VỀ MỘT LỚP ĐƯỜNG CONG ĐƠN THỨC GIAO HOÀN TOÀN TRONG A^4

Lê Hào*

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi đề cập đến một lớp đường cong đơn thức trong không gian A^4 là giao hoàn toàn , khác với lớp đường cong đơn thức mà mà H. Bresinsky đã nêu ra vào năm 1979. Kết quả chính của bài báo là ***định lý 2.1.***

Từ khóa: *Đường cong đơn thức, giao hoàn toàn.*

Abstract

About a class of monomial curves that are set-theoretic complete intersections in A^4

In this paper we refer to a class of monomial curves in A^4 are set-theoretic complete intersections, unlike the monomial curves that was mentioned by H. Bresinsky in 1979. The main result of the article is theorem 2.1.

Keywords: *monomial curve, set-theoretic complete intersection.*

1. Giới thiệu

Giả sử *K* là trường có đặc số 0 và $m_1, m_2, \ldots, m_n$ là các số nguyên dương phân biệt có ước số chung lớn nhất $d = (m_1, m_2, \ldots, m_n) = 1$. Đường cong đơn thức (*monomial curve*) C(m_1,m_2,..,m_n) trong không *affine* A^n trên trường *K* là đường cong tham số có phương trình:

$$\begin{cases} x_1 = t^{m_1} \\ x_2 = t^{m_2} \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n = t^{m_n} \end{cases} \qquad (t \in K)$$

D.Eisenbud và *E.G.Evans* đã chứng minh được: *mọi đường cong đơn thức (C) trong không gian A^n luôn là giao của n mặt, tức là tồn tại n đa thức $g_1, g_2, \ldots, g_n \in K[x_1, x_2, \ldots x_n]$ sao cho $(C) = Z(g_1, g_2, \ldots, g_n)$* (*xem* [1]).

Như vậy số lượng tối thiểu các mặt để giao của chúng bằng (C) là $m = \mu(C) \le n$.

Bài toán đặt ra là tìm những đường cong đơn thức trong A^n là giao của $n-1$ mặt, đồng thời chỉ rõ phương trình của $n-1$ mặt đó.

Định nghĩa 1.1. *Đường cong đơn thức (C) trong A^n gọi là giao hoàn toàn* (*set-theoretic complete intersection*) *nếu (C) là giao của $n-1$ mặt,*

tức là tìm được $n-1$ đa thức $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1} \in K[x_1, x_2, \ldots x_n]$ sao cho

---

* ThS, Trường Đại học Phú Yên

$(C) = Z(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})$.

Trong bài báo trước đây, tôi đã chứng minh được kết quả sau:

Định lý 1.2. *Mọi đường cong đơn thức trong không gian affine A^n $(n \geq 2)$ trên trường số thực đều giao hoàn toàn* (*xem* [6], *Định lý* 3).

Xét trên các không gian A^n trên trường K bất kì với đặc số 0, người ta nghi ngờ rằng mọi đường cong đơn thức trong các không gian ấy đều giao hoàn toàn, nhưng điều đó đến nay vẫn còn là một vấn đề mở. Ngay trong A^4 vấn đề này vẫn chưa có câu trả lời, người ta chỉ nêu ra được vài lớp đường cong đơn thức có tính chất giao hoàn toàn.

H.Bresinsky đã chứng minh: *Mọi đường cong đơn thức trong A^3 đều giao hoàn toàn* (*xem* [2]).

D.Patil đã chứng minh: *Nếu $n \geq 4$ và có $n-1$ số trong n số $m_1, m_2, \ldots, m_n$ tạo thành cấp số cộng thì $C(m_1, m_2, ..., m_n)$ giao hoàn toàn* (*xem* [3]).

Ta kí hiệu $< m_1, m_2, \ldots, m_n > = \left\{ \sum_{i=1}^{n} k_i m_i \,/\, k_i \in N \right\}$ là nửa nhóm sinh bởi $m_1, m_2, \ldots, m_n$

Năm 1979 *H.Bresinsky* đã nêu ra định lý sau:

Định lý 1.3. *Trong không gian A^4 đường cong đơn thức $C(m_1, m_2, m_3, m_4)$ là giao hoàn toàn nếu $\langle m_1, m_2, m_3, m_4 \rangle$ là nửa nhóm đối xứng* (*xem* [4]).

Cần phải mở rộng việc tìm kiếm các lớp đường cong đơn thức giao hoàn toàn trong không gian A^n trên trường K với đặc số 0. Trong bài báo này tôi đã chứng minh được tính giao hoàn toàn của một lớp đường cong đơn thức trong A^4, lớp này không trùng với lớp đường cong đơn thức mà *H.Bresinsky* đã nêu trong định lý 1.3. Kết quả được thể hiện trong **định lý 2.1** dưới đây.

2. Định lý và chứng minh

Định lý 2.1 $(C) = (t^{m_1}, t^{m_2}, t^{m_3}, t^{m_4})$ *là đường cong đơn thức trong A^4 trên trường K có đặc số* 0. *Với $d = (m_1, m_2, m_3)$, nếu $dm_4 \in \langle m_1, m_2, m_3 \rangle$ thì (C) giao hoàn toàn.*

Chứng minh. Xét đường cong đơn thức (C_1) trong A^3 với phương trình:

$$\begin{cases} x_1 = u^{\frac{m_1}{d}} \\ x_2 = u^{\frac{m_2}{d}} \qquad (u \in K) \\ x_3 = u^{\frac{m_3}{d}} \end{cases}$$

(C_1) giao hoàn toàn (*xem* [2]), tức là tồn tại các đa thức $g, h \in K[x_1, x_2, x_3]$ sao cho

$(C_1) = Z(g,h)$.

Do $dm_4 \in \langle m_1, m_2, m_3 \rangle$ nên $dm_4 = r_1 m_1 + r_2 m_2 + r_3 m_3$ $(r_i \in \mathbb{N})$

Suy ra $f = x_4^d - x_1^{r_1} x_2^{r_2} x_3^{r_3} \in I(C)$.

Hơn nữa trong số các đa thức thuộc $I(C)$ có bậc dương theo x_4 với hệ số đầu không thuộc $I(C)$ thì f là đa thức có bậc theo x_4 bé nhất (xem [4]).

Ta chứng minh rằng $(C) = Z(g,h,f)$, thật vậy:

Mỗi điểm $M(x_1, x_2, x_3, x_4) \in (C)$ đều có $x_1 = t^{m_1}, x_2 = t^{m_2}, x_3 = t^{m_3}, x_4 = t^{m_4}$ nên $M \in Z(g,h,f)$.

Ngược lại với mỗi điểm $M(x_1, x_2, x_3, x_4) \in Z(g,h,f)$ thì:

$$(x_1, x_2, x_3) \in Z(g,h) = (\mathrm{C}_1)$$

Suy ra:

$$\begin{cases} x_1 = u^{\frac{m_1}{d}} \\ x_2 = u^{\frac{m_2}{d}} \\ x_3 = u^{\frac{m_3}{d}} \\ x_4^d - x_1^{r_1} x_2^{r_2} x_3^{r_3} = 0 \end{cases}$$

Ta thấy $\forall h \in K[x_1, x_2, x_3] \cap I(C),\ h(M) = 0$.

Bằng thuật toán chia đa thức, ta thấy rằng với mọi đa thức $\varphi \in I(C)$ thì: $\varphi = pf + q$ $p, q \in K[x_1, x_2, x_3, x_4]$ và q là đa thức có tất cả hệ số theo x_4 đều thuôc $K[x_1, x_2, x_3] \cap I(C)$, tức là:

$$q = q_m x_4^m + q_{m-1} x_4^{m-1} + ... + q_1 x_4 + q_0 \text{ với } q_i \in K[x_1, x_2, x_3] \cap I(C)$$

Do $q_i \in K[x_1, x_2, x_3] \cap I(C)$ nên $q_i(M) = f(M) = 0$ $(\forall i = 0,1,...,m)$ do đó $\varphi(M) = 0$.

Vậy với mỗi $M \in Z(g,h,f)$ thì $\varphi(M) = 0$ $(\forall \varphi \in I(C))$, suy ra $M \in Z[I(C)] = (C)$.

Do đó $(C) = Z(g,h,f)$. □

Ví dụ. Xét đường cong đơn thức $(C) = (t^{10}, t^{12}, t^{16}, t^{23})$ trong A^4. Ta thấy $S = \langle 10,12,16,23 \rangle$ không phải là nửa nhóm đối xứng, nhưng $46 \in \langle 10,12,16 \rangle$ nên theo định lý trên (C) giao hoàn toàn, là giao của các mặt sau:

$$g = x_2^8 - 4x_2^5 x_1^2 x_3 + 6x_2^2 x_1^4 x_3^2 - 4x_2 x_1^2 x_3^4 + x_3^6 \text{ , } h = x_1^4 - x_2^2 x_3 \text{ và } f = x_4^2 - x_1^3 x_3$$

3. Kết luận

Định lý 2.1 mà chúng tôi nêu ra đã chỉ rõ một lớp các đường cong đơn thức giao hoàn toàn trong A^4, khác với lớp đường cong đơn thức mà *H.Bresinsky* đã nêu❒

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] D.Eisenbud and E.G.Evans (1973), *Every algebraic set in n-space is the intersection of n hypersurfaces*, Inv. Math,111-114.

[2] H.Bresinsky (1979), *Monomial space curves in* A^3 *as set-theoretic complete intersections*, American Math, Vol 75, 23-24.

[3] D.Patil (1990), *Certain monomial curves are set theoratical complete intersections*, Manuscripta Math,Vol 68, 399-402.

[4] H.Bresinsky (1979), *Monomial Gorenstein curves in* A^4 *as set-theoretic complete intersections*, Manuscripta Math, Vol 27, 353-358.

[5] Tran Hoai Ngoc Nhan (2012), *Set-theoretic complete intersection monomial curves in* P^n, Arch. Math, Vol 99, 37-41.

[6] Lê Hào (2011), *Đường cong đơn thức trong không gian affine trên trường số thực*, Tạp chí thông tin Khoa học trường ĐHPY số 10/2011, 11-13.