

BIỂU DIỄN DƯƠNG CỦA MA TRẬN ĐA THỨC KHÔNG ÂM TRÊN CÁC DẢI TRONG $\mathbb{R}^2$ CÓ DẠNG $U \times \mathbb{R}$ VỚI $U \subseteq \mathbb{R}$ LÀ TẬP COMPACT

Vũ Thị Thơm*
Hoàng Thị Thoa**

Tóm tắt

Dựa vào biểu diễn dương của đa thức (đa thức hệ số thực) không âm trên các dải trong $\mathbb{R}^2$ có dạng $U \times \mathbb{R}$, trong đó $U \subseteq \mathbb{R}$ là tập compact trong tài liệu [1], chúng tôi trình bày và chứng minh biểu diễn dương cho ma trận đa thức (đa thức hệ số ma trận) không âm trên $U \times \mathbb{R}$. Cụ thể, chúng tôi trình bày cho ma trận đa thức đường chéo và sau đó là ma trận đa thức đối xứng.

Từ khóa: biểu diễn dương, ma trận đa thức không âm

1. Giới thiệu

Lớp các đa thức không âm trên toàn không gian đã được nghiên cứu rất lâu và cho nhiều kết quả quan trọng, tiêu biểu là bài toán thứ 17 của Hilbert về biểu diễn của các đa thức không âm trên $\mathbb{R}^t$. Tuy nhiên, lớp các đa thức không âm trên các miền con nói chung và lớp các đa thức không âm trên các dải trong $\mathbb{R}^t$ nói riêng vẫn còn nhiều vấn đề chưa được giải quyết. Do vậy, trong những năm gần đây, các vấn đề về biểu diễn của đa thức không âm trên các miền con đang được các nhà khoa học nghiên cứu mở rộng về mặt toán học cũng như ứng dụng của chúng trong kỹ thuật công nghệ. Đặc biệt là biểu diễn của ma trận đa thức không âm trên các dải trong $\mathbb{R}^t$ là vấn đề còn khá mới và hấp dẫn.

Trong bài báo này, chúng tôi phát biểu và chứng minh biểu diễn dương cho ma trận đa thức không âm trên dải $U \times \mathbb{R}$, trong đó $U \subseteq \mathbb{R}$ là tập compact. Điều đó được trình bày cụ thể trong Mệnh đề 3 và Định lý 4, đây là hai kết quả mới của bài báo, cung cấp thêm tài liệu tham khảo cho biểu diễn dương của ma trận đa thức. Các biểu diễn dương của đa thức không âm cũng như biểu diễn dương của ma trận đa thức không âm sẽ có ích trong việc giải bài toán thiết kế lọc và xác định hàm Lyapunov cho một hệ phương trình vi phân.

2. Một số khái niệm cơ bản

Trong bài báo, chúng tôi kí hiệu $\mathbb{R}[X] := \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ và vành đa thức hệ số thực n biến và $\sum \mathbb{R}[X]^2$ là tổng các bình phương trong $\mathbb{R}[X]$. Cho một tập hữu hạn $S = \{s_0, s_2, \dots, s_k\} \subseteq \mathbb{R}[X]$, kí hiệu $K_S = \{a \in \mathbb{R}^n | s_i(a) \geq 0 \forall i = 0, \dots, k\}$ là tập nửa đại số đóng cơ bản sinh bởi S , và T_S là tiền thứ tự trong $\mathbb{R}[X]$ sinh bởi S , tập T_S gồm các phần tử có dạng $\sum_i \sigma_i s^i$, trong đó mỗi $s^i = s_0^{i_0} \dots s_k^{i_k}$, $i = (i_0, \dots, i_k)$, i_p chỉ nhận giá trị 0 hoặc 1 với mọi $p = 0, \dots, k$ và mỗi σ_i là tổng các bình phương trong $\mathbb{R}[X]$, T_S được viết dưới dạng tập

* ThS, Trường Đại học Phú Yên

** ThS

hợp như sau

$$T_S = \left\{ \sum_i \sigma_i s^i \mid \begin{array}{l} \sigma_i \in \sum \mathbb{R}[X]^2, s^i = s_o^{i_0} \dots s_k^{i_k}, \\ i = (i_0, \dots, i_k), i_p \in \{0,1\} \forall p = 1, \dots, k \end{array} \right\}.$$

Với $U \subseteq \mathbb{R}$ là tập compact, trong bài báo này chúng tôi giả sử $U = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup \dots \cup [a_k, b_k]$, trong đó $a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \dots < a_k \leq b_k$. Và định nghĩa tập $S \subseteq \mathbb{R}[x]$ tương tự trong tài liệu [1] như sau

$$S = \{x - a_1, (x - a_2)(x - b_1), \dots, (x - a_k)(x - b_{k-1}), b_k - x\}.$$

Để thuận tiện, ta đặt

$$s_0 = x - a_1, s_1 = (x - a_2)(x - b_1), \dots, s_{k-1} = (x - a_k)(x - b_{k-1}), s_k = b_k - x.$$

Khi đó $S = \{s_0, s_2, \dots, s_k\} \subseteq \mathbb{R}[x]$. Dễ thấy, tập nửa đại số đóng cơ bản sinh bởi S trong $\mathbb{R}$ (tương ứng trong $\mathbb{R}^2$) là U (tương ứng $U \times \mathbb{R}$).

Xét tập hợp $\mathcal{M}_m(\mathbb{R}[X])$ là tập hợp các ma trận đa thức cấp m . Ma trận $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}[X])$ thì mỗi phần tử của ma trận $\mathbf{A}$ là các đa thức trong $\mathbb{R}[X]$ hay $\mathbf{A} = [f_{ij}(X)]_{m \times m}$, $f_{ij}(X) \in \mathbb{R}[X]$. Khi đó $\mathcal{S}_m(\mathbb{R}[X]) = \{\mathbf{A} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}[X]) \mid \mathbf{A}^T = \mathbf{A}\}$. Mỗi phần tử có dạng $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ với $\mathbf{A} \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R}[X])$ được gọi là một *bình phương Hermit* và mỗi tổng có dạng $\sum_{i=0}^k \mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i$, $k \in \mathbb{N}$ được gọi là *tổng bình phương Hermit*. Ta có

$$\sum_{|\alpha|=0}^N A_\alpha X^\alpha = \mathbf{A},$$

trong đó $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_t) \in \mathbb{N}^t$, $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_t$, $X^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_t^{\alpha_t}$, $A_\alpha \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, N là giá trị $|\alpha|$ lớn nhất. Khi đó $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}[X])$. Do đó, mỗi đa thức với hệ số ma trận có thể xem như là một ma trận đa thức. Để thống nhất, trong bài báo các đa thức với hệ số ma trận được xem xét như các ma trận đa thức.

Cho $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}[X])$ được gọi là *nửa xác định dương* nếu $y^T \mathbf{A} y \geq 0$ với mọi $y \in \mathbb{R}^m$, kí hiệu là $\mathbf{A} \geq 0$. $\mathbf{A}$ được gọi là *xác định dương* nếu $y^T \mathbf{A} y > 0$ với mọi $y \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, kí hiệu $\mathbf{A} > 0$. Và $D(d_1, d_2, \dots, d_r)$, $r \leq m$ là *ma trận đường chéo* với các phần tử trên đường chéo là $d_1, d_2, \dots, d_r, 0, \dots, 0$, trong đó $d_i \in \mathbb{R}[X]$ với mọi $i = 1, \dots, r$.

Các khái niệm liên quan đến phần này mà không nhắc đến trong bài báo chúng ta có thể xem trong [1], [2] và [3].

3..Kết quả

Dưới đây là hai kết quả được trích từ tài liệu tham khảo [1] và [2], chúng tôi sẽ sử dụng để chứng minh Mệnh đề 3 và Định lý 4.

Định lý 1. [1] Giả sử U và S được định nghĩa như trên, T_S là tiền thứ tự sinh bởi S trong $\mathbb{R}[x, y]$. Khi đó, nếu đa thức hệ số thực $f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ không âm trên $U \times \mathbb{R}$ thì $f \in T_S$.

Bổ đề 2. [4] Cho $\mathbf{A} \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R}[X])$. Khi đó, tồn tại các đa thức khác không $b, d_i \in \mathbb{R}[X]$, $j = 1, \dots, r$, $r \leq m$, và các ma trận $\mathbf{X}_+, \mathbf{X}_- \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}[X])$ sao cho

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_+ \mathbf{X}_- &= \mathbf{X}_- \mathbf{X}_+ = b \mathbf{I}_n, \\ b^2 \mathbf{A} &= \mathbf{X}_+ \mathbf{D} \mathbf{X}_+^T, \\ \mathbf{D} &= \mathbf{X}_- \mathbf{D} \mathbf{X}_-^T, \end{aligned}$$

trong đó $\mathbf{D} = D(d_1, d_2, \dots, d_r)$ là ma trận đường chéo cấp m với các hệ số đường chéo là $d_1, d_2, \dots, d_r, 0, \dots, 0$.

Định lý 1 trong bài báo của chúng tôi được trích dẫn từ tài liệu [1], đây là một kết quả còn khá mới của Victoria Power và Ha Nguyen (năm 2012) được làm rõ từ định lý biểu diễn dương trong trường hợp tổng quát của nhà toán học Marshall, cụ thể nếu đa thức hệ số thực $f(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ không âm trên $U \times \mathbb{R}$ với $U \subseteq \mathbb{R}$ là tập compact thì $f \in T_S$. Dựa vào kết quả đó, chúng tôi trình bày và chứng minh biểu diễn dương cho đa thức hệ số ma trận (ma trận đa thức) không âm trên $U \times \mathbb{R}$.

Mệnh đề 3. Cho $\mathbf{D} = D(d_1, d_2, \dots, d_r), r \leq m$ là ma trận đường chéo và $d_i \in \mathbb{R}[x, y]$ với mọi $i = 1, \dots, r$. Khi đó, $\mathbf{D} \succcurlyeq 0$ trên dải $U \times \mathbb{R}$ khi và chỉ khi tồn tại $j^*, l^* \in \mathbb{N}$ và các ma trận đường chéo $\mathbf{A}_{jl} \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R}[x, y])$ với mọi $j = 0, \dots, j^*, l = 0, \dots, l^*$ sao cho

$$\mathbf{D} = \sum_{j=1}^{j^*} \sum_{l=1}^{l^*} (\mathbf{A}_{jl})^T \mathbf{A}_{jl} s^j,$$

trong đó $s^j = s_o^{j_0} \dots s_k^{j_k}, j = (j_0, \dots, j_k), j_p \in \{0, 1\}$ với mọi $p = 0, \dots, k$.

Chứng minh:

Giả sử $\mathbf{D} \succcurlyeq 0$ trên dải $U \times \mathbb{R}$. Với mỗi $i = 1, \dots, r$, ta có $d_i = e_i^T \mathbf{D} e_i \geq 0$ trên $U \times \mathbb{R}$ nên theo Định lý 1 ta suy ra $d_i \in T_S$, tức là tồn tại $j^* \in \mathbb{N}, j^* \leq 2^{k+1}$ và $\sigma_{ij} \in \sum \mathbb{R}[x, y]^2$ sao cho

$$d_i(x, y) = \sum_{j=0}^{j^*} \sigma_{ij} s^j,$$

trong đó $s^j = s_o^{j_0} \dots s_k^{j_k}, j = (j_0, \dots, j_k), j_p \in \{0, 1\}$ với mọi $p = 0, \dots, k$. Vì $\sigma_{ij} \in \sum \mathbb{R}[x, y]^2$ nên tồn tại $l^* \in \mathbb{N}$ và $g_{ijl}(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ sao cho

$$\sigma_{ij} = \sum_{l=0}^{l^*} g_{ijl}^2(x, y).$$

Khi đó

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= D(d_1, d_2, \dots, d_r) \\ &= D\left(\sum_{j=0}^{j^*} \sigma_{1j} s^j, \dots, \sum_{j=0}^{j^*} \sigma_{rj} s^j\right) \\ &= D(\sigma_{10}, \dots, \sigma_{r0}) s^0 + \dots + D(\sigma_{1j^*}, \dots, \sigma_{rj^*}) s^{j^*} \\ &= D\left(\sum_{l=0}^{l^*} g_{10l}^2(x, y), \dots, \sum_{l=0}^{l^*} g_{r0l}^2(x, y)\right) s^0 + \dots + \\ &\quad + D\left(\sum_{l=0}^{l^*} g_{1j^*l}^2(x, y), \dots, \sum_{l=0}^{l^*} g_{rj^*l}^2(x, y)\right) s^{j^*} \\ &= (D(g_{101}^2, \dots, g_{r01}^2) + \dots + D(g_{10l^*}^2, \dots, g_{r0l^*}^2)) s^0 + \dots + \\ &\quad + (D(g_{1j^*1}^2, \dots, g_{rj^*1}^2) + \dots + D(g_{1j^*l^*}^2, \dots, g_{rj^*l^*}^2)) s^{j^*}. \end{aligned}$$

Với mỗi $l = 0, \dots, l^*$, ta đặt

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{0l} &= D(g_{10l}, \dots, g_{r0l}) \\ \mathbf{A}_{1l} &= D(g_{11l}, \dots, g_{r1l}) \\ &\dots \\ \mathbf{A}_{j^*l} &= D(g_{1j^*l}, \dots, g_{rj^*l}) \end{aligned}$$

Khi đó $(\mathbf{A}_{jl})^T \mathbf{A}_{jl} = D(g_{1jl}^2, \dots, g_{rjl}^2)$ với mọi $j = 0, \dots, j^*, l = 0, \dots, l^*$. Từ đó suy ra

$$\mathbf{D} = \left(\sum_{l=1}^{l^*} (\mathbf{A}_{0l})^T \mathbf{A}_{0l} \right) s^0 + \cdots + \left(\sum_{l=1}^{l^*} (\mathbf{A}_{j^*l})^T \mathbf{A}_{j^*l} \right) s^{j^*}$$

hay

$$\mathbf{D} = \sum_{j=1}^{j^*} \sum_{l=1}^{l^*} (\mathbf{A}_{jl})^T \mathbf{A}_{jl} s^j.$$

Ngược lại, giả sử tồn tại $j^*, l^* \in \mathbb{N}$ và các ma trận đường chéo $\mathbf{A}_{jl} \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R}[x, y])$ với mọi $j = 0, \dots, j^*; l = 0, \dots, l^*$ sao cho

$$\mathbf{D} = \sum_{j=1}^{j^*} \sum_{l=1}^{l^*} (\mathbf{A}_{jl})^T \mathbf{A}_{jl} s^j.$$

Khi đó, với mọi $y \in \mathbb{R}^m$ bất kỳ, ta có

$$y^T \mathbf{D} y = \sum_{j=1}^{j^*} \sum_{l=1}^{l^*} (\mathbf{A}_{jl} y)^T (\mathbf{A}_{jl} y) s^j \geq 0$$

trên dải $U \times \mathbb{R}$. Từ đó suy ra $\mathbf{D} \succcurlyeq 0$ trên dải $U \times \mathbb{R}$.

Định lý 4. Cho $\mathbf{F} \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R}[x, y])$ bất kỳ. Khi đó, $\mathbf{F} \succcurlyeq 0$ trên dải $U \times \mathbb{R}$ khi và chỉ khi tồn tại $j^*, l^* \in \mathbb{N}$ và các ma trận $\mathbf{V}_{jl} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}[x, y])$ với mọi $j = 0, \dots, j^*; l = 0, \dots, l^*$ sao cho

$$b^2 \mathbf{F} = \sum_{j=1}^{j^*} \sum_{l=1}^{l^*} (\mathbf{V}_{jl})^T \mathbf{V}_{jl} s^j,$$

trong đó $s^j = s_o^{j_0} \dots s_k^{j_k}, j = (j_0, \dots, j_k), j_p \in \{0, 1\}$ với mọi $p = 0, \dots, k$.

Chứng minh:

Vì $\mathbf{F} \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R}[x, y])$ nên theo Bổ đề 2 tồn tại các đa thức khác không $b, d_i \in \mathbb{R}[x, y], i = 1, \dots, r, r \leq m$, và các ma trận $\mathbf{X}_+, \mathbf{X}_- \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}[x, y])$ sao cho

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_+ \mathbf{X}_- &= \mathbf{X}_- \mathbf{X}_+ = b \mathbf{I}_n, \\ b^2 \mathbf{F} &= \mathbf{X}_+ \mathbf{D} \mathbf{X}_+^T, \\ \mathbf{D} &= \mathbf{X}_- \mathbf{F} \mathbf{X}_-^T, \end{aligned}$$

trong đó $\mathbf{D} = D(d_1, d_2, \dots, d_r)$ là ma trận đường chéo cấp m với các hệ số đường chéo là $d_1, d_2, \dots, d_r, 0, \dots, 0$. Vì $\mathbf{F} \succcurlyeq 0$ trên dải $U \times \mathbb{R}$ nên với mỗi $i = 1, \dots, r$ ta có $d_i = e_i^T \mathbf{D} e_i = e_i^T \mathbf{X}_- \mathbf{F} \mathbf{X}_-^T e_i = v_i^T \mathbf{D} v_i \geq 0$ trên $U \times \mathbb{R}$ với $v_i = \mathbf{X}_-^T e_i \in \mathbb{R}^m$. Do đó $\mathbf{D} \succcurlyeq 0$ trên dải $U \times \mathbb{R}$. Theo Mệnh đề 3, tồn tại $j^*, l^* \in \mathbb{N}$ và các ma trận đường chéo $\mathbf{A}_{jl} \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R}[x, y])$ với mọi $j = 0, \dots, j^*; l = 0, \dots, l^*$ sao cho

$$\mathbf{D} = \sum_{j=1}^{j^*} \sum_{l=1}^{l^*} (\mathbf{A}_{jl})^T \mathbf{A}_{jl} s^j,$$

trong đó $s^j = s_o^{j_0} \dots s_k^{j_k}, j = (j_0, \dots, j_k), j_p \in \{0, 1\}$ với mọi $p = 0, \dots, k$. Khi đó

$$b^2 \mathbf{F} = \mathbf{X}_+ \mathbf{D} \mathbf{X}_+^T = \sum_{j=1}^{j^*} \sum_{l=1}^{l^*} (\mathbf{A}_{jl} \mathbf{X}_+^T)^T (\mathbf{A}_{jl} \mathbf{X}_+^T) s^j.$$

Đặt $\mathbf{V}_{jl} = \mathbf{A}_{jl} \mathbf{X}_+^T, j = 0, \dots, j^*, l = 0, \dots, l^*$. Khi đó

$$b^2 \mathbf{F} = \sum_{j=1}^{j^*} \sum_{l=1}^{l^*} (\mathbf{v}_{jl})^T \mathbf{v}_{jl} s^j.$$

Ngược lại, giả sử tồn tại $j^*, l^* \in \mathbb{N}$ và các ma trận $\mathbf{v}_{jl} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}[x, y])$ với mọi $j = 0, \dots, j^*, l = 0, \dots, l^*$ sao cho

$$b^2 \mathbf{F} = \sum_{j=1}^{j^*} \sum_{l=1}^{l^*} (\mathbf{v}_{jl})^T \mathbf{v}_{jl} s^j.$$

Với mọi $y \in \mathbb{R}^m$ bất kỳ, ta có

$$b^2 (y^T \mathbf{D} y) = \sum_{j=1}^{j^*} \sum_{l=1}^{l^*} (\mathbf{v}_{jl} y)^T (\mathbf{v}_{jl} y) s^j \geq 0$$

trên dải $U \times \mathbb{R}$. Từ đó suy ra $\mathbf{F} \succcurlyeq 0$ trên dải $U \times \mathbb{R}$ $\square$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Ha Nguyen, Victoria Powers (2012), Polynomials non-negative on strips and half-strips, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 2225-7232.
- [2] M. Marshall (2010), *Polynomials non-negative on a strip*, Proceedings AMS 138, 1559-1567.
- [3] Hoàng Thị Thoa (2016), *Biểu diễn của đa thức không âm và ứng dụng*, Thạc sĩ, Đại học Quy Nhơn.
- [4] C.T.Lê (2015), Some positivstellensätze for polynomial matrices, *Positivity*, 19(3): 513-528.

Abstract

Positive expression for non-negative polynomial matrices on strips of the form $U \times \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^2$ where $U \subseteq \mathbb{R}$ is compact

Based on the positive expression for non-negative polynomials on strips of the form $U \times \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^2$, where $U \subseteq \mathbb{R}$ is compact, at article [1], we present and prove the positive expression for non-negative polynomial matrices or polynomials with coefficients of matrices. In concrete, we show diagonal polynomial matrices and then polynomial symmetric matrices.

Keywords: Positive expression, non-negative polynomial matrices