

MỘT SỐ KẾT QUẢ VỀ C3-MÔĐUN

Lê Đức Thoang*, Võ Thị Mỹ Hưng

Trường Đại học Phú Yên

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi khảo sát quan hệ giữa các lớp C_i -môđun ($i=1, 2, 3$) và các lớp môđun liên quan, chúng tôi chứng minh tường minh một số tính chất của C3-môđun.

Từ khóa: C3-môđun.

Abstract

Some results on C3-modules

In this paper, we consider the relationships between the C_i -modules classes ($i = 1, 2, 3$) and the related modules classes. We have explicitly demonstrated some properties of the C3-modules.

Key words: C3-modules.

1. Giới thiệu và một số khái niệm

Trong bài này, chúng tôi luôn giả thiết vành R đã cho là vành kết hợp có đơn vị $1 \neq 0$ và mọi R -môđun được xét là môđun unita. Với vành R , ta kí hiệu M_R (${}_R M$) để chỉ M là một R -môđun phải (trái, tương ứng). Trong một ngữ cảnh cụ thể, khi không sợ nhầm lẫn về phía của môđun, để đơn giản ta viết môđun M thay vì M_R . Kí hiệu $N \leq M$ để chỉ N là một môđun con của M . Môđun con A của M được gọi là một hạng tử trực tiếp của M nếu có môđun con B của M thỏa mãn $M = A \oplus B$ (tức là $M = A + B$ và $A \cap B = 0$), khi đó ta kí hiệu $A \leq^\oplus M$. Môđun con $N \leq M$ được gọi là môđun con cốt yếu (essential submodule), nếu với mọi môđun con $A \leq M$, $N \cap A = 0$ thì phải có $A = 0$, kí hiệu $N \leq^{\text{ess}} M$. Môđun U_R được gọi là nội xạ theo M_R (hay U là M -nội xạ) trong trường hợp với mọi đơn cấu $f: N_R \rightarrow M_R$ và mỗi đồng cấu $h: N_R \rightarrow U_R$ tồn tại một đồng cấu $\bar{h}: M_R \rightarrow U_R$ sao cho biểu đồ sau giao hoán:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{f} & M \\ & & h \downarrow & \swarrow \bar{h} & \\ & & U & & \end{array}$$

Môđun U được gọi là tự nội xạ (hay tựa nội xạ) nếu U nội xạ theo U . Môđun U được gọi là nội xạ nếu U là M -nội xạ, với mọi $M \in \text{Mod} - R$ (phạm trù các R -môđun phải). Lớp các môđun nội xạ là một lớp môđun quan trọng trong Lý thuyết vành và môđun. Chúng ta có thể tìm hiểu thêm về những khái niệm và kết quả liên quan đến bài viết này trong tài liệu tham khảo [AF] và [Kacsh].

* Email: leducthoang@pyu.edu.vn

Chúng ta xét các điều kiện sau:

(C1): Mọi môđun con của M là cốt yếu trong một hạng tử trực tiếp của M .

(C2): Với mọi môđun con A, B của M , nếu $A \cong B$ và $B \leq^{\oplus} M$ thì $A \leq^{\oplus} M$.

(C3): Nếu A, B là các môđun con của M với $A \leq^{\oplus} M$, $B \leq^{\oplus} M$ và $A \cap B = 0$, thì

$$A \oplus B \leq^{\oplus} M.$$

Định nghĩa 1.1. Một môđun M được gọi là một *C1-môđun* (hay CS-môđun) nếu M thỏa điều kiện (C1), M được gọi là *C2-môđun* nếu M thỏa điều kiện (C2), M được gọi là *C3-môđun* nếu M thỏa điều kiện (C3).

Ví dụ 1.2. $\mathbb{Z}$ -môđun $\mathbb{Z}_2$ và $\mathbb{Z}_8$ thỏa mãn các điều kiện (C1), (C2) và (C3).

Lớp các môđun thỏa mãn điều kiện C_i ($i=1, 2, 3$) là một lớp mở rộng của môđun nội xạ, tựa nội xạ.

2. C_i -môđun ($i = 1, 2, 3$) và các lớp môđun liên quan

Trước tiên, ta sẽ khảo sát về quan hệ giữa các điều kiện (C1), (C2) và (C3).

Mệnh đề 2.1. Nếu môđun M thỏa điều kiện (C2) thì M thỏa điều kiện (C3).

Chứng minh.

Giả sử $A \leq^{\oplus} M$, $B \leq^{\oplus} M$ và $A \cap B = 0$, ta cần chứng minh $A \oplus B \leq^{\oplus} M$.

Vì $A \leq^{\oplus} M$ nên giả sử $M = A \oplus A'$ với $A' \leq M$. Xét phép chiếu $\pi: M \rightarrow A'$, ta có $\text{Ker}\pi = A$. Lấy $b \in B$ và $b = a + a'$, $a \in A, a' \in A'$, từ đó suy ra $\pi b = a' \in A'$ do đó $\pi B \leq A'$. Rõ ràng $\pi: B \rightarrow \pi B$ là đẳng cấu. Do đó, để chứng minh $A \oplus B \leq^{\oplus} M$, ta chỉ cần chứng minh $A \oplus \pi B \leq^{\oplus} M$. Vì M thỏa điều kiện (C2) mà $B \leq^{\oplus} M, \pi B \cong B$ nên $\pi B \leq^{\oplus} M$. Từ $\pi B \leq^{\oplus} A'$ suy ra $A' = \pi B \oplus V$ với V là một môđun con nào đó của A' . Vậy $M = A \oplus \pi B \oplus V$. $\square$

Như vậy, một C2-môđun là C3-môđun. Các ví dụ sau cho chúng ta rõ thêm về quan hệ giữa các lớp C_i -môđun ($i=1, 2, 3$).

Ví dụ 2.2. Môđun $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ thỏa mãn cả điều kiện (C1) và (C3) nhưng không thỏa điều kiện

(C2). Tuy nhiên, nếu F là một trường, giả sử $R = \begin{bmatrix} F & V \\ 0 & F \end{bmatrix}$ trong đó $V = F \oplus F$. Nếu

$e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ thì $eR = \begin{bmatrix} F & V \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ là một C2-môđun, nhưng nó không là một C1-môđun.

Ví dụ 2.3. Cho $R = \begin{bmatrix} F & F \\ 0 & F \end{bmatrix}$, trong đó F là một trường bất kỳ và

$A = \begin{bmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix}$. Khi đó, A là một R -môđun nội xạ, B là một R -môđun đơn.

Tuy nhiên $R = A \oplus B$ là R_R -môđun thỏa điều kiện (C1) nhưng không thỏa điều kiện (C3).

Mệnh đề 2.4. *Môđun tựa nội xạ M thỏa mãn các điều kiện (C1) và (C2).*

Chứng minh.

Trước tiên ta chứng minh $f(M) \leq M$ với mọi $f \in \text{End}(E(M))$.

Vì $E(M)$ là nội xạ nên ta xét $f \in \text{Hom}(M, E(M))$. Giả sử $A = \{m \in M : f(m) \in M\}$.

Xét biểu đồ:

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & M \\
 & & \downarrow f|_A & \nearrow h & \\
 & & M & & \\
 & & \downarrow & \nearrow f & \\
 & & E(M) & &
 \end{array}$$

Vì M là tựa nội xạ nên đồng cấu $f|_A$ có thể mở rộng tới một đồng cấu $h : M \rightarrow M$ tức là $f|_A = hi$ trong đó i là ánh xạ nhúng chính tắc từ A vào M .

Ta cần chứng minh $M \cap (h - f)M = 0$. Thật vậy, giả sử $x \in M \cap (h - f)M$, tồn tại $y \in M$ sao cho $x = (h - f)(y) = h(y) - f(y)$. Khi đó $f(y) = h(y) - x \in M$, do đó $y \in A$.

Ta có $x = h(y) - f(y) = f(y) - f(y) = 0$ nên $M \cap (h - f)M = 0$ và do đó $(h - f)M = 0$ vì $M \leq^{ess} E(M)$. Vậy $fM = hM \leq M$.

Gọi N là một môđun con của M . Ta có $E(M) = E_1 \oplus E_2$ trong đó $E_1 = E(N)$. Vì $f(M) \leq M$ với mọi $f \in \text{End}E(M)$ nên $M = M \cap E_1 \oplus M \cap E_2$. Gọi U là môđun con khác không của $M \cap E_1$, ta có U là môđun con của E_1 mà $U \leq^{ess} E_1$ nên $N \cap U \neq 0$, do đó $N \leq^{ess} M \cap E_1$. Vậy M thỏa điều kiện (C1).

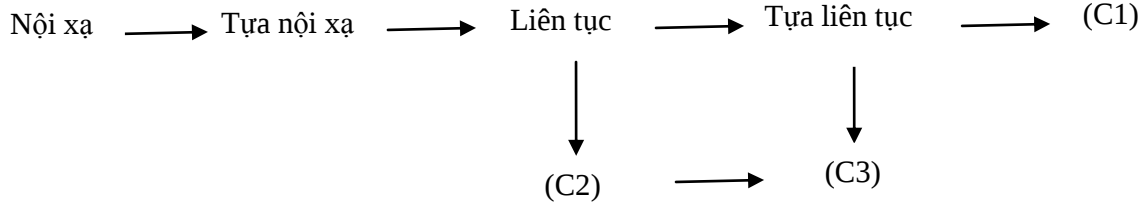
Giả sử $A \leq M$, $A \cong B$ và $B \leq^\oplus M$ ta cần chứng minh $A \leq^\oplus M$. Thật vậy, ta có đơn cấu $f : B \rightarrow M$ sao cho $\text{Im } f = A$. Vì M là tựa nội xạ và $B \leq^\oplus M$ nên B là M -nội xạ. Từ đó suy ra tồn tại đồng cấu $g : M \rightarrow B$ sao cho $gf = id_B$. Ta có

$M = \text{Im } f \oplus \text{Ker } g = A \oplus \text{Ker } g$ hay $A \leq^{\oplus} M$. Vậy M thỏa điều kiện (C2). $\square$

Như vậy, môđun tựa nội xạ là C_i -môđun, với $i=1, 2, 3$.

Nhắc lại rằng, một R -môđun M được gọi là *liên tục* nếu nó thỏa mãn điều kiện (C1) và (C2), M được gọi là *tựa liên tục* nếu nó thỏa mãn điều kiện (C1) và (C3). Một R -môđun M được gọi là *đều* nếu mọi môđun con khác không của nó đều cốt yếu trong M .

Ta có sơ đồ sau về mối quan hệ của các lớp môđun:



Tiếp theo, chúng ta xét hạng tử trực tiếp của một C_i -môđun ($i = 1, 2, 3$)

Bổ đề 2.5. *Hạng tử trực tiếp của một C_i -môđun cũng là một C_i -môđun ($i = 1, 2, 3$).*

Chứng minh.

Trước hết, ta chứng minh rằng mọi hạng tử trực tiếp của một C_1 -môđun là C_1 -môđun. Giả sử M là C_1 -môđun và N là hạng tử trực tiếp của M . Ta chỉ cần chứng minh N cũng là C_1 -môđun. Xét T là môđun con đóng trong N . Do đó, T đóng trong M . Vì M là C_1 -môđun nên $T \leq^{\oplus} M$, nghĩa là $M = T \oplus X$ với môđun con X nào đó của M .

Theo luật modular, ta có $N = N \cap M = N \cap (T \oplus X) = T \oplus (N \cap X)$. Do đó $T \leq^{\oplus} N$. Bởi vậy N cũng là C_1 -môđun.

Tiếp theo, ta chứng minh mọi hạng tử trực tiếp của C_2 -môđun là một C_2 -môđun. Giả sử M là C_2 -môđun và L là hạng tử trực tiếp của M . Ta chứng minh L cũng là C_2 -môđun. Xét $B \leq^{\oplus} L$, $A \cong B$ với $A \leq L$ ta chỉ cần chứng minh $A \leq^{\oplus} L$. Thật vậy, vì $B \leq^{\oplus} L$ nên $L = B \oplus X$ với $X \leq L$ và $L \leq^{\oplus} M$ nên $M = L \oplus Y$ với $Y \leq M$. Từ đó suy ra $M = B \oplus X \oplus Y$. Vì M là một C_2 -môđun, $B \leq^{\oplus} M$ và $A \cong B$ nên $A \leq^{\oplus} M$. Do đó $M = A \oplus Z$. Theo luật modular ta có $L = M \cap L = (A \oplus Z) \cap L = A \oplus (Z \cap L)$. Vậy $A \leq^{\oplus} L$.

Cuối cùng, ta chứng minh mọi hạng tử trực tiếp của C_3 -môđun là một C_3 -môđun. Giả sử M là C_3 -môđun và K là hạng tử trực tiếp của M . Ta chứng minh K cũng là C_3 -môđun. Xét $E \leq^{\oplus} K$, $F \leq^{\oplus} K$ và $E \cap F = 0$ ta chỉ cần chứng minh $E \oplus F \leq^{\oplus} K$. Thật vậy, vì $K \leq^{\oplus} M$ nên $M = K \oplus H$ với $H \leq M$ và $E \leq^{\oplus} K$, $F \leq^{\oplus} K$ nên $K = E \oplus C = F \oplus D$. Từ đó suy ra $M = E \oplus C \oplus H = F \oplus D \oplus H$ do đó $E \leq^{\oplus} M$, $F \leq^{\oplus} M$. Hơn nữa, M là một C_3 -môđun và $E \cap F = 0$ nên $E \oplus F \leq^{\oplus} M$. Do đó $M = E \oplus F \oplus U$ với $U \leq M$. Theo luật modular ta có $K = M \cap K = (E \oplus F \oplus U) \cap K = E \oplus F \oplus (U \cap K)$.

Vậy $E \oplus F \leq^{\oplus} K$. $\square$

3. Một số tính chất của C3-môđun

Mệnh đề 3.1. Cho M là một R -môđun phải. Những điều kiện sau đây là tương đương:

1. M là một C3-môđun.
2. Nếu $A \leq^{\oplus} M$, $B \leq^{\oplus} M$ và $A \cap B = 0$ thì $M = A_1 \oplus B = A \oplus B_1$ với các môđun con $A \leq A_1$ và $B \leq B_1$.
3. Nếu $A \leq^{\oplus} M$, $B \leq^{\oplus} M$ và $A \cap B \leq^{\oplus} M$, thì $A + B \leq^{\oplus} M$.

Chứng minh.

(1) $\Rightarrow$ (2) Giả sử $A \leq^{\oplus} M$, $B \leq^{\oplus} M$ và $A \cap B = 0$. Vì M là một C3-môđun nên $A \oplus B \leq^{\oplus} M$. Do đó, tồn tại một môđun con $T \leq M$ sao cho $M = A \oplus B \oplus T$. Đặt $A_1 = A \oplus T$ và $B_1 = B \oplus T$. Khi đó ta có $M = A_1 \oplus B = A \oplus B_1$ với các môđun con $A \leq A_1$ và $B \leq B_1$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Giả sử $A \leq^{\oplus} M$, $B \leq^{\oplus} M$ và $A \cap B = 0$. Theo giả thiết, ta có $M = A_1 \oplus B = A \oplus B_1$ với các môđun con $A \leq A_1$ và $B \leq B_1$. Khi đó, $B_1 = B_1 \cap M = B_1 \cap (A_1 \oplus B) = B \oplus (A_1 \cap B_1)$. Do đó, $M = A \oplus B_1 = A \oplus B \oplus (A_1 \cap B_1)$.

(1) $\Rightarrow$ (3) Vì $A \cap B \leq^{\oplus} M$ nên $M = (A \cap B) \oplus K$ với một môđun con $K \leq M$. Ta có, $A = A \cap M = (A \cap B) \oplus (A \cap K)$ và $B = B \cap M = (A \cap B) \oplus (B \cap K)$. Vì M là một C3-môđun, $(A \cap K) \leq^{\oplus} M$, $(B \cap K) \leq^{\oplus} M$ và $(A \cap K) \cap (B \cap K) = (A \cap B) \cap K = 0$ nên $T = (A \cap K) \oplus (B \cap K) \leq^{\oplus} M$. Hơn nữa, $T \leq^{\oplus} M$, $(A \cap B) \leq^{\oplus} M$ và $(A \cap B) \cap T = 0$. Từ đó suy ra $(A \cap B) \oplus T \leq^{\oplus} M$. Khi đó,

$$\begin{aligned} A + B &= [(A \cap B) \oplus (A \cap K)] + [(A \cap B) \oplus (B \cap K)] \\ &= (A \cap B) \oplus (A \cap K) \oplus (B \cap K) = (A \cap B) \oplus T \leq^{\oplus} M. \end{aligned}$$

(3) $\Rightarrow$ (1) Dễ thấy. $\square$

Mệnh đề 3.2. Nếu M là một C3-môđun, $M = A_1 \oplus A_2$ với các môđun con A_1, A_2 và $f : A_1 \rightarrow A_2$ là một R -đồng cấu với $\text{Ker} f \leq^{\oplus} A_1$, thì $\text{Im} f \leq^{\oplus} A_2$.

Chứng minh.

Trước tiên, ta chứng minh rằng nếu $f : A_1 \rightarrow A_2$ là một R -đồng cấu, thì $\text{Im} f \leq^{\oplus} A_2$.

Giả sử $T = \{a + f(a) : a \in A_1\}$ là môđun con của M . Ta chứng minh $M = T \oplus A_2$.

Thật vậy, $x \in M$ thì $x = a + b$ với $a \in A_1$ và $b \in A_2$. Khi đó $x = a + f(a) - f(a) + b \in T + A_2$ và do đó $M = T + A_2$. Nếu $x \in T \cap A_2$ thì $x = a + f(a)$ với $a \in A_1$, tương đương, $a = x - f(a) \in A_1 \cap A_2 = 0$. Rõ ràng, $x = 0$, $M = T \oplus A_2$ và $T \leq^\oplus M$.

Tiếp theo, ta chứng minh $A_1 \cap T = 0$. Nếu $x \in A_1 \cap T$ thì $x = a + f(a)$ với $a \in A_1$ và tương đương, $x - a = f(a) \in A_1 \cap A_2 = 0$. Vì f là một đơn cấu nên $a = 0$ và do đó $x = 0$. Vì M là một C3-môđun nên $A_1 \oplus T \leq^\oplus M$.

Cuối cùng, ta chứng minh $A_1 \oplus T = A_1 \oplus \text{Im } f$.

Nếu $x \in \text{Im } f$ thì $x = f(a)$, $a \in A_1$ nên $x = -a + a + f(a) \in A_1 + T$. Do đó, $A_1 \oplus T = A_1 \oplus \text{Im } f$. Vì $A_1 \oplus T \leq^\oplus M$ nên $\text{Im } f \leq^\oplus M$ và do đó $\text{Im } f \leq^\oplus A_2$. Khi đó, giả sử $f : A_1 \rightarrow A_2$ là R -đồng cấu với $\text{Ker } f \leq^\oplus A_1$. Nếu $A_1 = \text{Ker } f \oplus B$ với $B \leq A_1$ thì $M = A_1 \oplus A_2 = \text{Ker } f \oplus B \oplus A_2$, và ánh xạ hạn chế $f|_B : B \rightarrow A_2$ là một đơn cấu. Vì hạng tử trực tiếp của một C3-môđun cũng là một C3-môđun, nên $B \oplus A_2$ là một C3-môđun. Do đó, áp dụng chứng minh trên, suy ra $\text{Im } f = \text{Im } f|_B \leq^\oplus A_2$. $\square$

Hệ quả 3.3. Nếu M là một C3-môđun, $M = A_1 \oplus A_2$ với các môđun con A_1, A_2 và $f : A_1 \rightarrow A_2$ là một R -đơn cấu, thì $\text{Im } f \leq^\oplus A_2$.

Ví dụ sau chứng tỏ tổng trực tiếp của hai C3-môđun không nhất thiết là một C3-môđun.

Ví dụ 3.4. Vì $\mathbb{Z}$ -đơn cấu $0 \rightarrow 2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ không chẻ ra, nên $\mathbb{Z}$ -môđun $M = \mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z}$ không là một C3-môđun, trong khi $\mathbb{Z}$ và $2\mathbb{Z}$ là một C3-môđun.

Hệ quả 3.5. Nếu $M \oplus M$ là một C3-môđun, thì M là một C2-môđun.

Chứng minh.

Giả sử $M_1 \leq^\oplus M$, $M_1 \cong M_2$ ta cần chứng minh $M_2 \leq^\oplus M$. Đặt $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ là một đẳng cấu và giả sử $M = M_1 \oplus K$ với $K \leq M$. Khi đó $M \oplus M = (M_1 \oplus 0) \oplus (K \oplus M)$. Ta xét đồng cấu sau đây

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} : M_1 \oplus 0 &\rightarrow K \oplus M \\ (m_1, 0) &\mapsto (0, \varphi(m_1)) \end{aligned}$$

Ta có $\text{Ker}(\bar{\varphi}) = \{(m_1, 0) \mid \varphi(m_1) = 0, m_1 \in M_1\} = \{(0, 0)\}$. Do đó $\bar{\varphi}$ là một đơn cấu. Vì

$M \oplus M$ là một C3-môđun nên theo Hệ quả 3.3, ta có $\text{Im } \bar{\varphi} \leq^{\oplus} K \oplus M$ hay $0 \oplus M_2 \leq^{\oplus} K \oplus M$. Giả sử $K \oplus M = (0 \oplus M_2) \oplus H$ với $H \leq K \oplus M$. Khi đó:

$$\begin{aligned} 0 \oplus M &= (0 \oplus M) \cap (K \oplus M) \\ &= (0 \oplus M) \cap [(0 \oplus M_2) \oplus H] \\ &= (0 \oplus M_2) \oplus [(0 \oplus M) \cap H]. \end{aligned}$$

Đặt $L = \{m \in M \mid (0, m) \in H\}$. Khi đó $L \in M$. Hơn nữa, vì

$$(0 \oplus M) \cap H = \{(0, m) \mid (0, m) \in H\} \text{ nên } (0 \oplus M) \cap H = 0 \oplus L.$$

Do đó $0 \oplus M = (0 \oplus M_2) \oplus (0 \oplus L)$ hay $0 \oplus M_2 \leq^{\oplus} 0 \oplus M$. Vậy $M_2 \leq^{\oplus} M$. $\square$

Hệ quả 3.6. Nếu M là một R -môđun phải, thì mọi tổng trực tiếp hữu hạn (đếm được, bất kỳ) các bản sao của M là một C3-môđun nếu và chỉ nếu mọi tổng trực tiếp hữu hạn (đếm được, bất kỳ) các bản sao của M là một C2-môđun $\square$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [AIY] I. Amin, Y. Ibrahim, M. Yousif, *C3-Modules*, Algebra Colloquium **22**:4 (2015) 655-670, DOI: 10.1142/S1005386715000553.
- [AF] F. W. Anderson and K. R. Fuller (1992), *Rings and categories of modules*, Second Edition, Graduate Text in Math., Vol. **13**, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York.
- [Faith] C. Faith, *Algebra II: Ring theory*, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1976.
- [Jonah] D. Jonah, *Rings with minimum condition for principal left ideals have the maximum condition for right ideals*, Math. Z. **113** (1970), 106-112.
- [Kasch] F. Kasch (1982), *Modules and rings*, London Math. Soc. Mono. No. **17**. New York: Academic Press.
- [MM] S. H. Mohamed, B. J. Muller (1990), *Continuous and Discrete modules*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [NY] W. K. Nicholson and M. F. Yousif (2003), *Quasi-Frobenius rings*, Cambridge Univ. Press.

(Ngày nhận bài: 21/09/2019; ngày phản biện: 27/09/2019; ngày nhận đăng: 02/10/2019)