chúng tôi chứng minh được “Một vành R là QF nếu và chỉ nếu R là co-H phải và thỏa mãn $S_r \leq S_l$ hoặc $S_l \leq S_r$; nếu và chỉ nếu R là co-H phải và Kasch phải hoặc trái”.

Từ khóa: vành co-H, vành PF, vành QF.

1. Giới thiệu

Năm 1939, Nakayama đã giới thiệu lớp vành quasi-Frobenius, gọi tắt là vành QF, đó là lớp vành Artin hai phía và mỗi ideal một phía đều là ideal linh hóa tử hữu hạn sinh. Từ đó đến nay, nhiều tác giả đã nghiên cứu vành QF và các mở rộng của nó. Có hai mở rộng đẹp được nhiều tác giả quan tâm đó là vành PF phải và vành co-H phải. Trong bài viết này, chúng tôi so sánh hai lớp vành PF phải và co-H phải. Từ sự so sánh đó, chúng tôi dự đoán và chứng minh được kết quả khá thú vị thể hiện trong Định lý 2.4.

Chúng ta luôn giả thiết vành R đã cho là vành kết hợp có đơn vị $1 \neq 0$ và mọi R -môđun được xét là môđun unita. Môđun con $N \subseteq M$ được gọi là cốt yếu, nếu với mọi $A \subseteq M$, $N \cap A = 0$ thì phải có $A = 0$, kí hiệu $N \leq^e M$; N được gọi là một hạng tử trực tiếp của M , kí hiệu $N \leq^\oplus M$, nếu có môđun con $A \subseteq M$ thỏa mãn $A \cap N = 0$, $A + N = M$. Môđun M được gọi là CS môđun nếu mọi môđun con của M đều cốt yếu trong một hạng tử trực tiếp của M . Với vành R , ta kí hiệu $J(R)$ (hoặc J) để chỉ căn Jacobson, $S_r(S)$, tương ứng để chỉ đế phải (trái, tương ứng), môđun con suy biến phải (trái, tương ứng) được kí hiệu là $Z(R_R)$ ($Z({}_R R)$, tương ứng).

Những khái niệm và kết quả cơ bản liên quan đến bài viết, chúng ta có thể tham khảo trong [1] và [3]. Trước hết, chúng ta nhắc lại một số định nghĩa quan trọng.

Định nghĩa 1.1. Vành R là PF phải nếu và chỉ nếu R là vành nửa hoàn chỉnh, tự nội xạ phải và có đế cốt yếu.

Định nghĩa 1.2. Vành R là co-H phải nếu và chỉ nếu R là vành Artin phải và thỏa mãn mọi R -môđun phải không đối bé đều chứa một hạng tử trực tiếp xạ ảnh.

Định nghĩa 1.3. Vành R là QF nếu và chỉ nếu R là vành Artin phải hoặc trái và tự nội xạ phải.

* TS, Trường Đại học Phú Yên

Trong [7], chúng tôi đã đặc trưng vành PF như sau:

Định lý 1.4. [7, Theorem 1.3] *Cho R là vành nửa hoàn chỉnh. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:*

- a) R là vành PF phải;
- b) Mọi R -môđun (phải) đối địa phương và nội xạ đều là môđun địa phương và xạ ảnh.
- c) Mọi R -môđun (phải) địa phương và xạ ảnh đều là môđun đối địa phương và nội xạ.
- d) Mọi R -môđun (phải) hữu hạn đối sinh và nội xạ đều là môđun hữu hạn sinh và xạ ảnh.
- e) Mọi R -môđun (phải) hữu hạn sinh và xạ ảnh đều là môđun hữu hạn đối sinh và nội xạ.

Hệ quả 1.5. [7, Corollary 2.1] *Cho R là vành nửa hoàn chỉnh. Khi đó R là vành PF phải nếu và chỉ nếu bao nội xạ của mọi R -môđun phải đơn đều xạ ảnh.*

Ví dụ 1.6. Với số nguyên tố p , kí hiệu $\mathbb{Z}_{(p)}$ là bộ phận của tích trực tiếp $\prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z} / p^n \mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}_{(p)}$ được xác định như sau: Mỗi phần tử $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \mathbb{Z}_{(p)}$ đều thỏa mãn $\varphi(x_n) = x_{n-1}, \forall n > 1$, trong đó φ là toàn cấu vành:

$$\mathbb{Z} / p^n \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} / p^{n-1} \mathbb{Z}, \quad x + p^n \mathbb{Z} \mapsto x + p^{n-1} \mathbb{Z}.$$

Vành con $\mathbb{Z}_{(p)}$ được gọi là vành số nguyên p -adic. Kí hiệu $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ là p -thành phần của $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \{q + \mathbb{Z} \mid q \in \mathbb{Q}, \exists k \in \mathbb{N}: p^k q \in \mathbb{Z}\}$.

Vành R được định nghĩa như sau: $(R, +) = \mathbb{Z}_{(p)} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$,

Phép nhân được định nghĩa:

$$(\lambda, x)(\mu, y) = (\lambda\mu, \lambda y + \mu x), \quad \forall (\lambda, x), (\mu, y) \in R.$$

Khi đó $(R, +, \cdot)$ là vành PF phải và trái nhưng không là vành co-H phải hoặc trái.

Ví dụ 1.7. Cho $\mathbb{K}$ là một trường và vành R xác định như sau:

$$R = \begin{bmatrix} \mathbb{K} & \mathbb{K} \\ 0 & \mathbb{K} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ 0 & k_3 \end{bmatrix} \mid k_i \in \mathbb{K} \right\}$$

Khi đó R là vành co-H phải và trái nhưng không là vành PF phải hoặc trái, do đó hiển nhiên R không là vành Kasch phải hoặc trái.

Để phải và để trái của R được xác định như sau:

$$S_r = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{K} \\ 0 & \mathbb{K} \end{bmatrix}, S_l = \begin{bmatrix} \mathbb{K} & \mathbb{K} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 1.8. Cho $\mathbb{K}$ là một trường, xét vành địa phương $Q = \mathbb{K}[x, y]/(x^2, y^2)$.

$$\text{Ta đặt: } J = J(Q), S = \text{Soc}(Q_Q) = \text{Soc}({}_Q Q), \bar{Q} = Q/S. T = \begin{bmatrix} Q & \bar{Q} \\ J & Q \end{bmatrix}.$$

Khi đó T là vành QF.

2. So sánh cấu trúc các lớp vành co-H và PF

Mệnh đề 2.1. Cho R là vành PF phải. Khi đó:

a) R là vành Kasch (phải và trái);

b) $J(R) = Z(R_R) = Z({}_R R)$;

c) $S_r = S_l$, $S_r \leq^e R_R$, $S_l \leq^e {}_R R$;

d) $\text{Soc}(eR)$ là đơn và cốt yếu trong eR , $\text{Soc}(Re)$ là đơn và cốt yếu trong Re với mọi lũy đẳng địa phương $e \in R$.

Chứng minh. Suy ra từ [3, Theorem 5.31].

Mệnh đề 2.2. Cho R là vành co-H phải. Khi đó:

a) R là vành Artin phải;

b) $S_r \leq^e R_R$, $S_l \leq^e {}_R R$;

c) $\text{Soc}(eR)$ là đơn và cốt yếu trong eR , với mọi lũy đẳng địa phương $e \in R$.

Chứng minh. Vì R là vành co-H phải nên R là vành Artin phải, do đó R là vành hoàn chỉnh phải và trái, suy ra $S_r \leq^e R_R$ và $S_l \leq^e {}_R R$. Hơn nữa, vì R_R là CS môđun nên suy ra $\text{Soc}(eR)$ là đơn và cốt yếu trong eR .

Từ các kết quả trên, ta có bảng so sánh sau:

Vành co-H phải	Vành PF phải
Artin phải và trái	X (nửa hoàn chỉnh)
X	Nội xạ phải
$S_r \leq^e R_R$, $S_l \leq^e {}_R R$	$S_r \leq^e R_R$, $S_l \leq^e {}_R R$, $S_r = S_l$

X	Kasch phải và Kasch trái
$Soc(eR)$ đơn, $Soc(eR) \leq^e eR$, $Soc(Re) \leq^e Re$.	$Soc(eR)$ đơn, $Soc(eR) \leq^e eR$, $Soc(Re)$ đơn, $Soc(Re) \leq^e Re$.
X	$J(R) = Z(R_R)$

Trong bảng so sánh trên, dấu X thể hiện tính chất (cùng hàng) không đúng trong trường hợp tổng quát.

Việc tìm điều kiện để vành co-H phải là vành QF cũng là một bài toán được nhiều tác giả quan tâm. Tác giả Oshiro [5] đã chứng minh được kết quả sau đây:

Định lý 2.3. [5, Theorem 4.3] *Vành R là QF khi và chỉ khi R là vành co-H phải và thỏa mãn $J(R) = Z(R_R)$.*

Trong Ví dụ 1.5, ta thấy rằng với R là vành co-H thì trong trường hợp tổng quát ta có $S_r \not\leq S_l$, $S_l \not\leq S_r$, R không là Kasch phải hoặc trái. Khi một trong các điều kiện đó xảy ra thì chúng tôi thu được kết quả sau đây:

Định lý 2.4. *Cho vành R . Những điều kiện sau là tương đương:*

- a) R là vành QF;
- b) R là vành co-H phải, thỏa mãn $S_r \leq S_l$;
- c) R là vành co-H phải, thỏa mãn $S_l \leq S_r$;
- d) R là vành co-H phải và Kasch phải;
- e) R là vành co-H phải và Kasch trái.

Chứng minh.

(a) $\Rightarrow$ (b), (c) là rõ ràng.

(b) $\Rightarrow$ (e) Do (b), R là vành nửa hoàn chỉnh với đề phải cốt yếu. Từ đó suy ra $S_l \leq^e R_R$. Áp dụng [3, Lemma 1.48] ta được R là vành Kasch trái.

(c) $\Rightarrow$ (d) Do (c), R là vành nửa hoàn chỉnh với đề trái cốt yếu. Từ đó suy ra $S_r \leq^e {}_R R$. Áp dụng [3, Lemma 1.48] ta được R là vành Kasch phải.

(e) $\Rightarrow$ (a) Vì R là vành co-H phải nên R là Artin và do đó chỉ có hữu hạn lớp R -môđun phải đơn. Hơn nữa, vì R là Kasch trái nên S_l chứa các môđun con đẳng cấu với các lớp R -môđun trái đơn. Gọi C là một R -môđun trái đơn bất kỳ, khi đó ta có: $E(C) \leq^{\oplus} E({}_R R)$. Nhưng vì $E({}_R R)$ là xạ ảnh, nên suy ra $E(C)$ là xạ ảnh. Áp

dùng Hệ quả 1.5 ta suy ra R là vành PF trái, do đó R là vành tự nội xạ trái. Vậy R là vành QF.

(d) $\Rightarrow$ (a) Chứng minh tương tự trong (e) $\Rightarrow$ (a) $\square$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] F. W. Anderson and K. R. Fuller (1992), *Rings and categories of modules*, Second Edition, Graduate Text in Math., Vol. 13, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York.
- [2] C. Faith and Đ. V. Huỳnh, *When self-injective rings are QF: A report on problem*, J. Algebra and Its Appl. 1, 75-105 (2002).
- [3] W. K. Nicholson and M. F. Yousif (2003), *Quasi-Frobenius rings*, Cambridge Univ. Press.
- [4] W. K. Nicholson and M. F. Yousif (2003), *Mininjective rings*, J. Alge. 187, 548-578 (1997).
- [5] K. Oshiro, *Lifting modules, extending modules and their applications to QF rings*, Hokkaido Math. J., Vol. 13, 310-338.
- [6] L. Đ. Thoang and L. V. Thuyết, *On generalizations of injectivity*, Acta. Math. Univ. Comenianae, Vol. LXXV, 2 (2006), pp. 199-208.
- [7] L. Đ. Thoang, B. Đ. Dũng and N. V. Sanh, *When is a semiperfect ring right PF?*, Asian-European Journal of Mathematics Vol. 1, No. 3 (2008), 353-358, © World Scientific Publishing Company.

Abstract

A comparison of the structure of two ring classes co – and PF

In this paper, we compare the structure of two ring classes co-H and PF, both of them are extensions of the QF rings. Motivated by this comparison, we proved that "A ring R is QF if and only if R is right co-H and satisfying $S_r \leq S_l$ or $S_l \leq S_r$; if and only if R is right co-H and right or left Kasch".

Key words: co – H rings, PF rings, QF rings