BẤT ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN TRONG CÁC KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN

Đào Thị Kim Chi*
Trường Đại học Phú Yên

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu một số dạng bất đẳng thức tích phân đã xuất hiện trong các kì thi Olympic Toán. Bên cạnh đó giới thiệu với độc giả các cách phân tích và giải các bài toán có liên quan đến bất đẳng thức tích phân.

Từ khóa: *Bất đẳng thức, tích phân, Oympic Toán*

Abstract

Integral inequality in the Mathematical Olympiads

The aim of this paper is to introduce some forms of integral inequalities that have emerged during the Mathematical Olympiads. In addition, the researcher would also like to propose some methods of analyzing and solving the math problems regarding integral inequalities.

Key words: *inequality, integral, Mathematical Olympiad*

1. Giới thiệu. *Tuy không xuất hiện thường xuyên trong các kỳ thi Olympic Toán nhưng bất đẳng thức tích phân luôn là một trong những bài toán xuất hiện nhiều cách giải thông minh. Không có cách giải chung cho dạng toán này và mỗi bài có một cách giải đặc trưng riêng, đòi hỏi những kỹ thuật khéo léo của người giải. Một số bài toán trong đề thi sẽ cho các bạn thấy điều này.*

Bài 1. (Olympic SV 1998) *Cho* $f(x) \in C^1[0;1]$ *và* $f(0) = 0$. *Chứng minh rằng*

$$\int_0^1 |f(t)f'(t)dt| \leq \frac{1}{2}\int_0^1 \left(f'(t)\right)^2 dt$$

Lời giải. Đặt $f(x) = \int_0^x |f(x)||f'(t)|\, dt$

$$G(x) = \frac{x}{2}\int_0^x 0^x (f'(t))^2\, dt$$

Khi đó $F'(x) = |f(x)f'(x)|$; $G'(x) = \frac{1}{2}\int_0^x (f'(t))^2\, dt + \frac{x}{2}(f'(t))^2$

Mặt khác $\forall x \in [0;1], f(x) = \int_0^x f'(t)\, dt$. Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*

$$|f(x)| = \left|\int_0^x f'(t)\, dt\right| \leq \left(\int_0^x dx\right)^{1/2} \left(\int_0^x \left(f'(t)\right)^2 dt\right)^{1/2}$$

Khi đó, ta có

* Email*: kimchi.matdoi@gmail.com*

$$\left|f(x)f^{'(x)}\right| \le \sqrt{x}\left(\int_0^x \left(f^{'}(t)\right)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left|f(x)f^{'(x)}\right| \le \sqrt{x}\left(\int_0^x \left(f^{'}(t)\right)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} |f^{'}(x)|.$$

$$\to |f(x)f^{'}(x)| \le \frac{1}{2}\int_0^x f^2(t)\,dt + \frac{x}{2}\left(f^{'}(x)\right)^2$$

$$\to \forall x \in [0;1] F^{'}(x) \le G'(x) \to F(1) - F(0) \le G(1) - G(0)$$

$$\to \int_0^1 |f(t)f'(t)dt| \le \frac{1}{2}\int_0^1 \left(f'(t)\right)^2 dt$$

Đối với bài toán trên, người giải không chỉ tìm ra sự kết hợp khéo léo các điều kiện của đạo hàm và tích phân mà còn sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz quen thuộc.

Bài 2. (Olympic 2009) *Cho hàm số* $f: [0;1] \to \mathbb{R}$ *có đạo hàm cấp hai liên tục và* $f"(x) > 0$ *trên* $[0;1]$. *Chứng minh rằng* $2\int_0^1 f(t)\,dt \ge 3\int_0^1 f(t^2)\,dt - f(0)$.

Lời giải. Ta sử dụng tích phân từng phần với $\int_0^1 f(t^2)\,dt = \int_0^1 f(t)\,d\left(\sqrt{t}\right)$

Đặt $u = f(t) dv = d\left(\sqrt{t}\right)$ thì $du = f'(t)$ và chọn $v = \sqrt{t} - 1$. Ta có

$$\int_0^1 f(t^2)\,dt = f(t)\left(\sqrt{t}-1\right)\Big|\begin{matrix}1\\0\end{matrix} - \int_0^1 f'(t)\left(\sqrt{t}-1\right)dt = f(0) + \int_0^1 f'(t)\left(1-\sqrt{t}\right)dt$$

Tiếp tục áp dụng tích phân từng phần với $\int_0^1 f'(t)\left(1-\sqrt{t}\right)dt$, ta được

$$\int_0^1 f'(t)\left(1-\sqrt{t}\right)dt = \frac{f'(0)}{3} - \int_0^1 f"(x)\left(x - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\right)dx$$

Do đó , $\int_0^1 f(t^2)\,dt = f(0) + \frac{f'(0)}{3} - \int_0^1 f"(x)\left(x - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\right)dx$

Với tích phân $\int_0^1 f(t)\,dt$, ta đặt $u = f(t), dv = dt$ thì $u = f^{'}(t)$ và chọn $v = t - 1$, ta được

$$\int_0^1 f(t)\,dt = f(t)(t-1)\Big|\begin{matrix}1\\0\end{matrix} - \int_0^1 (t-1)f'(t)\,dt = f(0) + \int_0^1 (1-t)f'(t)\,dt$$

Tiếp tục áp dụng tích phân từng phần với $\int_0^1 (1-t)f'(t)\,dt$, ta được

$$\int_0^1 (1-t)f'(t)\,dt = \frac{f^{'}(0)}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^2 f"(t)\,dt$$

Do đó $\int_0^1 f(t)\,dt = f(0) + \frac{f^{'}(0)}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^2 f"(t)\,dt$

Bất đẳng thức cần chứng minh là

$2\left(f(0) + \frac{f^{'}(0)}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^2 f"(t)\,dt\right) \ge 3\left(f(0) + \frac{f'(0)}{3} - \int_0^1 f"(t)\left(t - \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\right)dt\right) -$

$f(0)$ hay $\int_0^1 (1-t)f''(t)\,dt \geq \int_0^1 f''(t)\left(2t^{\frac{3}{2}}+1-3t\right)dt$

Tuy nhiên, dễ thấy $(1-t)^2 \geq 2t^{\frac{3}{2}}+1-3t, \forall t \in [0;1]$ vì bất đẳng thức này tương đương với $t+t^2 \geq 2t^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 1+t \geq 2\sqrt{t}$, đúng theo bất đẳng thức *Cauchy*.

Cách dùng tích phân từng phần để biến đổi tích phân về dạng thích hợp để áp dụng giả thiết cũng khá phổ biến và đáng được chú ý. Nhờ nó mà ta đã chuyển hàm số dưới dấu tích phân dạng $f(x^2)$ thành $f(x)$ và tận dụng được $f''(x) \geq 0, \forall x \in [0;1]$.

Dưới đây là một bài tương tự.

Cho hàm số $f:[0;1] \to \mathbb{R}$ là một hàm khả vi cấp hai và thỏa mãn $f''(x) > 0$ trên $[0;1]$. Chứng minh bất đẳng thức sau $2\int_0^1 (1-x)f(x)\,dx \leq \int_0^1 f(x^2)\,dx$.

Bài 3. (Olympic SV 2006) *Cho hàm số liên tục $f:[0;1] \to [0;+\infty)$. Đặt $g(x) = 1 + 2\int_0^x f(t)dt$ và ta giả sử rằng luôn có $g(x) \geq [f(x)]^2, \forall x \in [0,1]$. Chứng minh rằng $g(x) \leq (1+x)^2$.*

Lời giải. Đặt $F(x)$ là hàm số thỏa mãn $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Suy ra $g(x) = 1 + 2F(x)$ và $F'(x) = f(x)$.

Theo giả thiết thì

$1 + 2F(x) = g(x) \geq \left(f(x)\right)^2$ nên $\frac{f(x)}{\sqrt{1+2F(x)}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2F'(x)}{2\sqrt{1+2F(x)}} \leq 1$.

Ta cần chứng minh $1 + 2F(x) \leq (1+x)^2 \Leftrightarrow \sqrt{1+2F(x)} - (1+x) \leq 0$.

Xét hàm số $h(x) = \sqrt{1+2F(x)} - (1+x)$ thì ta có $h'(x) = \frac{2F'(x)}{2\sqrt{1+2F(x)}} - 1 \leq 0$ nên $h(x)$ nghịch biến trên $[0;1]$.

Suy ra $h(x) \leq h(0) = \sqrt{1+2F(0)} - 1$.

Chú ý rằng $F'(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$ nên $h(0) = 0$.

Do đó $h(x) \leq 0$ với mọi $x \in [0;1]$ hay

$g(x) \leq (1+x)^2$ với mọi $x \in [0;1]$.

Bài toán được tạo ra khá thú vị khi kết hợp giữa các điều kiện liên hệ giữa hàm số và tích phân của nó để từ đó đưa về khảo sát hàm số và đạo hàm. Ở trên ta xét đạo hàm của căn bậc 2, ta hoàn toàn có thể thay bằng căn bậc n và tạo ra các bài toán tương tự.

Bài 4. (Olympic 2008) *Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn điều kiện*

$$xf(y) + yf(x) \leq 1 \;\; \forall x,y \in [0;1]$$

Chứng minh rằng $\int_0^1 f(x)\,dx \leq \frac{\pi}{4}$

Lời giải. Đặt $x = \sin\varphi$ với $\varphi \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thì ta có

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin\varphi)\cos\varphi\,d\varphi$$

Mặt khác, nếu đặt $x = \cos\emptyset, \emptyset \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ thì ta có

$I = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos\emptyset)\sin\emptyset\,d\emptyset$.

Do đó

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin\varphi)\cos\varphi\, d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos\emptyset)\sin\emptyset\, d\emptyset = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(\sin t)\cos t + f(\cos t)\sin t)\, dt$$

Theo giả thiết $xf(y) + yf(x) \leq 1$ *với mọi* $x, y \in [0;1]$ nên suy ra

$2I \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$ hay $I \leq \frac{\pi}{4}$.

Nhiều bạn cho rằng đánh giá theo cách đổi biến thành hàm lượng giác như trên có hơi thiếu tự nhiên và có vẻ giả thiết được sử dụng chưa triệt để (giả thiết cho bất đẳng thức đúng với mọi x, y *và ta chỉ sử dụng một lần khi đặt* $x = \sin t, y = \cos t$*). Tuy nhiên, giả thiết đó được đưa ra để hướng đến đẳng thức có sẵn*

$$2\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(\sin t)\cos t + f(\cos t)\sin t)\, dt$$

Bằng chứng chính là số 1 trong bất đẳng thức $xf(y) + yf(x) \leq 1$ *hoàn toàn có thể thay bằng số khác.*

Bài 5. (Olympic SV 2012)

a) Cho hàm số f *khả vi liên tục cấp 2 trên* $\mathbb{R}$*. Giả sử* $f(1) = 0$ *và* $\int_0^1 f(x)\, dx = 0$*. Chứng minh rằng với mọi* $\alpha \in (0;1)$*, ta có* $\left|\int_0^\alpha f(x)\, dx\right| \leq \frac{2}{81} max_{0\leq x\leq 1} |f''(x)|$.

b) Cho hàm số $f: [0;1] \to \mathbb{R}$ *là hàm lõm (còn gọi là lồi phía trên), khả vi liên tục thỏa mãn* $f(0) = f(1) = 0$*. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{1 + 4\max_{0\leq x\leq 1} f^2(x)} \leq \int_0^1 \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx \leq 1 + 2\max_{0\leq x\leq 1} f(x)$$

Lời giải.

a) Ta có

$$\int_0^1 xf'(x)\, dx = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)\, dx = f(1) - \int_0^1 f(x)\, dx = 0$$

Do đó

$$\int_0^\alpha f(x)\, dx = \alpha\int_0^1 f(\alpha x)\, dx = \alpha\int_0^1 [f(\alpha x) - f(x) - (\alpha - 1)xf'(x)]dx$$

$$= \alpha(\alpha - 1)^2 \int_0^1 \frac{f''(\theta)}{2} x^2 dx$$

Suy ra

$$\left|\int_0^\alpha f(x)\, dx\right| = \left|\alpha(\alpha - 1)^2 \int_0^1 \frac{f''(\theta)}{2} x^2 dx\right| = \left|\alpha(\alpha - 1)^2 \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx\right| |f''(\theta)|$$

Ta có $\int_0^1 \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^3}{6}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$ và $\alpha(\alpha - 1)^2 = \frac{1}{2}. 2\alpha(1 - \alpha)(1 - \alpha) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha + 1 - \alpha + 1 - \alpha}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}$.

Từ đó, ta có được

$\left|\int_0^\alpha f(x)\, dx\right| \leq \frac{1}{6}.\frac{4}{27} |f''(\theta)| \leq \frac{2}{81} \max_{0\leq x\leq 1} |f''(x)|$. Đây chính là điều phải chứng minh.

b) Gọi x_0 là điểm cực đại và y_0 là giá trị cực đại của $f(x)$ trên miền $[0;1]$. Ta có $\int_0^1 |f'(x)|\,dx = \int_0^{x_0} f'(x)\,dx + \int_{x_0}^1 -f'(x)\,dx = \big(f(x_0) - f(0)\big) - \big(f(1) - f(x_0)\big) = 2f(x_0)$ nên $\max f(x) = f(x_0) = \frac{1}{2}\int_0^1 |f'(x)|\,dx$.

Bất đẳng thức thứ nhất tương đương với

$$1 + \left(\int_0^1 |f'(x)|\,dx\right)^2 \le \left(\int_0^1 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx\right)^2 (*)$$

Ta có

$$\left(\int_0^1 \sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\,dx\right)^2 - \left(\int_0^1 |f'(x)|\,dx\right)^2$$

$$= \int_0^1 \left(\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2} + |f'(x)|\right)dx.\int_0^1 \left(\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2} - |f'(x)|\right)dx$$

$$= \int_0^1 \left(\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2} + |f'(x)|\right)dx.\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2} + |f'(x)|}\,dx \ge \int_0^1 dx = 1$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức (*) đúng.

Bất đẳng thức thứ hai tương đương với $\int_0^1 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \le 1 + \int_0^1 |f'(x)|\,dx$ (**)

$$\int_0^1 \sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\,dx - \int_0^1 |f'(x)|\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2} - |f'(x)|\right)dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2} + |f'(x)|}\,x \le \int_0^1 dx = 1$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức (**) cũng đúng. Vậy ta có điều phải chứng minh.

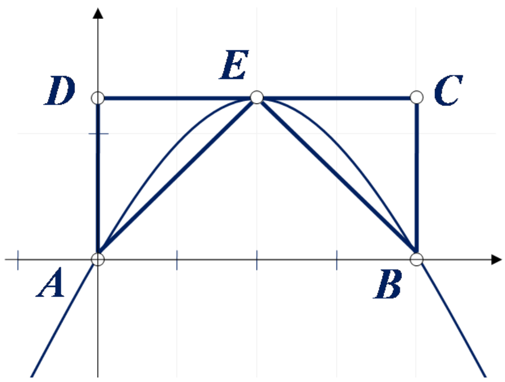
Cả 2 câu của bài toán này đều khó nhưng trên thực tế, hầu hết các thí sinh đều chọn câu b (có một ý dễ xử lí hơn). Câu a đòi hỏi phải chứng minh đẳng thức

$$\int_0^\alpha f(x)\,dx = \alpha(\alpha-1)^2 \int_0^1 \frac{f"(\theta)}{2}x^2 dx$$

Nói chung đây là một kết quả không dễ dàng có thể khai thác được từ giả thiết nếu không nắm vững khai triển Taylor. Nếu đã hoàn tất việc chứng minh được đẳng thức trên thì công việc còn lại hoàn toàn tự nhiên.

Đối với câu b, lời giải bằng hình học dưới đây sẽ cho ta thấy rõ bản chất vấn đề hơn.

Ta biết rằng đại lượng $l = \int_0^1 \sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\,dx$ *chính là độ dài của đường cong* $y = f(x)$ *trên miền* $[0;1]$. *Ta có thể minh họa hình học cho bài toán này như sau*



Chọn tọa độ các điểm $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(1;\, y_0)$, $D(0;\, y_0)$, $E(x_0, y_0)$ như hình trên.
Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt{1+4{y_0}^2} \le l \le 1+2y_0$$

Do đồ thị của hàm số này lồi lên phía trên nên

$$l \le AD + DE + BC + CE = CD + AD + BC = 1 + 2y_0$$

Hơn nữa $l \ge AE + BE = \sqrt{AD^2+DE^2} + \sqrt{BC^2+CE^2} \ge \sqrt{(AD+BC)^2+(DE+CE)^2} = \sqrt{1+4{y_0}^2}$

Bài toán được giải quyết hoàn toàn.

Bài 6. (2014) *Cho f hàm số liên tục trên* $[0;+\infty)$. *Giả sử rằng*

$$\int_0^x f^2(t)dt \le \frac{x^3}{3} \quad ,\forall x \ge 0$$

Chứng minh rằng $\int_0^x f(t)dt \le \frac{x^2}{2}$ *với mọi* $x \ge 0$.

Lời giải. Từ giả thiết

$$\int_0^x f^2(t)dt \le \int_0^x t^2\, dt$$

Theo bất đẳng thức *Cauchy – Schwartz*, ta có

$\left(\int_0^x tf(t)dt\right)^2 \le \int_0^x t^2\,dt \int_0^x f^2(t)dt \le \left(\int_0^x t^2\,dt\right)^2$.

Vì vậy

$\int_0^x tf(t)dt \le \int_0^x t^2\,dt$ hay là $F(x) = \int_0^x t(t-f(t))dt \ge 0$

Mặt khác,

$$\int_0^x (t-f(t))dt = \int_0^x \frac{1}{t} t(t-f(t))dt$$

$$= \int_0^x \frac{1}{t} dF(t) = \frac{F(x)}{x} + \int_0^x \frac{F(t)}{t^2} dt \ge 0.$$

Từ đó, $\int_0^x (t-f(t))\,dt \ge 0$ hay là $\int_0^x f(t)dt \le \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$.

Chúng ta thấy ngoài kỹ thuật sử lý khéo léo, kết hợp các mối liên hệ giữa đạo hàm và tích phân thì còn có bóng dáng của phương pháp đánh giá hay sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, bất đẳng thức Holder hay định lý giá trị trung bình. Để thấy phương pháp đánh giá và các bất đẳng thức được sử dụng "đẹp" trong các bài toán thế nào thì ta sẽ đi sâu vào từng phương pháp.

2. Một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức tích phân.

Phương pháp 1. Tổng quát phương pháp chứng minh bất đẳng thức tích phân bằng phương pháp đánh giá

Để chứng minh $\int_a^b f(x) \leq A$ ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Xác định một hàm số $g(x)$ thõa mãn các điều kiện sau:

$$\begin{cases} f(x) \leq g(x), \forall x \in [a,b] \\ \displaystyle\int_a^b g(x) \leq A \end{cases}$$

Bước 2. $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) \leq \int_a^b g(x) = A$. Dấu "=" của bất đẳng thức xảy ra khi $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a,b]$. Sau đây ta sẽ phân tích từng dạng bài cụ thể

Ví dụ 1. (Olympic SV 2000) *Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[0,1]$ và thỏa mãn điều kiện*

$$\int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2\, dx \leq \frac{x_2^3 - x_1^3}{3}$$

Với mọi $x_1, x_2 \in [1,2]$ sao cho $x_1 \leq x_2$. Chứng minh rằng

$$\int_1^2 f(x)\, dx \leq \frac{3}{2}$$

Lời giải. Ta có

$$\int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2\, dx \leq \frac{x_2^3 - x_1^3}{3}$$

Hay

$$\int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2\, dx \leq \int_{x_1}^{x_2} x^2\, dx$$

Vậy

$$\int_{x_1}^{x_2} |x^2 - [f(x)]^2|\, dx \geq 0 \quad \forall x_1 \leq x_2$$

Suy ra tồn tại $c \in [x_1, x_2]$ sao cho $[f(c)]^2 = c^2 \leq 0$

Do hàm $h(x) = x^2 - [f(x)]^2$ liên tục trong $[1,2]$ nên $(f(x)^2) - x^2 \leq 0 \;\; \forall x \in [0,1]$.

Vậy $|f(x)| \leq x \;\; \forall x \in [1,2]$. Từ đó$\int_1^2 f(x)\, dx \leq \int_1^2 |f(x)|\, dx \leq \int_1^2 x\, dx = \frac{3}{2}$.

Bài toán trên sử dụng kỹ thuật nhằm mục đích đưa ra $|f(x)| \leq x$ để đi đến kết luận bài toán

Ví dụ 2. *Chứng minh bất đẳng thức:*

$$\frac{1}{20\sqrt[3]{2}} < \int_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt[3]{1+x^6}} dx < \frac{1}{20}$$

Lời giải. $\forall x \in [0,1]$ thì $1 \leq \sqrt[3]{1+x^6} \leq \sqrt[3]{2}$

Do$\frac{x^{19}}{\sqrt[3]{2}} \leq \frac{x^{19}}{\sqrt[3]{1+x^6}} \leq x^{19}, \forall x \in [0,1]$

Hiển nhiên

$$\frac{x^{19}}{\sqrt[3]{2}} \leq \frac{x^{19}}{\sqrt[3]{1+x^6}} \leq x^{19}, \forall x \in (0,1)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt[3]{2}} \leq \int_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt[3]{1+x^6}} dx \leq \int_0^1 x^{19}, \forall x \in (0,1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{20\sqrt[3]{2}} < \int_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt[3]{1+x^6}} < \frac{1}{20}$$

Bài toán trên sử dụng phương pháp đánh giá hàm số theo cận $[a, b]$ bằng phương pháp đại số.

Ví dụ 3. *Chứng minh rằng*

$$\frac{\sqrt{3}}{4} < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{sinx}{x} dx < \frac{1}{2}$$

Lời giải. Xét hàm số $y = \frac{sinx}{x}$ với $x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$

$$\Rightarrow y' = \frac{xcosx - sinx}{x^2} = \frac{(x - tanx)cosx}{x^2} < 0, \forall x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$$

Do $y = tanx - x \Rightarrow y' = tan^2x + 1 - 1 = tan^2x > 0, \forall x \in (0, +\infty)$

$$\Rightarrow y(x) > y(0) = 0 \Rightarrow tanx - x > 0$$

$\Rightarrow$Hàm số $y = \frac{sinx}{x}$ là hàm nghịch biến trên D

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{sinx}{x} \leq y\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Dấu "=" xảy ra tại $x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{3}$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dx \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{sinx}{x} dx \leq \frac{3}{\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dx$$

Do đó

$$\frac{\sqrt{3}}{4} < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{sinx}{x} dx < \frac{1}{2}$$

Bài toán trên sử dụng đạo hàm để khảo sát hàm số dưới dấu tích phân.

Phương pháp 2. Sử dụng bất đẳng thức cơ bản để chứng minh bất đẳng thức tích phân, ta cần một số bất đẳng thức cơ bản [1] sau:

1) Định lý giá trị trung bình

*Định lý trung bình thứ I

Nếu các hàm số $f(x), g(x)$ khả tích trên đoạn $[a, b], g(x)$ không đổi dấu trong khoảng (a, b). Kí hiệu $m = inf_{x\in[a,b]}f(x), M = sup_{x\in[a,b]}f(x)$ thì tồn tại $\mu \in [m, M]$ sao cho $\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$

Hơn nữa, nếu $f(x)$ liên tục trong đoạn $[a,b]$ thì tồn tại $c \in [a,b]$ sao cho $\int_a^b f(x)g(x)d = f(c)\int_a^b g(x)dx$

*Định lý trung bình thứ II

a) Nếu các hàm số $f(x), g(x)$ khả tích trên đoạn $[a,b]$ và $g(x)$ là hàm đơn điệu trong khoảng (a,b) thì $\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a+0)\int_a^\xi f(x)dx + g(b-0)\int_\xi^b f(x)dx$ trong đó $a \le \xi \le b$

b) Hơn nữa, nếu $g(x)$ là hàm đơn điệu giảm không âm trong khoảng (a,b) thì

$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a+0)\int_a^\xi f(x)dx$, $a \le \xi \le b$

c) Nếu $g(x)$ là hàm đơn điệu tăng,không âm trong khoảng (a,b) thì

$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b-0)\int_\xi^b f(x)dx$, $a \le \xi \le b$

2) Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

Nếu $f(x), g(x)$ là các hàm số liên tục trên $[a,b]$. Khi đó:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \int_b^b g^2(x)dx$$

3) Bất đẳng thức Holder

Cho $p, q, > 1$ thỏa $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ và f, g là các hàm số liên tục trên $[a,b]$. Khi đó:

$$\int_a^b |f(x) + g(x)| \quad dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

4) Bất đẳng thức Young

Cho $a \in \mathbb{R}^+ f: [0,a] \to \mathbb{R}$ là một ánh xạ thuộc lớp C^1 sao cho

$$\begin{cases} \forall x \in [0,a], f'(x) > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Ta kí hiệu $f^{-1}: [0, f(a)] \to \mathbb{R}$ là ánh xạ ngược của $f(x)$

Khi đó $\forall x \in [0,a], y \in [0, f(a)]$ $\int_0^x f(x)dx + \int_0^y f^{-1}(x)dx \ge xy$

Ví dụ 4. *Chứng minh rằng nếu f khả tích Riemann trên $[a,b]$ thì*

$$\left(\int_a^b f(x)sinxdx\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)cosxdx\right)^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)\,dx$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz*, ta được

$$\left(\int_a^b f(x)sinxdx\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)cosxdx\right)^2$$
$$\le \int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b sin^2(x)\,dx + \int_a^b f^2(x)\,dx \int_a^b cos^2(x)\,dx$$
$$= (b-a)\int_a^b f^2(x)\,dx$$

Ở ví dụ này ta thấy ngay dấu hiệu cần dùng bất đẳng thức khi nhìn vế bên trái và bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz* là thích hợp nhất.

Ví dụ 5. *Chứng minh rằng nếu f dương và khả tích Riemann trên $[a,b]$ thì*

$$(b-a)^2 \le \int_a^b f(x)dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)}$$

Hơn nữa nếu $0 < m \le f(x) \le M$ *thì* $\int_a^b f(x)dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \le \frac{(m+M)^2}{4mM}(b-a)^2$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy-Schwarz*, ta có

$$(b-a)^2 = \left(\int_a^b \sqrt{f(x)}\frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx\right)^2 \le \int_a^b f(x)dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)}$$

Vì $0 < m \le f(x) \le M$ nên $\frac{(f(x)-m)(M-f(x))}{f(x)} \le 0, a \le x \le b$

Ta có

$$\int_a^b \frac{(f(x)-m)(M-f(x))}{f(x)}dx \le 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx - (m+M)\int_a^b dx + mM\int_a^b \frac{dx}{f(x)} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx + mM\int_a^b \frac{dx}{f(x)} \le (m+M)(b-a)$$

$$\Leftrightarrow mM\int_a^b \frac{dx}{f(x)} \le (m+M)(b-a) - \int_a^b f(x)\,dx$$

Do đó:

$$mM\int_a^b f(x)dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \le (m+M)(b-a) - \left(\int_a^b f(x)dx\right)^2$$

Xét hàm số: $y = g(t) = -t^2 + kt$. Hàm số đạt cực đại tại $t = \frac{k}{2}$ với giá trị cực đại là $\frac{k^2}{4}$

Với $k = (m+M)(b-a), t = \int_a^b f(x)dx$ ta có:

$$(m+M)(b-a) - \left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \le \frac{(m+M)^2(b-a)^2}{4}$$

Do đó: $mM\int_a^b f(x)dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \le \frac{(m+M)^2(b-a)^2}{4}$

$$\Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \le \frac{(m+M)^2}{4mM}(b-a)^2$$

Ví dụ 6. *Cho* $a \in \mathbb{R}^+$ *là một ánh xạ thuộc lớp* C^1 *sao cho* $f'(x) > 0$ *và* $g: [0, f(a)] \longrightarrow \mathbb{R}$ *liên tục sao cho* $\forall x \in [0,1], g(f(x)) \ge x$. *Chứng minh rằng:*

$$\forall x \in [0,a], y \in [0, f(a)], \int_0^x f(x)dx + \int_0^x g(x)\,dx \ge xy$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Young $\forall y \in [0, f(a)]$, thì:

$$g(y) = g\left(f\left(f'(x)\right)\right) \geq f^{-1}(y)$$

Từ đó:

$$\int_0^x f(x)dx + \int_0^x g(x)\,dx \geq \int_0^x f(x)dx + \int_0^y f^{-1}(x)\,dx \geq xyxy$$

Ví dụ 7. *Tìm giá trị lớn nhất của* $S = \frac{\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^{2011}}{\int_0^1 f^{2011}(x)dx}$ *với* f *liên tục, dương trên* $[0,1]$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức *Holder* ta có:

$$\int_0^2 f(x)1dx \leq \left(\int_0^2 |f(x)|^{2011}dx\right)^{\frac{1}{2011}}\left(\int_0^2 1^{\frac{2011}{2010}}dx\right)^{\frac{2010}{2011}} = \sqrt[2011]{2^{2010}}\left(\int_0^2 |f(x)|^{2011}dx\right)^{\frac{1}{2011}}$$

$$\Rightarrow \left(\int_0^2 |f(x)|^{2011}dx\right)^{\frac{1}{2011}} \leq 2^{2010}\int_0^2 f^{2011}(x)dx$$

$$\Longrightarrow S = \frac{\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^{2011}}{\int_0^1 f^{2011}(x)dx} \leq 2^{2010}$$

Vậy $maxS = 2^{2010}$

Ví dụ 8. *Chứng minh rằng* $\frac{-2}{a} < \int_a^b e^{-\alpha x\frac{sin}{x}}dx < \frac{2}{a}\,(\alpha \geq 0, 0 < a < b)$

Lời giải. Đặt $f(x) = \frac{e^{-\alpha x}}{x} = \frac{1}{xe^{\alpha x}}$

$f(x)$là một hàm giảm $\forall x \in [a,b], \alpha \geq 0$ và $|sinx| \leq 1$

Áp dụng định lý giá trị trung bình thứ 2 ta được:

$$I = \int_a^b e^{-\alpha x\frac{sin}{x}}dx = \frac{e^{-\alpha x}}{a}\int_a^c sinxdx = \frac{e^{-\alpha x}}{a}(cosa - cosc) \quad \forall a \leq c \leq b$$

$$\Longrightarrow |I| = \left|\frac{e^{-\alpha x}}{a}(cosa - cosc)\right| = \left|\frac{(cosa - cosc)}{e^{\alpha x}a}\right| < \frac{2}{a}$$

Do $\alpha a > 0 \Longrightarrow e^{\alpha a} > 1 \Longrightarrow e^{-\alpha a} < 1$

Trên đây chỉ là 2 phương pháp để chứng minh bất đẳng thức tích phân ngoài ra còn có phương pháp chứng minh phản chứng, dùng mối liên hệ giữa đạo hàm và tích phân và một số dạng toán không mẫu mực. Bạn đọc có thể sử dụng những phương pháp phù hợp vào từng bài cụ thể❒

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Đào Thị Hải Yến-Đào Thị Kim Chi (2016), *Các chuyên đề bồi dưỡng Olympic Toán Sinh viên Môn giải tích* .

[2] Bộ đề thi và bài giải Olmpic Toán 1993-2005.

[3] Bộ đề thi và bài giải Olmpic Toán 2006-2011.

[4] Bài giảng bồi dưỡng Olympic Toán sinh viên, ĐHSP Huế, 2001.

[5] Đề thi dự tuyển Oympic sinh viên toàn quốc, Hội Toán học Việt Nam, lần thứ 10

[6] Nguyễn Trần Quang Vinh (2005), *Phân loại phương pháp chứng minh bất đẳng thức tích phân và một số ứng dụng của bất đẳng thức tích phân*, Khoa Sư phạm Trường Đại học An Giang.

.

(*Ngày nhận bài: 16/04/2018; ngày phản biện:27/04/2018; ngày nhận đăng: 07/06/2018*)