

SỬ DỤNG KẾT THÚC ĐỂ XÁC ĐỊNH BỘI GIAO CỦA HAI ĐƯỜNG CONG TRONG $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

Trần Thị Gia Lâm*

Trường Đại học Phú Yên

Ngày nhận bài: 02/02/2020; Ngày nhận đăng: 17/02/2020

Tóm tắt

Giả sử A và B là hai đường cong trong $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ không có chung thành phần bất khả quy. Vấn đề chúng tôi quan tâm là xác định bội giao của A và B và mối quan hệ giữa bội giao với bậc của các phương trình rút gọn của chúng. Trong bài báo này, chúng tôi sẽ trình bày việc dùng kết thức để giải quyết vấn đề nêu trên.

Từ khóa: Kết thức, bội giao, đường cong xạ ảnh, phương trình rút gọn.

1. Mở đầu

Hình học Đại số có thể xây dựng trên trường bất kỳ. Đã có nhiều công trình được công bố về Hình học Đại số trên trường trường số phức. Đường cong đại số là một trong các đối tượng nghiên cứu quan trọng của Hình học Đại số, ngày càng được quan tâm vì người ta tìm thấy nhiều ứng dụng quan trọng của nó trong nhiều lĩnh vực của Toán học như: Hình học, Số học, Giải tích, ... Một trong những vấn đề quan trọng khi nghiên cứu về đường cong đại số trong $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ là tính kì dị, tìm giao điểm, xác định bội giao và mối quan hệ của chúng với bậc của các phương trình rút gọn. Trong bài báo này, chúng tôi sẽ trình bày việc dùng kết thức để tìm bội giao và chứng minh mối quan hệ giữa bội giao của hai đường cong xạ ảnh A và B trong $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ với bậc của các phương trình rút gọn của chúng với giả thiết A và B không có chung thành phần bất khả quy.

2. Nội dung

2.1. Kết thức

Định nghĩa 1. Cho các đa thức f và g thuộc $k[x]$, có bậc nguyên dương

$$f = a_0x^l + a_1x^{l-1} + \dots + a_l, \quad a_0 \neq 0,$$

$$g = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m, \quad b_0 \neq 0.$$

Ma trận Sylvester của f và g đối với x , kí hiệu là $Syl(f, g, x)$, là ma trận vuông cấp $l + m$, được xác định như sau

* Email: gialam1983@gmail.com

$$Syl(f, g, x) := \begin{pmatrix} a_0 & & & & b_0 & & & \\ a_1 & a_0 & & & b_1 & b_0 & & \\ & a_1 & \ddots & & & b_1 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & a_0 & \vdots & & \ddots & \\ & \vdots & & a_1 & \vdots & & & b_0 \\ a_l & & \vdots & & & \vdots & & b_1 \\ & a_l & & \vdots & b_m & & & \\ & & & \vdots & & b_m & & \vdots \\ & & \ddots & & & \ddots & & \\ & & & a_l & & & b_m & \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{m \text{ cột}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{l \text{ cột}}$

(các chỗ trống trong ma trận đều bằng 0).

Định nghĩa 2. Kết thức của f và g đối với x , kí hiệu là $Res(f, g, x)$, là định thức của ma trận $Syl(f, g, x)$.

Định nghĩa 3. Cho $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$ là các đa thức bậc dương theo x_i với i là một số nguyên nào đó, $1 \leq i \leq n$. Ta viết

$$\begin{aligned} f &= a_0 x_i^l + \dots + a_l, \quad a_0 \neq 0, \\ g &= b_0 x_i^m + \dots + b_m, \quad b_0 \neq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

với $a_j, b_j \in k[x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n]$. Kết thức của f và g xác định bởi x_i là

$$Res(f, g, x_i) := \det(Syl(f, g, x_i)).$$

Mệnh đề 4 [Xem 1]. Cho $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$ là các đa thức bậc dương theo x_1 . Khi đó,

i/ $Res(f, g, x_1) = \langle f, g \rangle \cap k[x_2, \dots, x_n]$;

ii/ $Res(f, g, x_1) = 0$ khi và chỉ khi f và g có nhân tử chung trong $k[x_1, \dots, x_n]$ với bậc dương theo x_1 .

Mệnh đề 5. Cho $f, g \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. Gọi $a_0, b_0 \in \mathbb{C}[x_2, \dots, x_n]$ như trong (1). Nếu

$Res(f, g, x_1) \in \mathbb{C}[x_2, \dots, x_n]$ triệt tiêu tại $(c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$ thì

i/ a_0 hoặc b_0 triệt tiêu tại $(c_2, \dots, c_n)$ hoặc

ii/ Tồn tại $c_1 \in \mathbb{C}$ sao cho f và g triệt tiêu tại $(c_1, \dots, c_n)$.

Chứng minh.

Đặt $c = (c_2, \dots, c_n)$, $f(x_1, c) = f(x_1, c_2, \dots, c_n)$. Giả sử $a_0(c) \neq 0$ và $b_0(c) \neq 0$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} f(x_1, c) &= a_0(c) x_1^l + \dots + a_l(c), \quad a_0(c) \neq 0, \\ g(x_1, c) &= b_0(c) x_1^m + \dots + b_m(c), \quad b_0(c) \neq 0, \end{aligned} \quad (2)$$

Do giả thiết, $h = Res(f, g, x_1)$ triệt tiêu tại c nên

$$0 = h(c) = \det \begin{pmatrix} a_0(c) & & b_0(c) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_l(c) & & b_m(c) \\ & \ddots & \vdots \\ & a_l(c) & b_m(c) \end{pmatrix} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta thấy $0 = h(c) = \text{Res}(f(x_1, c), g(x_1, c), x_1)$. Theo Mệnh đề 4, $f(x_1, c)$ và $g(x_1, c)$ có nhân tử chung trong $\mathbb{C}[x_1]$, suy ra $f(x_1, c)$ và $g(x_1, c)$ có nghiệm chung, hay tồn tại $c_1 \in \mathbb{C}$ sao cho $f(x_1, c) = g(x_1, c) = 0$. ■

2.2. Bội giao và mối quan hệ giữa bội giao của hai đường cong trong $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ với bậc của các phương trình rút gọn

Cho f là một đa thức trong $k[x_1, \dots, x_n]$, kí hiệu

$$\mathbf{V}(f) := \{(a_1, \dots, a_n) \in k^n \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0\}.$$

Định nghĩa 6. Cho $C = \mathbf{V}(f)$ với f là một đa thức thuần nhất trong $k[x_1, \dots, x_n]$ và $f = f_1^{\alpha_1} \dots f_s^{\alpha_s}$ với $f_1, \dots, f_s$ là các thành phần bất khả quy phân biệt của f . Đa thức $f_1 \dots f_s$ là đa thức định nghĩa có bậc bé nhất của C và phương trình $f_1 \dots f_s = 0$ được gọi là *phương trình rút gọn* của C .

Phương trình rút gọn xác định một cách duy nhất, sai khác một hằng số khác 0.

Bổ đề 7. Cho $f, g \in \mathbb{C}[x, y, z]$ là các đa thức thuần nhất có bậc lần lượt là m và n . Nếu $f(0, 0, 1)$ và $g(0, 0, 1)$ khác không thì kết thức $\text{Res}(f, g, z)$ là đa thức thuần nhất biến x, y có bậc là mn .

Chứng minh. Viết các đa thức f và g thành các đa thức theo z

$$f = a_0 z^m + \dots + a_m,$$

$$g = b_0 z^n + \dots + a_n.$$

Vì f là đa thức thuần nhất bậc m nên mỗi $a_i \in \mathbb{C}[x, y]$ là các đa thức thuần nhất bậc i . Hơn nữa, do $f(0, 0, 1) \neq 0$ nên $a_0 \neq 0$. Tương tự, $b_i \in \mathbb{C}[x, y]$ là các đa thức thuần nhất bậc i và $b_0 \neq 0$.

Ta có kết thức của f và g xác định bởi z là định thức cấp $m + n$

$$Res(f, g, z) := \det \begin{pmatrix} a_0 & & & b_0 & & \\ a_1 & a_0 & & b_1 & b_0 & \\ & a_1 & \ddots & & b_1 & \ddots \\ \vdots & & \ddots & a_0 & \vdots & \ddots \\ & \vdots & & a_1 & \vdots & \\ a_m & & \vdots & & \vdots & b_0 \\ & a_m & & b_n & & b_1 \\ & & \vdots & & & \vdots \\ & & & b_n & & \\ & & \ddots & & \ddots & \\ & & & a_m & & b_n \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ cột}}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{m \text{ cột}}$

ở đây các chỗ còn trống là số 0. Để chứng minh $Res(f, g, z)$ là đa thức thuần nhất bậc mn , gọi c_{ij} là phần tử ở hàng i cột j trong ma trận trên. Ngoài các vị trí là số 0, ta có

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{i-j} & \text{nếu } j \leq n \\ b_{n+i-j} & \text{nếu } j > n. \end{cases}$$

Do đó, mỗi $c_{ij} \neq 0$ là một đa thức thuần nhất bậc $i-j$ nếu $j \leq n$ hoặc bậc $n+i-j$ nếu $j > n$ và $Res(f, g, z)$ là tổng của các hạng tử $\pm \prod_{i=1}^{m+n} c_{i\sigma(i)}$ với σ là một hoán vị của $\{1, \dots, m+n\}$. Ta có thể giả sử mỗi $c_{i\sigma(i)}$ trong tích trên khác không. Nếu ta viết

$\pm \prod_{\sigma(i) \leq n} c_{i\sigma(i)} \prod_{\sigma(i) > n} c_{i\sigma(i)}$ thì tích này là một đa thức thuần nhất bậc $\sum_{\sigma(i) \leq n} (i - \sigma(i)) + \sum_{\sigma(i) > n} (n + i - \sigma(i))$. Vì σ là một hoán vị của $\{1, \dots, m+n\}$ nên tổng thứ nhất có n số hạng, tổng thứ hai có m số hạng và tất cả các i nằm giữa 1 và $m+n$ xuất hiện đúng một lần. Do đó, ta có thể sắp xếp lại tổng này để được

$$mn + \left(\sum_{i=1}^{m+n} i - \sum_{i=1}^{m+n} \sigma(i) \right) = mn + 0 = mn.$$

Suy ra $Res(f, g, z)$ là tổng của các đa thức thuần nhất bậc mn . Vậy ta có điều cần chứng minh. ■

Bổ đề 8. Cho $F \in \mathbb{C}[x, y]$ là một đa thức thuần nhất khác không. Khi đó, F có thể được viết thành $F = c \cdot (s_1 x - r_1 y)^{m_1} \dots (s_t x - r_t y)^{m_t}$ với $0 \neq c \in \mathbb{C}$ và $(r_1, s_1), \dots, (r_t, s_t)$ là các điểm phân biệt của $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Hơn nữa, $V(F) = \{(r_1, s_1), \dots, (r_t, s_t)\} \subset \mathbb{P}^1$.

Chứng minh. Đặt $f = F(x, 1) \in \mathbb{C}[x]$. Giả sử $f = a_0 x^m + \dots + a_m$, $a_i \in \mathbb{C}$, $a_0 \neq 0$. Vì $\mathbb{C}$ là trường đóng đại số nên f có đủ m nghiệm. Do đó,

$$f = a_0 (x - x_1)^{m_1} \dots (x - x_t)^{m_t}$$

với $m_1 + \dots + m_t = m$. Đặt $x_i = \frac{r_i}{s_i}, i = 1, \dots, t$. Khi đó,

$$\begin{aligned} f &= a_0 \left(x - \frac{r_1}{s_1}\right)^{m_1} \dots \left(x - \frac{r_t}{s_t}\right)^{m_t} \\ &= \frac{a_0}{s_1^{m_1} \dots s_t^{m_t}} (s_1 x - r_1)^{m_1} \dots (s_t x - r_t)^{m_t}. \end{aligned}$$

Đặt $c = \frac{a_0}{s_1^{m_1} \dots s_t^{m_t}}$, ta được $F = f^h = c(s_1 x - r_1)^{m_1} \dots (s_t x - r_t)^{m_t}$.

Xét đa thức không thuần nhất tương ứng với F là

$$f = F(x, 1) = c(s_1 x - r_1)^{m_1} \dots (s_t x - r_t)^{m_t} \in \mathbb{C}[x].$$

Ta có

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(f) &= \left\{ \frac{r_1}{s_1}, \dots, \frac{r_t}{s_t} \right\}; \\ \mathbf{V}(f^h) &= \mathbf{V}(F) = \left\{ \left(\frac{r_1}{s_1}, 1 \right), \dots, \left(\frac{r_t}{s_t}, 1 \right) \right\} = \{(r_i, s_i), \dots, (r_t, s_t)\} \subset \mathbb{P}^1. \blacksquare \end{aligned}$$

Định lý 9 [Xem 1]. Cho A và B là hai đường cong trong $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ không có chung thành phần bất khả quy. Nếu bậc của các phương trình rút gọn của A và B lần lượt là m và n thì $A \cap B$ có nhiều nhất là mn điểm.

Chứng minh. Giả sử $A \cap B$ có nhiều hơn mn điểm. Chọn $mn + 1$ điểm trong số chúng, đặt là $p_1, \dots, p_{mn+1}$ và với $1 \leq i < j \leq mn + 1$, đặt L_{ij} là đường thẳng đi qua p_i và p_j . Khi đó chọn một điểm $q \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ sao cho

$$q \notin A \cup B \cup \bigcup_{i < j} L_{ij} \quad (4)$$

Ta đã biết, mỗi ma trận $M \in GL(3, \mathbb{C})$ cho ta một ánh xạ $M : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Để tìm được một ma trận M thỏa mãn $M(q) = (0, 0, 1)$.

Nếu ta xem M như là một phép đổi tọa độ thì q có tọa độ là $(0, 0, 1)$ trong hệ tọa độ mới. Ta có thể giả sử $q = (0, 0, 1)$ trong (4).

Giả sử f và g lần lượt có bậc là m và n . Khi đó, từ (4) suy ra $f(0, 0, 1) \neq 0$ vì $(0, 0, 1) \notin A$ và $g(0, 0, 1) \neq 0$ vì $(0, 0, 1) \notin B$. Do đó, theo Bổ đề 8, kết thức $R(f, g, z)$ là một đa thức thuần nhất bậc mn theo các biến x, y . Vì f và g có bậc dương theo z và không có nhân tử chung trong $\mathbb{C}[x, y, z]$ nên theo Mệnh đề 4 ta có $Res(f, g, z)$ khác không.

Nếu lấy $p_i(u_i, v_i, w_i)$ thì vì kết thức nằm trong ideal $\langle f, g \rangle$ (theo Mệnh đề 4) nên

$$Res(f, g, z)(u_i, v_i) = 0 \quad (5)$$

Chú ý rằng đường thẳng nối $q = (0, 0, 1)$ và $p_i(u_i, v_i, w_i)$ cắt đường thẳng $z = 0$ tại $(u_i, v_i, 0)$.

Từ (4) ta thấy $q = (0, 0, 1) \notin L_{ij}$. Do đó $mn + 1$ đường thẳng qua q và p_i cắt đường thẳng $z = 0$ tại $mn + 1$ điểm $(u_i, v_i, 0)$ phân biệt, nghĩa là $Res(f, g, z)$ triệt tiêu tại $mn + 1$ điểm phân biệt. Điều này mâu thuẫn với $Res(f, g, z)$ là đa thức thuần nhất bậc mn .

■

Như vậy ta có tiêu chuẩn để giao của hai đường cong xạ ảnh trong $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ là hữu hạn. Bước tiếp theo ta sẽ định nghĩa *bội giao* cho mỗi $p \in A \cap B$.

Cho A và B là các đường cong xạ ảnh trong $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, không có thành phần chung bất khả quy và các phương trình rút gọn lần lượt là $f = 0$ và $g = 0$. Với mỗi cặp điểm $p \neq q$ thuộc $A \cap B$, đặt L_{pq} là đường thẳng xạ ảnh đi qua p và q . Chọn ma trận $M \in GL(3, \mathbb{C})$ sao cho trong hệ tọa độ mới xác định bởi M ta có

$$(0, 0, 1) \notin A \cup B \cup \bigcup_{p \neq q \text{ trong } A \cap B} L_{pq} \quad (6)$$

Theo chứng minh của Định lý 9, nếu $p = (u, v, w) \in A \cap B$ thì kết thức $Res(f, g, z)$ triệt tiêu tại (u, v) . Do đó, theo Bổ đề 8, $vx - uy$ là một nhân tử của $Res(f, g, z)$.

Định nghĩa 10. Cho A và B là các đường cong xạ ảnh trong $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, không có chung thành phần bất khả quy và các phương trình rút gọn lần lượt là $f = 0$ và $g = 0$. Chọn hệ tọa độ trong $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ sao cho (6) thỏa mãn. Khi đó, cho $p = (u, v, w) \in A \cap B$, *bội giao* $I_p(A, B)$ là số mũ của nhân tử $(vx - uy)$ trong sự phân tích thành nhân tử của $Res(f, g, z)$.

Định lý 11 [Xem 3]. *Bội giao* $I_p(A, B)$ tồn tại và duy nhất cho tất cả các đường cong xạ ảnh A và B trong $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ và thỏa mãn các tính chất sau đây:

- i/ $I_p(A, B) = I_p(B, A)$.
- ii/ $I_p(A, B) = \infty$ nếu p nằm trên một thành phần chung của A và B , còn ngược lại thì nó là một số nguyên không âm.
- iii/ $I_p(A, B) = 0$ khi và chỉ khi $p \notin A \cap B$.

Định lý 12 [Xem 1]. Cho A và B là các đường cong xạ ảnh trong $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, không có thành phần bất khả quy chung và m, n lần lượt là bậc của các phương trình rút gọn của chúng. Khi đó

$$\sum_{p \in A \cap B} I_p(A, B) = mn.$$

Chứng minh. Gọi $f = 0$ và $g = 0$ lần lượt là phương trình rút gọn của A và B , có bậc lần lượt là m và n . Giả sử ta đã chọn được hệ tọa độ thỏa mãn (3). Theo Bổ đề 8, ta có $Res(f, g, z) = c(v_1x - u_1y)^{m_1} \dots (v_tx - u_ty)^{m_t}$ với c là một hằng số khác 0.

Với mỗi (u_j, v_j) thỏa mãn $\text{Res}(f, g, z)(u_j, v_j) = 0$, tồn tại $w_j \in \mathbb{C}$ và $m_j = I_{p_j}(A, B)$ sao cho $p_j = (u_j, v_j, w_j) \in A \cap B$ (theo Mệnh đề 5).

Ngoài ra, nếu $p' = (u_{p'}, v_{p'}, w_{p'}) \in A \cap B$ thì trong sự phân tích $\text{Res}(f, g, z)$ thành nhân tử, luôn tồn tại nhân tử $(v_{p'}x - u_{p'}y)^{I_{p'}(A, B)}$. Như vậy ta có

$$\text{Res}(f, g, z) = c \prod_{p \in A \cap B} (v_p x - u_p y)^{I_p(A, B)},$$

trong đó c là một hằng số khác 0 và $p = (u_p, v_p, w_p)$.

Do Bổ đề 7, ta có $\text{Res}(f, g, z)$ có bậc là mn .

Mặt khác, $c \prod_{p \in A \cap B} (v_p x - u_p y)^{I_p(A, B)}$ có bậc là $\sum_{p \in A \cap B} I_p(A, B)$.

Vậy $\sum_{p \in A \cap B} I_p(A, B) = mn$. ■

Ví dụ 13. Cho $f = x^2 - yz$ và $g = x^2 + 4y^2 - 8yz$ là các đa thức thuần nhất trong $\mathbb{C}[x, y, z]$. Ký hiệu $A = V(f)$, $B = V(g)$ là các đường cong xạ ảnh được định nghĩa bởi f và g . Dễ thấy các đường cong A, B bất khả quy trên $\mathbb{C}$. Hơn nữa, chúng không có thành phần chung, $f = 0$ và $g = 0$ lần lượt là phương trình rút gọn của A và B . Ta có

$$\text{Res}(f, g, z) = \begin{vmatrix} -y & -8y \\ x^2 & x^2 + 4y^2 \end{vmatrix} = 7x^2y - 4y^3 = y(\sqrt{7}x + 2y)(\sqrt{7}x - 2y).$$

Theo Mệnh đề 5, ta có các điểm thuộc $A \cap B$ có tọa độ thỏa mãn $y = 0$ hoặc $\sqrt{7}x + 2y = 0$ hoặc $\sqrt{7}x - 2y = 0$. Kết hợp với $f = 0$ và $g = 0$ ta được

$$A \cap B = \left\{ p(0, 0, 1), q(2, \sqrt{7}, \frac{4}{\sqrt{7}}), r(2, -\sqrt{7}, -\frac{4}{\sqrt{7}}) \right\}.$$

Vì điểm $p(0, 0, 1) \in A \cap B$ không thỏa mãn (6) nên theo Định nghĩa 10, kết thức $\text{Res}(f, g, z)$ không cho ta giá trị đúng của các bội giao. Vì vậy, ta cần thực hiện phép đổi tọa độ. Chú ý rằng điểm

$$(0, 1, 0) \notin A \cup B \cup L_{pq} \cup L_{pr} \cup L_{qr}.$$

Ta xét phép biến đổi xạ ảnh $M : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ xác định bởi $M(x, y, z) = (z, x, y)$, thỏa mãn $M(0, 1, 0) = (0, 0, 1)$. Để tìm phương trình rút gọn của $M(A)$ và $M(B)$ ta chú ý rằng

$$(u, v, w) \in M(A) \Leftrightarrow M^{-1}(u, v, w) \in A \Leftrightarrow f(M^{-1}(u, v, w)) = 0.$$

Do đó $M(A)$ và $M(B)$ lần lượt được xác định bởi các phương trình

$$f(y, z, x) = -xz + y^2 = 0 \text{ và } g(y, z, x) = 4z^2 - 8xz + y^2 = 0.$$

$$\text{Res}(M(f), M(g), z) = \begin{vmatrix} -x & 0 & 4 \\ y^2 & -x & -8x \\ 0 & y^2 & y^2 \end{vmatrix} = -y^2(\sqrt{7}x + 2y)(\sqrt{7}x - 2y).$$

Ta thấy $(0,0,1) \notin M(A) \cup M(B) \cup L_{M(p)M(q)} \cup L_{M(p)M(r)} \cup L_{M(q)M(r)}$ và $M(p) = (1,0,0)$, $M(q) = (\frac{4}{\sqrt{7}}, 2, \sqrt{7})$, $M(r) = (-\frac{4}{\sqrt{7}}, 2, -\sqrt{7})$. Vì vậy, theo Định nghĩa 10 và Định lý 11 ta suy ra $I_p(A, B) = 2$, $I_q(A, B) = 1$, $I_r(A, B) = 1$, cho nên $\sum_{p \in A \cap B} I_p(A, B) = 4 = \deg f \deg g$, thỏa mãn Định lý 12 $\square$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Cox D., Little J., O'Shea D., *Ideals, varieties, and algorithms*, Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2007.
- [2] Fulton W., *Algebraic curves. An introduction to algebraic geometry*, Advanced Book Classics. Redwood City, CA etc.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1989.
- [3] Frances Kirwan, *Complex algebraic curves*, Cambridge University Press, 1992.

Using the resultants to identify the intersection multiplicity of the two curves in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

Tran Thi Gia Lam

Phu Yen University

Email: gialam1983@gmail.com

Received: February 02, 2020; Accepted: February 17, 2020

Abstract

A and B are supposed to be the two curves in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, and they do not have the same irreducible components. The problem we are interested in is to determine the intersection multiplicity of A and B and the relationship between the intersection multiplicity with the degrees of their reduced equations. In this paper, we will present the use of resultants to solve the above problem.

Keywords: Resultants, intersection multiplicity.