

MỘT SỐ KẾT QUẢ VỀ VÀNH ARTIN CHUỖI

Lê Đức Thoang*

Tóm tắt

Trong bài này, chúng tôi chứng minh rằng mọi môđun 1-chuỗi phải trên vành hoàn chỉnh phải đều là môđun cyclic và note; mọi môđun 1-chuỗi phải trên vành hoàn chỉnh trái đều là môđun cyclic và artin. Từ đó chúng tôi cũng thu được một số kết quả trong [GK], [Oshiro] và [KSX].

Từ khóa: vành artin, vành chuỗi.

Abstract

Some results on artinian serial rings

In this article, we show that each 1-uniserial right module over right perfect ring is a cyclic and noetherian module; each 1-uniserial right module over left perfect ring is a cyclic and artinian module. From there we also obtained some results in [GK], [Oshiro] and [KSX].

Key words: artinian rings, serial rings

1. Giới thiệu

Trong bài viết này, chúng tôi luôn giả thiết vành R đã cho là vành kết hợp có đơn vị $1 \neq 0$ và mọi R -môđun được xét là môđun unita. Với vành R , ta kí hiệu $\text{Rad}(R)$ (hoặc J) để chỉ căn Jacobson và M_R (${}_R M$) để chỉ M là một R -môđun phải (trái, tương ứng). Trong một ngữ cảnh cụ thể, khi không sợ nhầm lẫn về phía của môđun, để đơn giản ta viết môđun M thay vì M_R . Kí hiệu $N \leq M$ để chỉ N là môđun con của M . Tổng trực tiếp của hai môđun A và B được kí hiệu là $A \oplus B$.

Một môđun M_R được gọi là artin nếu mọi tập khác rỗng các môđun con của nó đều có phần tử tối tiểu, môđun M_R được gọi là note nếu mọi tập khác rỗng các môđun con của nó đều có phần tử tối đại. Một vành R được gọi là artin (note, tương ứng) phải nếu môđun R_R là một môđun artin (note, tương ứng). Định nghĩa tương tự cho vành artin (note) trái. Khi R đồng thời là vành artin phải và artin trái, ta gọi R là vành artin. Một môđun M_R được gọi là 1-chuỗi nếu tập các môđun con của nó được sắp thẳng theo quan hệ bao hàm. Vành R được gọi là vành chuỗi phải nếu R có phân tích

$$R_R = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_n,$$

trong đó các U_k , $k=1, \dots, n$ là các môđun 1-chuỗi. Định nghĩa tương tự cho vành chuỗi trái. Khi R là đồng thời là vành chuỗi phải và chuỗi trái, ta gọi R là vành chuỗi. Lớp vành artin chuỗi (đồng thời là vành artin và vành chuỗi) có nhiều tính chất mang lại những kết quả phong phú cho chuyên ngành hẹp Lý thuyết vành nói riêng và chuyên ngành Đại số và lý thuyết số nói chung. Những khái niệm và kết quả liên quan không đề cập trong bài viết này, chúng ta có thể tìm thấy trong các tài liệu [AF], [Kasch] và [MNK].

* TS, Trường Đại học Phú Yên

Ví dụ 1.1. Cho K là một trường, R là vành ma trận tam giác trên cấp 2, có các phần tử thuộc trường K ,

$$R = \begin{bmatrix} K & K \\ 0 & K \end{bmatrix}.$$

Khi đó, R là vành artin chuỗi với $J(R)^2 = 0$.

Ví dụ 1.2. Cho R là vành ma trận tam giác trên cấp 2, có các phần tử thuộc trường các số thực và trường các số phức,

$$R = \begin{bmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{C} \\ 0 & \mathbb{C} \end{bmatrix}.$$

Khi đó, R là vành artin phải và trái. Ta có $R_R = \begin{bmatrix} \mathbb{R} & \mathbb{C} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{C} \end{bmatrix}$, suy ra R là vành chuỗi

phải. Ngoài ra, ${}_R R = \begin{bmatrix} \mathbb{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{C} \\ 0 & \mathbb{C} \end{bmatrix}$ và ta có $\begin{bmatrix} 0 & \mathbb{C} \\ 0 & \mathbb{C} \end{bmatrix}$ không là môđun 1-chuỗi trái.

Vậy R không là vành chuỗi trái.

2. Kết quả

Trước hết, chúng ta nhắc lại các đặc trưng của môđun artin và môđun note.

Mệnh đề 2.1 (Kacsh, Theorem 6.1.2 II). Cho môđun M_R và $A \leq M$. Các điều kiện sau là tương đương:

- a) Môđun M_R là note;
- b) A và M/A là các môđun note;
- c) Mọi dãy tăng $A_1 \leq A_2 \leq \dots \leq A_n \leq \dots$ các môđun con của M đều dừng;
- d) Mỗi môđun con của M_R là hữu hạn sinh;
- e) Đối với mỗi tập hợp $\{A_i \mid i \in I\} \neq \emptyset$ những môđun con của M , tồn tại tập hữu hạn

$$I_0 \subset I \text{ sao cho } \sum_I A_i = \sum_{I_0} A_i.$$

Mệnh đề 2.2 (Kacsh, Theorem 6.1.2 I). Cho môđun M_R và $A \leq M$. Các điều kiện sau là tương đương:

- a) Môđun M_R là artin;
- b) A và M/A là các môđun artin;
- c) Mọi dãy giảm $A_1 \geq A_2 \geq \dots \geq A_n \geq \dots$ các môđun con của M đều dừng;
- d) Mỗi môđun con của M_R là hữu hạn đối sinh;
- e) Đối với mỗi tập hợp $\{A_i \mid i \in I\} \neq \emptyset$ những môđun con của M , tồn tại tập hữu hạn

$$I_0 \subset I \text{ sao cho } \bigcap_I A_i = \bigcap_{I_0} A_i.$$

Một mở rộng đẹp của lớp vành artin phải kể đến đó là lớp vành hoàn chỉnh. Sau đây là một số đặc trưng của vành hoàn chỉnh trái.

Mệnh đề 2.3 (AF, Theorem 28.4). *Cho vành R với $J = J(R)$. Khi đó các phát biểu sau là tương đương:*

- R là vành hoàn chỉnh trái;
- R/J là nửa đơn và J là T -lũy linh trái;
- R/J là nửa đơn và mọi R -môđun trái khác không đều chứa một môđun con cực đại;
- Mọi R -môđun trái dẹt đều xạ ảnh;
- R thỏa mãn DCC trên các iđêan phải chính;
- R không chứa tập vô hạn các lũy đẳng trực giao và mọi R -môđun phải khác không đều chứa một môđun con cực tiểu.

Mệnh đề 2.4 (Jonah, Main theorem). *Một vành R là hoàn chỉnh trái nếu và chỉ nếu nó thỏa mãn ACC trên các môđun trái cyclic.*

Định lý 2.5. *Cho R là một vành.*

- Nếu R là hoàn chỉnh phải, thì mọi R -môđun phải 1-chuỗi là cyclic và note;
- Nếu R là hoàn chỉnh trái, thì mọi R -môđun phải 1-chuỗi là cyclic và artin.

Chứng minh.

a) Cho M là một môđun 1-chuỗi bất kỳ. Để chứng minh M là môđun note, ta chỉ cần chứng minh mọi môđun con của M là hữu hạn sinh. Thật vậy, xét U là một môđun con bất kỳ của M . Ta xét dãy tăng các môđun con cyclic của U : $V_1 \leq V_2 \leq \dots \leq V_n \leq \dots$. Theo Mệnh đề 2.4, ta có $n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $V_{n+k} = V_n$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Từ đây suy ra rằng tập các môđun con cyclic của U có phần tử tối đại, ta gọi phần tử tối đại đó là U^* . Ta khẳng định rằng $U^* = U$. Thật vậy, nếu $U^* \neq U$ thì tồn tại phần tử $x \in U \setminus U^*$ thỏa mãn $U^* \leq xR \neq U$. Điều này mâu thuẫn với tính cực đại của U^* . Từ đây ta suy ra M là môđun cyclic và note.

b) Cho M là một môđun 1-chuỗi bất kỳ và $V_1 \geq V_2 \geq \dots \geq V_n \geq \dots$ là dãy tăng các môđun con của M . Đặt $B = \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i$. Áp dụng Mệnh đề 2.3 ta có mọi R -môđun phải trên vành

hoàn chỉnh trái đều chứa một môđun con cực tiểu. Vì $B \neq M$ nên có môđun con $B^* \leq M$ thỏa mãn $B \leq B^*$ và B^*/B là đơn. Hơn nữa, vì M là môđun 1-chuỗi và B^* không thể chứa trong V_i với mọi $i \in \mathbb{N}$. Vậy tồn tại $k \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $V_k = B^*$ và như vậy $B = V_{k+1}$. Điều này có nghĩa là M thỏa mãn DCC trên các môđun con của nó. Vậy M là môđun artin. $\square$

Hệ quả 2.6 (KSX, Proposition 2.8). *Cho R là vành chuỗi trái. Nếu R là vành hoàn chỉnh phải hoặc là vành hoàn chỉnh trái, thì R là vành artin trái.*

Chứng minh.

Giả thiết R là vành chuỗi trái nên

$${}_R R = U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_n,$$

trong đó các môđun trái $U_i, i = 1, \dots, n$ là các môđun chuỗi.

Giả sử R là vành hoàn chỉnh phải. Áp dụng Định lý 2.5 b), ta có mọi $U_i, i = 1, \dots, n$ là các môđun cyclic và artin. Từ đó suy ra R là vành artin trái.

Giả sử R là vành hoàn chỉnh trái. Áp dụng Định lý 2.5 a), ta có mọi $U_i, i = 1, \dots, n$ là các môđun note. Vì vậy R là vành note trái, kết hợp với R là vành hoàn chỉnh trái ta suy ra R là vành artin trái. $\square$

Hệ quả 2.7 (GK, Theorem 5.11). *Một vành chuỗi hoàn chỉnh phải là vành artin (phải và trái).*

Chứng minh.

Vì R là vành chuỗi phải hoàn chỉnh phải nên áp dụng Hệ quả 2.6 ta được R là vành artin trái. Hơn nữa, vì R cũng là vành chuỗi trái nên áp dụng Hệ quả 2.6 lần nữa ta được R là vành artin phải. Vậy R là vành artin. $\square$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [AF] F. W. Anderson and K. R. Fuller (1992), *Rings and categories of modules*, Second Edition, Graduate Text in Math., Vol. 13, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York.
- [Er] N. Er, *Artinian Rings Characterized by Direct Sum of CS Modules*, Com. in Alge. Vol 32, No. 12, 4821-4833 (2004).
- [FH] C. Faith and Đ. V. Huynh, *When seft-injective rings are QF: A report on problem*, J. Algebra and Its Appl. 1, (2002) 75-105.
- [Faith] C. Faith, *Algebra II: Ring theory*, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1976.
- [GK] N. M. Gubareni and V. V. Kirichenko, *Semiperfect rings with T-nilpotent prime radical in "Groups, Rings and Group rings"*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 247 (2006), 271-231.
- [Jonah] D. Jonah, *Rings with minimum condition for principal left ideals have the maximum condition for right ideals*, Math. Z. 113 (1970), 106-112.
- [Kasch] F. Kasch (1982), *Modules and rings*, London Math. Soc. Mono. No. 17. New York: Academic Press.
- [KSX] D. Keskin, P. F. Smith and W. Xue, *Rings whose modules are $\oplus$ -supplemented*, J. Algebra 218 (1999), 470-487.
- [MNK] M. Hazewinkel, N. Gubareni and V. V. Kirichenko, *Algebra, Rings and Modules*, Vol 1, Kluber Academic Publishers, 2004.
- [Oshiro] K. Oshiro, *On Harada rings I*, Math. J. Okayama Univ. 31 (1989), 161-178.
- [Tachikawa] H. Tachikawa, *On left QF3 rings*, Pacific. J. of Math. Vol. 32, No. 1 (1970), 255-268.
- [Thoang] L. D. Thoang, *A characterizations of co-Harada ring*, Asian-European J. of Math. 6, No. 2 (2013), 1350017 (7 pages).
- [VP] N. Vanaja and V. N. Purav, *A note on generalised uniserial ring*, Comm. in Alge. 21 4, (1993), 1153-1159.