

ĐỊNH LÝ VỀ CÁC ĐIỂM THẲNG HÀNG TRONG HÌNH HỌC VỚI MÔ HÌNH NỬA MẶT PHẲNG POINCARÉ

Lê Hào*

Trường Đại học Phú Yên

Ngày nhận bài: 18/09/2019; Ngày nhận đăng: 10/02/2020

Tóm tắt

Trong một bài báo trước đây, chúng tôi đã trình bày khái niệm về độ dài đại số Lobachevsky của cung đoạn định hướng, sau đó tìm mối quan hệ giữa các đoạn thẳng Lobachevsky tạo nên khi cho các trục chắn lên hai đường thẳng Lobachevsky cố định.

Áp dụng kết quả từ bài báo đó, chúng tôi thu được **Định lý 2.2** về điều kiện thẳng hàng của các điểm Lobachevsky trong hình học với mô hình nửa mặt phẳng Poincaré.

Từ khóa: Độ dài đại số Lobachevsky, cung đoạn định hướng, mô hình nửa mặt phẳng Poincaré, đoạn thẳng Lobachevsky, đường thẳng Lobachevsky.

1. Giới thiệu

Trong mặt phẳng E^2 ta xét hệ tọa độ trực chuẩn Oxy và gọi nửa trên của Ox ứng với tập hợp:

$$H^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0\} = \{z \in \mathbb{C} / \text{Im} z > 0\}$$

là nửa mặt phẳng Poincaré.

Mỗi điểm thuộc H^2 gọi là điểm Lobachevsky. Với hai điểm Lobachevsky A, B thì khoảng cách Lobachevsky giữa chúng được kí hiệu là $\rho(AB)$ (xem [2] và [3])

Trong bài báo đăng ở Tạp chí Khoa học Đại học Phú Yên số 19/2018 [1] chúng tôi đã đưa ra khái niệm *độ dài đại số Lobachevsky* trên lớp các trục có chung mút âm vô tận (các trục thẳng Lobachevsky cùng vuông góc với trục Ox cũng được xem là các trục có chung mút âm vô tận). Một cung (đoạn) định hướng bất kì nối từ A đến B và nằm trên một trục, thì độ dài đại số Lobachevsky của nó là một số được kí hiệu $L(\overline{AB})$ (xem [1], mục 2) Chúng ta dễ dàng nhận thấy:

$$L(\overline{AB}) = -L(\overline{BA}) \text{ và } \rho(AB) = |L(\overline{AB})|$$

Với các điểm bất kì A, B, C cùng thuộc một trục Lobachevsky thì:

$$L(\overline{AB}) + L(\overline{BC}) = L(\overline{AC}) .$$

Chúng tôi đề cập các giá trị sau:

$$\begin{aligned} sh(AB) &= \frac{e^{\rho(AB)} - e^{-\rho(AB)}}{2} \\ sh(\overline{AB}) &= \frac{e^{L(\overline{AB})} - e^{-L(\overline{AB})}}{2} \end{aligned}$$

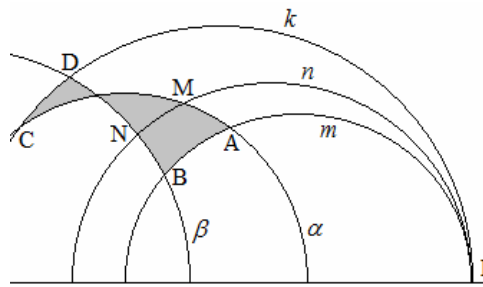
* Email: lehaodhpy@gmail.com

Trong bài báo nói trên, chúng tôi đã nêu kết quả sau:

Định lý 1.1. Cho hai đường thẳng Lob (α) và (β). Gọi (m), (n), (k) là ba trục phân biệt cùng có chung một mút âm vô tận. (m) cắt (α), (β) lần lượt tại A và B ; (n) cắt (α), (β) lần lượt tại M và N ; (k) cắt (α), (β) lần lượt tại C và D . Khi đó:

$$\frac{sh(MA)}{sh(NB)} e^{L(\overline{AB})} = \frac{sh(MC)}{sh(ND)} e^{L(\overline{CD})}.$$

Chứng minh. (xem [1] - Hệ quả 2.3)



Trong hình học Euclide trong E^2 ta có Định lý Menelaus về điều kiện thẳng hàng của ba điểm nằm trên đường thẳng chứa các cạnh của tam giác.

Lấy cảm hứng từ Định lý Menelaus và áp dụng **Định lý 1.1** chúng tôi thu được **Định lý 2.2**, cho ta điều kiện thẳng hàng của ba điểm nằm trên ba đường thẳng Lobachevsky chứa cạnh của một tam giác Lobachevsky.

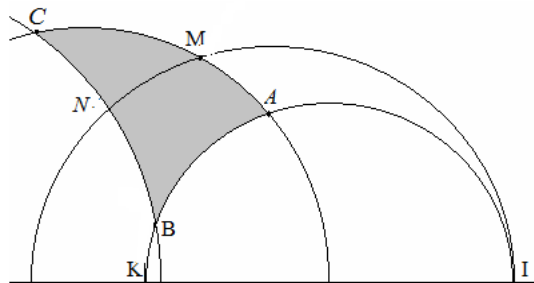
2. Kết quả chính

Bổ đề 2.1. Cho tam giác Lobachevsky với các đỉnh A, B, C . Giả sử A, B nằm trên trục (Δ). Một trục khác, có cùng mút âm vô tận với trục (Δ), cắt các đường thẳng Lob (CA), (CB) lần lượt tại M, N . Khi đó:

$$\frac{sh(\overline{MC})}{sh(\overline{MA})} = \frac{sh(\overline{NC})}{sh(\overline{NB})} e^{L(\overline{AB})}$$

Với L là hàm độ dài đại số trên lớp các trục cùng mút âm vô tận với trục (Δ).

Chứng minh.



Để ý rằng với trục đi qua P và Q thì $sh(\overline{PQ}) = -sh(\overline{QP})$ và $|sh(\overline{PQ})| = sh(PQ)$.

Theo **Định lý 1.1** thì:

$$\frac{sh(MA)}{sh(NB)} e^{L(\overline{AB})} = \frac{sh(MC)}{sh(NC)}$$

Do đó: $\frac{sh(MC)}{sh(MA)} = \frac{sh(NC)}{sh(NB)} e^{L(\overline{AB})}$

Rõ ràng điểm M thuộc đoạn thẳng Lob (CA) khi và chỉ khi N thuộc đoạn thẳng Lob (CB), suy ra:

$$\frac{sh(\overline{MC})}{sh(\overline{MA})} \text{ và } \frac{sh(\overline{NC})}{sh(\overline{NB})} \text{ luôn cùng âm hoặc cùng không âm.}$$

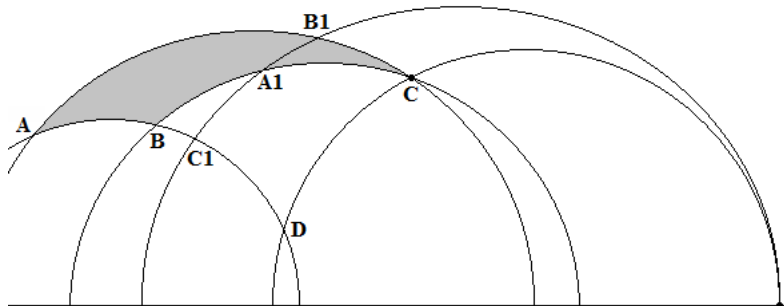
Vậy ta có:

$$\frac{sh(\overline{MC})}{sh(\overline{MA})} = \frac{sh(\overline{NC})}{sh(\overline{NB})} e^{L(\overline{AB})} \quad \square$$

Định lý 2.2. Cho tam giác Lobachevsky với các đỉnh A, B, C . Gọi A_1, B_1, C_1 tương ứng là các điểm nằm trên các đường thẳng Lob (BC), (CA), (AB) và không trùng với các đỉnh A, B, C . Khi đó A_1, B_1, C_1 thẳng hàng khi và chỉ khi:

$$\frac{sh(\overline{A_1B})}{sh(\overline{A_1C})} \frac{sh(\overline{B_1C})}{sh(\overline{B_1A})} \frac{sh(\overline{C_1A})}{sh(\overline{C_1B})} = 1 \quad (*)$$

Chứng minh.



($\Rightarrow$) Nếu A_1, B_1, C_1 thẳng hàng và nằm trên trục (Δ):

Gọi (δ) là trục qua C , có cùng mút âm vô tận với trục (Δ) và cắt đường thẳng Lob (AB) tại D .

Theo **Bổ đề 2.1**:

$$\frac{sh(\overline{B_1A})}{sh(\overline{B_1C})} = \frac{sh(\overline{C_1A})}{sh(\overline{C_1D})} e^{L(\overline{CD})} \Rightarrow \frac{sh(\overline{B_1C})}{sh(\overline{B_1A})} \frac{sh(\overline{C_1A})}{sh(\overline{C_1D})} = e^{L(\overline{DC})} \quad (1)$$

Mặt khác ta cũng có:

$$\frac{sh(\overline{C_1B})}{sh(\overline{C_1D})} = \frac{sh(\overline{A_1B})}{sh(\overline{A_1C})} e^{L(\overline{DC})} \Rightarrow e^{L(\overline{DC})} = \frac{sh(\overline{C_1B})}{sh(\overline{C_1D})} \frac{sh(\overline{A_1C})}{sh(\overline{A_1B})} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:
$$\frac{sh(\overline{A_1B})}{sh(\overline{A_1C})} \frac{sh(\overline{B_1C})}{sh(\overline{B_1A})} \frac{sh(\overline{C_1A})}{sh(\overline{C_1B})} = 1 \quad (*)$$

($\Leftarrow$) Nếu A_1, B_1, C_1 thỏa mãn (*):

Ta gọi K là giao điểm của các đường thẳng Lob (A_1B_1) và (AB) , theo chứng minh trên ta có:

$$\frac{sh(\overline{A_1B})}{sh(\overline{A_1C})} \frac{sh(\overline{B_1C})}{sh(\overline{B_1A})} \frac{sh(\overline{KA})}{sh(\overline{KB})} = 1 \quad (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra:

$$\begin{aligned} & \frac{sh(\overline{KA})}{sh(\overline{KB})} = \frac{sh(\overline{C_1A})}{sh(\overline{C_1B})} \\ \Rightarrow & \frac{sh(\overline{KA})}{sh(\overline{KB}) - sh(\overline{KA})} = \frac{sh(\overline{C_1A})}{sh(\overline{C_1B}) - sh(\overline{C_1A})} \\ \Rightarrow & \frac{sh(\overline{KA})}{sh(\overline{AB})} = \frac{sh(\overline{C_1A})}{sh(\overline{AB})} \Rightarrow sh(\overline{KA}) = sh(\overline{C_1A}) \Rightarrow K \equiv C_1 \end{aligned}$$

Vậy A_1, B_1, C_1 thẳng hàng $\square$

3. Kết luận

Định lý 2.2 thể hiện một ứng dụng của kết quả mà chúng tôi đã trình bày trong bài báo trước đây.

Có thể áp dụng **Định lý 2.2** để khảo sát tính đồng quy của các đường thẳng Lob đi qua các đỉnh của tam giác Lobachevsky $\square$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Lê Hào (2018), *Độ dài đại số Lobachevsky trong hình học với mô hình nửa mặt phẳng Poincaré, một số áp dụng*, Tạp chí Khoa học – Đại học Phú Yên, 01-06.
- [2] Nguyễn Thị Liên (2011), *Hình học trên nửa mặt phẳng Poincaré*, Luận văn Thạc sĩ - Đại học Vinh, 12-38.
- [3] Nguyễn Bá Khiển (2011), *Một số vấn đề của hình học Hyperbolic n chiều*, Luận văn Thạc sĩ – Đại học Vinh, 15-34.
- [4] Nguyễn Thị Xuyên (2008), *Một số vấn đề về hình học phi Euclide*, Đại học An Giang, 35-44.
- [5] Phan Thị Ngọc (2007), *Nửa phẳng Poincaré và hình học Hyperbolic*, Luận văn Thạc sĩ - Đại học Vinh, 25-45.
- [6] Nguyễn Mộng Hy (1999), *Xây dựng hình học bằng phương pháp tiên đề*, Nhà xuất bản Giáo dục, 95-134.
- [7] C.Royster (2002), *Non Euclidean geometry*, Course Spring, 34-90.
- [8] Henry Parker Manning (1989), *Non Euclidean geometry*, Boston USA, 20-74.

Theorem about collinear points in geometry with the Poincaré half-plane model

Le Hao

Phu Yen University

Email: lehaodhpy@gmail.com

Received: September 18, 2019; Accepted: February 10, 2020

Abstract

In a previous paper, we presented the concept of Lobachevskian algebraic distance of the directional segmental-arcs, then looked for the relationship between the Lobachevskian line segments created by intercepting the axes on two fixed Lobachevskian lines.

*Applying such results in that paper, we obtained **Theorem 2.2** on the collinear conditions of Lobachevskian points in geometry with the Poincaré half-plane model.*

Keywords: *Lobachevskian algebraic distance, directional segmental-arc, Poincaré half-plane model, Lobachevskian line segment, Lobachevskian line.*