ĐỘ DÀI ĐẠI SỐ LOBACHEVSKY TRONG HÌNH HỌC VỚI MÔ HÌNH NỬA MẶT PHẲNG POINCARÉ, MỘT SỐ ÁP DỤNG

Lê Hào*
Trường Đại học Phú Yên

Tóm tắt

Trong bài báo này chúng tôi trình bày khái niệm về trục và độ dài đại số Lobachevsky của cung đoạn định hướng, sau đó tìm mối quan hệ giữa các đoạn thẳng Lobachevsky tạo nên khi cho các trục chắn lên hai đường thẳng Lobachevsky cố định. Kết quả mà chúng tôi thu được là ***Định lý 2.1****,* ***Định lý 2.2*** và ***Hệ quả 2.3.***

Từ khóa: *Độ dài đại số Lobachevsky, cung đoạn định hướng, mô hình nửa mặt phẳng Poincaré, đoạn thẳng Lobachevsky, đường thẳng Lobachevsky.*

Abstract

Lobachevskian algebraic distance in geometry with the Poincaré half-plane model and some applications

In this paper we present the concept of axis and Lobachevskian algebraic distance of the directional segmental-arcs, and then find the relationship between the Lobachevskian line segments created by intercepting the axes on two fixed Lobachevskian lines. The results we obtained are ***Theorem 2.1****,* ***Theorem 2.2*** *and* ***Corollary 2.3.***

Keywords: *Lobachevskian algebraic distance, directional segmental-arc, Poincaré half-plane model, Lobachevskian line segment, Lobachevskian line.*

1.Giới thiệu

Trong mặt phẳng E^2 ta xét hệ tọa độ trực chuẩn *Oxy* và gọi nửa trên của *Ox* ứng với tập hợp:

$$H^2 = \{(x,y) \in R^2 / y > 0\} = \{z \in C / \operatorname{Im} z > 0\}$$

là nửa mặt phẳng Pointcaré.

Từ nửa mặt phẳng Pointcaré người ta xây dựng mô hình của hình học Lobachevsky (xem [5]).

Mỗi điểm thuộc H^2 gọi là điểm Lobachevsky.

Nửa đường thẳng mở nằm trong H^2 trực giao với *Ox* tại điểm thuộc *Ox,* hay nửa đường tròn mở nằm trong H^2 có tâm thuộc *Ox,* được gọi là đường thẳng Lobachevsky (*còn gọi là đường thẳng Lob*), mỗi cung đoạn của nó là một đoạn thẳng Lobachevsky (*còn gọi là đoạn thẳng Lob*) (xem [4]).

Mỗi đường thẳng Lob bổ sung các điểm mút thuộc *Ox* thì gọi là đường trắc địa ứng với đường thẳng Lob đó.

* Email*: lehaodhpy@gmail.com*

Định nghĩa 1.1. *Xét đoạn thẳng Lob nối hai điểm A, B ứng với cung có phương trình tham số* $\gamma(s)=(x(s),y(s))$ *với* $\gamma(s_1)=A$, $\gamma(s_2)=B$ $(s_1<s_2)$. *Khi đó độ dài Lobachevsky của đoạn thẳng Lob đó là:*

$$\rho(AB)=\int_{s_1}^{s_2}\sqrt{\frac{(x'(s))^2+(y'(s))^2}{(y(s))^2}}ds\ .$$

Định lý 1.2.(xem [3]) *Với đoạn thẳng Lob nối hai điểm* A,B *nằm trên một đường trắc địa.*
a) Nếu đường trắc địa đó là nửa đường tròn với hai mút $R,S\in Ox$ *thì:*

$$\rho(AB)=\left|\ln\left(\frac{A-R}{B-R}\right):\left(\frac{A-S}{B-S}\right)\right|\ .$$

b) Nếu đường trắc địa đó là nửa đường thẳng với mút $R\in Ox$ *thì:*

$$\rho(AB)=\left|\ln\left(\frac{A-R}{B-R}\right)\right|\ .$$

Ta kí hiệu như sau:

$$ch(AB)=\frac{e^{\rho(AB)}+e^{-\rho(AB)}}{2},\quad sh(AB)=\frac{e^{\rho(AB)}-e^{-\rho(AB)}}{2}\ .$$

Rất nhiều nghiên cứu đã phát hiện ra nhiều hệ thức thú vị liên quan đến độ dài Lob của các cạnh và góc trong tam giác Lobachevsky (xem [1]).

Trong hình học Euclide phẳng chúng ta đều biết đến **Định lý Thales**, vậy trong hình học Lobachebsky phẳng trên nửa mặt phẳng Pointcaré chúng ta có kết quả gì tương tự ? Bắt nguồn từ ý tưởng đó chúng tôi đưa ra khái niệm về trục và độ dài đại số Lobachevsky của cung đoạn định hướng, sau đó tìm mối quan hệ giữa các đoạn thẳng Lob tạo nên khi cho các trục chắn lên hai đường thẳng Lob cố định.

Kết quả mà chúng tôi thu được là **Định lý 2.1**, **Định lý 2.2** và **Hệ quả 2.3.**

2. Một số kết quả

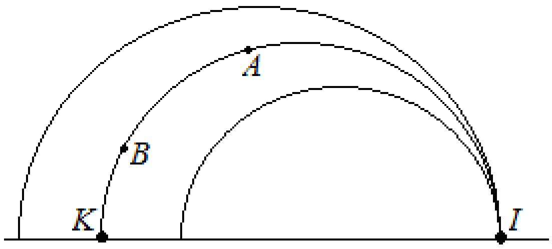
- Xét đường trắc địa là nửa đường tròn với hai mút *I, K* (thuộc *Ox*). Ta qui ước gọi *I* là mút âm vô tân, *K* là mút dương vô tận. Chiều chuyển động dọc trên đường trắc địa đó, chạy về mút dương vô tận *K* gọi là chiều dương, chiều chuyển động ngược lại chạy về mút âm vô tận *I* gọi là chiều âm. Đường trắc địa ấy cùng với chiều chuyển động như trên gọi là trục cong Lobachevky (gọi đơn giản là trục).

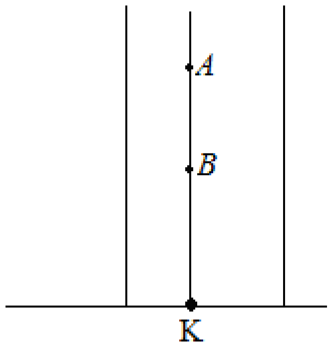
Trong lớp các trục cong có chung mút âm vô tận *I* cố định cho trước, với một cung đoạn định hướng bất kì nối từ *A* đến *B* $(A,B\in H^2)$ và nằm trên một trục, thì độ dài đại số

Lobachevsky của nó là một số được kí hiệu $L(\overline{AB})$, xác định như sau:

$$L(\overline{AB}) = \ln\left(\frac{A-K}{B-K} : \frac{A-I}{B-I}\right) \qquad (*)$$

Với *K* là mút còn lại của trục.
Hàm L này gọi là hàm độ dài đại số Lobachevsky ứng với lớp các trục cong nói trên.





- Nếu đường trắc địa là nửa đường thẳng vuông góc với *Ox* tại *K*. Ta qui ước gọi *K* là mút dương vô tận. Chiều chuyển động dọc trên đường trắc địa đó, chạy về mút dương vô tận *K* gọi là chiều dương, chiều chuyển động ngược lại gọi là chiều âm. Đường trắc địa ấy cùng với chiều chuyển động như trên cũng gọi là trục thẳng Lobachevky (gọi đơn giản là trục).

Trong lớp các trục thẳng cùng vuông góc với *Ox*, với một đoạn định hướng bất kì nối từ *A* đến *B* $(A, B \in H^2)$ và nằm trên một trục, thì độ dài đại số Lobachevsky của nó là một số xác định như sau:

$$L(\overline{AB}) = \ln\left(\frac{A-K}{B-K}\right).$$

Với *K* là mút của trục.

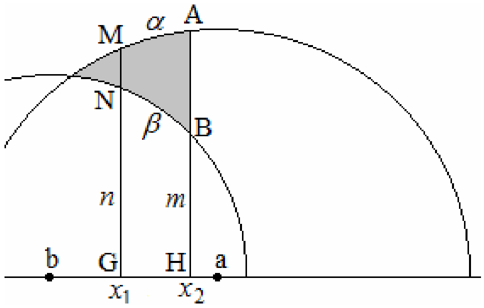
Hàm L này gọi là hàm độ dài đại số Lobachevsky ứng với lớp các trục thẳng nói trên.

Ta dễ dàng thấy với các điểm bất kì *A, B, C* cùng thuộc một trục Lobachevsky thì:

$$L(\overline{AB}) = -L(\overline{BA}), \quad L(\overline{AB}) + L(\overline{BC}) = L(\overline{AC}).$$

Định lý 2.1. *Cho hai đường thẳng Lob* $(\alpha), (\beta)$ *cố định. Một cặp hai trục thẳng* $(m), (n)$ *phân biệt; thay đổi và vuông góc với trục Ox. (m) cắt* $(\alpha), (\beta)$ *lần lượt tại A và B; (n) cắt* $(\alpha), (\beta)$ *lần lượt tại M và N. Khi đó:*

$\frac{sh(MA)}{sh(NB)}e^{L(\overline{AB})+L(\overline{MN})}$ *là một hằng số không phụ thuộc hai trục (m), (n).*



Chứng minh. Gọi $H(x_2;0), G(x_1;0)$ tương ứng là mút của hai trục (*m*), (*n*). Không mất tính tổng quát ta xem $x_1 < x_2$.

$(\alpha), (\beta)$ tương ứng là hai đường tròn mở có bán kính R_1, R_2.

$$A(a+R_1\cos t_1; R_1\sin t_1), B(b+R_2\cos t_2; R_2\sin t_2).$$
$$M(a+R_1\cos t_3; R_1\sin t_3), N(b+R_2\cos t_4; R_2\sin t_4)\quad (t_1<t_3,\ t_2<t_4).$$

$$a+R_1\cos t_1 = b+R_2\cos t_2 = x_2 \Rightarrow \tan\frac{t_1}{2}=\sqrt{\frac{R_1+a-x_2}{R_1+x_2-a}},\quad \tan\frac{t_2}{2}=\sqrt{\frac{R_2+b-x_2}{R_2+x_2-b}}$$

$$a+R_1\cos t_3 = b+R_2\cos t_4 = x_1 \Rightarrow \tan\frac{t_3}{2}=\sqrt{\frac{R_1+a-x_1}{R_1+x_1-a}},\quad \tan\frac{t_4}{2}=\sqrt{\frac{R_2+b-x_1}{R_2+x_1-b}}$$

$$e^{\rho(MA)}=\frac{\tan\frac{t_3}{2}}{\tan\frac{t_1}{2}} \Rightarrow sh(MA)=\frac{R_1(x_2-x_1)}{\sqrt{\left(R_1^2-(a-x_1)^2\right)\left(R_1^2-(a-x_2)^2\right)}}=\frac{R_1GH}{AH.MG}\qquad (1)$$

$$e^{\rho(NB)}=\frac{\tan\frac{t_4}{2}}{\tan\frac{t_2}{2}} \Rightarrow sh(NB)=\frac{R_2(x_2-x_1)}{\sqrt{\left(R_2^2-(b-x_1)^2\right)\left(R_2^2-(b-x_2)^2\right)}}=\frac{R_2GH}{BH.NG}\qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

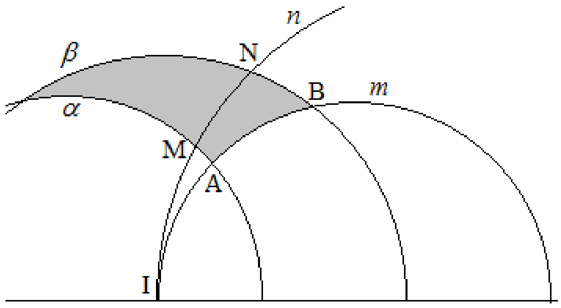
$$\frac{sh(NB)}{sh(MA)}=\frac{R_2}{R_1}.\frac{AH}{BH}.\frac{MG}{NG}=\frac{R_2}{R_1}e^{L(\overline{AB})+L(\overline{MN})} \Rightarrow \frac{sh(MA)}{sh(NB)}e^{L(\overline{AB})+L(\overline{MN})}=\frac{R_1}{R_2}=const\ \square$$

Định lý 2.2. *Cho hai đường thẳng Lob* $(\alpha),(\beta)$ *cố định và I là điểm cố định trên Ox. Một cặp hai trục cong* $(m),(n)$ *phân biệt; thay đổi nhưng luôn có chung mút âm vô tận I. (m) cắt* $(\alpha),(\beta)$ *lần lượt tại A và B; (n) cắt* $(\alpha),(\beta)$ *lần lượt tại M và N. Khi đó:*

$\dfrac{sh(MA)}{sh(NB)}e^{L(\overline{AB})+L(\overline{MN})}$ *là một hằng số không phụ thuộc hai trục (m), (n).*

Chứng minh. Dùng một phép nghịch đảo tâm I biến các trục cong (m), (n) thành hai trục thẳng vuông góc với *Ox***.**

Phép nghịch đảo với tâm là mút âm vô tận I không làm thay đổi độ dài đại số Lobachevsky trên các trục (m), (n). Phép nghịch đảo ấy cũng không làm thay độ dài Lobachevsky của các đoạn thẳng Lob.



Áp dụng **Định lý 2.1** thì có điều phải chứng minh. □

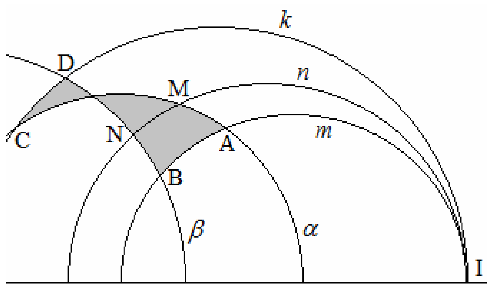
Hệ quả 2.3. *Cho hai đường thẳng Lob* (α) *và* (β). *Ba trục phân biệt (m), (n), (k) là ba trục cong cùng có chung một mút âm vô tận, hoặc là ba trục thẳng cùng vuông góc với Ox. (m) cắt* $(\alpha),(\beta)$ *lần lượt tại A và B; (n) cắt* $(\alpha),(\beta)$ *lần lượt tại M và N; (k) cắt* $(\alpha),(\beta)$ *lần lượt tại C và D . Khi đó:*

$$\frac{sh(MA)}{sh(NB)}e^{L(\overline{AB})}=\frac{sh(MC)}{sh(ND)}e^{L(\overline{CD})}.$$

Chứng minh. Từ **Định lý 2.2** ta có:

$$\frac{sh(MA)}{sh(NB)}e^{L(\overline{AB})+L(\overline{MN})}=\frac{sh(MC)}{sh(ND)}e^{L(\overline{CD})+L(\overline{MN})}$$

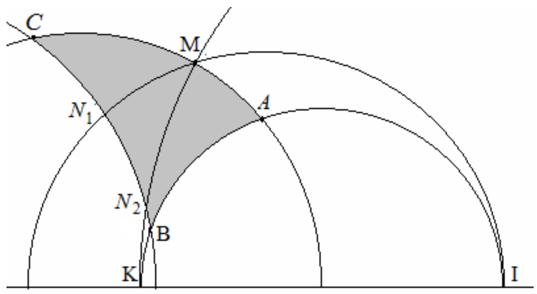
Suy ra điều phải chứng minh. □



Ví dụ. Cho tam giác Lobachevsky với các đỉnh $A(5;3), B(4;4)$ và *C*. Gọi *M* là điểm trên đường thẳng Lob (*CA*).

Đường trắc địa qua *A*, *B* có hai mút $I(6;0)$ và *K* thuộc *Ox*.

Đường trắc địa qua *I*, *M* cắt đường thẳng Lob (*CB*) tại N_1; đường trắc địa qua *K*, *M* cắt đường thẳng Lob (*CB*) tại N_2.



Ta sẽ so sánh $\dfrac{sh(N_1C)}{sh(N_1B)}$ và $\dfrac{sh(N_2C)}{sh(N_2B)}$.

Xét lớp các trục cong có chung mút âm vô tân *I*, hàm độ dài đại số Lobachevsky trên lớp trục này kí hiệu là L_1, theo **hệ quả 2.3** ta có:

$$\frac{sh(MA)}{sh(N_1B)}e^{L_1(\overline{AB})}=\frac{sh(MC)}{sh(N_1C)}.$$

Xét lớp các trục cong có chung mút âm vô tân *K*, hàm độ dài đại số Lobachevsky trên lớp trục này kí hiệu là L_2, theo **hệ quả 2.3** ta có:

$$\frac{sh(MA)}{sh(N_2B)}e^{L_2(\overline{AB})}=\frac{sh(MC)}{sh(N_2C)}.$$

Để ý từ công thức (*) suy ra $L_1(\overline{AB})=-L_2(\overline{AB})$ do đó:

$$\frac{sh(N_1C)}{sh(N_1B)}e^{2L_1(\overline{AB})}=\frac{sh(N_2C)}{sh(N_2B)}.$$

$$L_1(\overline{AB})=\ln\left(\frac{A-K}{B-K}:\frac{A-I}{B-I}\right)=\ln\left[\left(\frac{9+3i}{8+4i}\right):\left(\frac{-1+3i}{-2+4i}\right)\right]=\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{sh(N_2C)}{sh(N_2B)}=\frac{sh(N_1C)}{sh(N_1B)}e^{2\ln\frac{3}{2}}=\frac{9}{4}\frac{sh(N_1C)}{sh(N_1B)}.$$

3. Kết luận

Định lý 2.1, Định lý 2.2 và **Hệ quả 2.3** đã thể hiện mối quan hệ giữa các đoạn thẳng Lob tạo nên khi cho các truc chắn lên hai đường thẳng Lob.

Kết quả thu được có thể áp dụng để khảo sát điều kiện thẳng hàng của các điểm, tính đồng quy của các đường thẳng Lob liên quan đến tam giác Lobachevsky.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Thị Liên (2011), *Hình học trên nửa mặt phẳng Poincaré*, Luận văn Thạc sĩ - Đại học Vinh,12-38.

[2] Nguyễn Bá Khiến (2011), *Một số vấn đề của hình học Hyperbolic n chiều*, Luận văn Thạc sĩ - Đại học Vinh, 15-34.

[3] Nguyễn Thị Xuyên (2008), *Một số vấn đề về hình học phi Euclide*, Đại học An Giang, 35-44.

[4] Phan Thị Ngọc (2007), *Nửa phẳng Poincaré và hình học Hyperbolic*, Luận văn Thạc sĩ - Đại học Vinh, 25-45.

[5] Nguyễn Mộng Hy (1999), *Xây dựng hình học bằng phương pháp tiên đề*, Nhà xuất bản Giáo dục, 95-134.

[6] C.Royster (2002), *Non Euclidean geometry*, Course Spring, 34-90.

[7] Henry Parker Manning (1989), *Non Euclidean geometry*, Boston USA, 20-74.

.

(*Ngày nhận bài: 16/07/2018; ngày phản biện:27/08/2018; ngày nhận đăng: 01/10/2018*)