GIÁ TRỊ RIÊNG, VẾT CỦA MA TRẬN VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

Lê Hào*

Tóm tắt

Trong bài viết này chúng tôi trình bày mối liên hệ giữa các khái niệm giá trị riêng và vết của ma trận (Định lí 3), đồng thời nêu một vài ứng dụng của các khái niệm này vào ma trận và định thức.

Từ khóa: *Giá trị riêng, vết của ma trận, định thức.*

1. Giới thiệu

Cho A là ma trận vuông cấp n, xét đa thức đặc trưng của A là $P(t)=\det(A-tI_n)$.

Gọi λ_i là nghiệm phức bội $s_i>0$ với $i=\overline{1..k}$ của $P(t)$, các λ_i phân biệt. Ta có:

$$P(t)=(\lambda_1-t)^{s_1}(\lambda_2-t)^{s_2}...(\lambda_k-t)^{s_k},\ \ \lambda_i\in C$$

Như ta đều biết, λ_i gọi là các trị riêng của ma trận A.

1.1. Định nghĩa. Vết của ma trận $A=(a_{ij})_{n\times n}$, kí hiệu $trace(A)$, là tổng các phần tử nằm trên đường chéo chính của ma trận A, khi đó: $trace(A)=a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}$.

Ta dễ dàng kiểm chứng các tính chất sau:

1.2. Định lý 1. Với 2 ma trận A,B vuông cấp n thì:

$$trace(A+B)=trace(A)+trace(B)$$
$$trace(kA)=ktrace(A)\quad (k\in C)$$
$$trace(AB)=trace(BA)$$

Chứng minh. Hai tính chất đầu là hiển nhiên, ta chứng minh tính chất thứ ba. Ta có:

$$A=(a_{ij})_{n\times n},\ B=(b_{ij})_{n\times n}\quad \Rightarrow trace(AB)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}b_{ji}a_{ij}=trace(BA)\ \square$$

Nhắc đến khái niệm giá trị riêng, vết ma trận có rất nhiều bài toán thú vị liên quan đến nhiều vấn đề khác trong đại số, thường gặp trong các đề thi Olympic Sinh viên. Do đó cần phải tìm hiểu các khái niệm này cũng như các ứng dụng của chúng.

2. Liên hệ giữa giá trị riêng và vết của ma trận, một số ứng dụng

2.1. Định lí 2. Cho ma trận vuông A với các giá trị riêng $\lambda_i\in C$ phân biệt như trên thì:

$$\det(A)=\lambda_1^{s_1}\lambda_2^{s_2}....\lambda_k^{s_k}$$

* ThS, Trường Đại học Phú Yên

Chứng minh. Ta có: $\forall t \in R, \det(A - tI_n) = P(t) = (\lambda_1 - t)^{s_1}(\lambda_2 - t)^{s_2}...(\lambda_k - t)^{s_k}$

Cho $t = 0$ thì có điều phải chứng minh □

Để chuẩn bị cho định lí tiếp theo ta có bổ đề sau:

Bổ đề. Với mọi ma trận vuông cấp *n≥ 2* thì:

$$P_n(t) = \det(A - tI_n) = (-t)^n + trace(A)(-t)^{n-1} + h(t)$$

Trong đó *h(t)* là đa thức có $\deg(h(t)) \le n - 2$

Chứng minh.

Với *n=2* thì: $P_2(t) = \begin{vmatrix} a_1 - t & a_2 \\ b_1 & b_2 - t \end{vmatrix} = (-t)^2 - (a_1 + b_2)t + a_1b_2 - a_2b_1$.

Vậy bổ đề đúng với *n=2*

Giả sử bổ đề đúng với mọi ma trận vuông cấp *k ≥ 2.* Xét ma trận *A* vuông cấp *k+1.*

$$P_{k+1}(t) = \begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & ... & a_{1,k+1} \\ a_{21} & a_{22} - t & ... & a_{2,k+1} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & ... & a_{k+1,k+1} - t \end{vmatrix}$$

Bằng cách khai triển theo dòng *1* ta có:

$$P_{k+1}(t) = (a_{11} - t)\begin{vmatrix} a_{22} - t & a_{23} & ... & a_{2,k+1} \\ a_{32} & a_{33} - t & ... & a_{3,k+1} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{k+1,2} & a_{k+1,3} & ... & a_{k+1,k+1} - t \end{vmatrix} + h_1(t)$$

Với $\deg(h_1(t)) \le (k+1) - 2 = k - 1$. Áp dụng giả thiết qui nạp ta suy ra:

$$P_{k+1}(t) = (a_{11} - t)\left[(-t)^k + (a_{22} + a_{33} + ... + a_{k+1,k+1})(-t)^{k-1} + h_2(t)\right] + h_1(t)$$

Trong đó $\deg(h_2(t)) \le k - 2$. Từ đó suy ra:

$$P_{k+1}(t) = (-t)^{k+1} + (a_{11} + a_{22} + a_{33} + ... + a_{k+1,k+1})(-t)^k + h(t)$$

Với $h(t) = (a_{11} - t)h_2(t) + h_1(t) + a_{11}(a_{22} + a_{33} + ... + a_{k+1,k+1})(-t)^{k-1}$ có $\deg(h(t)) \le k - 1$

Bổ đề cũng đúng với *n = k*+1. Bổ đề đã được chứng minh □

2.2. Định lý 3. Cho ma trận vuông A với các giá trị riêng $\lambda_i \in$ C phân biệt như trên thì:

$$trace(A) = s_1\lambda_1 + s_2\lambda_2 + ... + s_k\lambda_k$$

Chứng minh. Theo bổ đề trên: $P(t) = \det(A - tI_n) = (-1)^n t^n - trace(A)(-1)^n t^{n-1} + h(t)$

Với $\deg(h(t)) \le n-2$ và λ_i là các nghiệm phức bội $s_i > 0$ $(i = \overline{1..k})$ của *P(t)*..
Áp dụng định lí Viète thì có điều phải chứng minh □

2.3. Định lý 4. Cho ma trận vuông *A* vuông cấp n >1, với *n* giá trị riêng $\lambda_i \in \mathrm{C}$ $(i = \overline{1.n})$, các trị riêng này có thể trùng nhau. Khi đó với mọi đa thức $f(x) \in R[x]$ khác không, thì:
a). $\det f(A) = f(\lambda_1)f(\lambda_2)...f(\lambda_n)$.
b). $f(\lambda_1), f(\lambda_2),..., f(\lambda_n)$ là các trị riêng của ma trận $f(A)$.

Chứng minh. Giả sử *f(x)* là đa thức bậc *m* và $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ là các nghiệm (thực hoặc phức, kể cả bội) của *f(x)*. Ta có:

a). $P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)...(\lambda_n - \lambda)$ là đa thức đặc trưng của *A*.
$f(x) = c(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_m)$
Do đó:

$$f(A) = c(A-\alpha_1 I)(A-\alpha_2 I)...(A-\alpha_m I)$$

$$\det f(A) = c^n \det(A-\alpha_1 I)\det(A-\alpha_2 I)...\det(A-\alpha_m I) = c^n \prod_{i=1}^{m} P(\alpha_i)$$

Mặt khác: $P(\alpha_i) = (\lambda_1 - \alpha_i)(\lambda_2 - \alpha_i)...(\lambda_n - \alpha_i) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda_j - \alpha_i)$

Vì vậy:

$$\det f(A) = c^n \prod_{i=1}^{m} P(\alpha_i) = \prod_{j=1}^{n} c \prod_{i=1}^{m} (\lambda_j - \alpha_i) = \prod_{j=1}^{n} f(\lambda_j)$$

b). Đặt $g(x) = f(x) - \lambda$ và áp dụng kết quả trên ta có:

$$\det g(A) = g(\lambda_1)g(\lambda_2)...g(\lambda_n)$$

Suy ra: $\det(f(A) - \lambda I) = (-1)^n (\lambda - f(\lambda_1))(\lambda - f(\lambda_2))...(\lambda - f(\lambda_n))$
Vậy $f(\lambda_1), f(\lambda_2),..., f(\lambda_n)$ là các trị riêng của ma trận $f(A)$.□

Nhận xét. Từ chứng minh trên ta thấy rằng: nếu $P(t) = (\lambda_1 - t)^{s_1}(\lambda_2 - t)^{s_2}...(\lambda_k - t)^{s_k}$ là đa thức đặc trưng của ma trận *A* (với $\lambda_i \in \mathrm{C}$ phân biệt, $s_i > 0$ *với* $i = \overline{1..k}$) thì với mọi đa thức $f(x) \in R[x]$, ma trận $f(A)$ có đa thức đặc trưng là:

$$Q(t) = (f(\lambda_1) - t)^{s_1}(f(\lambda_2) - t)^{s_2}...(f(\lambda_k) - t)^{s_k}.$$

Ví dụ 1. (Olympic sinh viên 1999) Cho đa thức $f(x) = x^{1999} + x^2 + 1$ và cho ma trận:

$$A=\begin{pmatrix}4&3&0&0\\2&3&0&0\\4&9&-1&0\\1&2&5&2\end{pmatrix}$$

Tính $\det f(A)$.

Giải. Ta có: $\det(A-\lambda I)=(2-\lambda)(-1-\lambda)\begin{vmatrix}4-\lambda & 3\\ 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0$

Suy ra A có các trị riêng: $\lambda_1=2,\lambda_2=-1,\lambda_3=1,\lambda_4=6$

Theo định lý trên: *f*(*A*) có các trị riêng là :

$$f(2)=2^{1999}+3,\ f(\text{-}1)=\text{-}1,\ f(1)=1,\ f(6)=6^{1999}+35$$

Và $\det f(A)=-(2^{1999}+3)(6^{1999}+35)$. □

Ví dụ 2. *A* là ma trận vuông thực cấp *n* (*n* >1). Giả sử đa thức $f(x)\in R[x]$, thỏa mãn $f(A)=0$ (ma trận không). Chứng minh rằng: $\forall\alpha\in R, f(\alpha)\neq 0$, thì $\det(A-\alpha I)\neq 0$.

Giải. Giả sử $A-\alpha I$ không khả nghịch, tức là $\det(A-\alpha I)=0$, hay α là trị riêng của *A*. Từ định lý trên suy ra $f(\alpha)$ là trị riêng của $f(A)=0$, do đó $f(\alpha)=0$, trái với giả thiết. □

Ví dụ 3. Cho $f(x)\in R[x]$ và $f(x)\geq 0\ \forall x\in R$. Chứng minh rằng: với mọi ma trận $A\in M_n(R)$ thì $\det f(A)\geq 0$.

Giải. $A\in M_n(R)$ nên đa thức đặc trưng $P(\lambda)$ của *A* lấy hệ số trong *R*. Vậy nếu $z\in C$ là nghiệm của $P(\lambda)$ thì $\bar{z}$ cũng vậy.

Giả sử $x_1,x_2,...,x_k$ $(k\geq 0)$ là các nghiệm thực và $z_1,z_2,...,z_l,\overline{z_1},\overline{z_2},...\overline{z_l}$ $(l\geq 0)$ là các nghiệm phức có phần ảo khác không. Theo định lý ta có:

$$\det f(A)=f(x_1)f(x_2)...f(x_k)\prod_{j=1}^{l}f(z_j)f(\overline{z_j})=\prod_{i=1}^{k}f(x_i)\prod_{j=1}^{l}\left|f(z_j)\right|^2$$

Vậy $\det f(A)\geq 0$ do $f(x)\geq 0\ \forall x\in R$. □

Ví dụ 4. Cho ma trận $A\in M_n(R)$ với n > 1, thỏa $A^{2012}+A^{2011}+A^{2010}+....+I=0$. Chứng minh rằng $\det(A-2012I)\neq 0$.

Giải. Giả sử $\det(A-2012I)=0$, suy ra $\alpha=2012$ là trị riêng của *A*.

Xét đa thức $f(x)=x^{2013}-1$, theo định lý thì:

$f(A)=(A-I)(A^{2012}+A^{2011}+A^{2010}+...+I)=0$.

$f(A)$ nhận $f(2012)$ làm trị riêng, do đó $f(2012) = 2012^{2013} - 1 = 0$ vô lý. □

Ví dụ 5. Cho các ma trận *A,B* vuông cấp *n*, đặt $C = AB - BA.$ Giả sử rằng *C* giao hoán với cả 2 ma trận *A, B*. Chứng tỏ rằng:

a). $Trace(C^m) = 0, \forall m \in N^*$

b). Tồn tại số nguyên dương m sao cho $C^m = 0_n$ (ma trận không cấp *n*).

Giải. a).Với mọi m nguyên dương thì:

$$C^m = (AB - BA)C^{m-1} = A\left(BC^{m-1}\right) - \left(BC^{m-1}\right)A.$$

Vậy ta luôn có $trace(C^m) = 0, \forall m \in N^*$.

b).Ta chứng minh mọi trị riêng của C đều bằng 0. Thật vậy, giả sử C có các trị riêng khác không phân biệt $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in C$ với λ_i có bội $s_i > 0$.

Từ giả thiết ta suy ra:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
s_1\lambda_1 & + & s_2\lambda_2 & + & ... & + & s_k\lambda_k & = & 0 & = & trace(C) \\
s_1\lambda_1^2 & + & s_2\lambda_2^2 & + & ... & + & s_k\lambda_k^2 & = & 0 & = & trace(C^2) \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\
s_1\lambda_1^k & + & s_2\lambda_2^k & + & ... & + & s_k\lambda_k^k & = & 0 & = & trace(C^k)
\end{array}$$

Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & ... & \lambda_k^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^k & \lambda_2^k & ... & \lambda_k^k \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 \ ...... \ \lambda_k \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & ... & \lambda_k \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & ... & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix}$$

$D \neq 0$ vì định thức ở vế phải là định thức Vandermonde cấp *k*, với các giá trị λ_i phân biệt (xem [1], chuyên đề 4, trang 29 và 30). Vậy $s_1 = s_2 = ... = s_k = 0$, vô lí.

Do đó mọi trị riêng của *C* đều bằng 0 tức là $P(\lambda) = \det(C - \lambda I) = (-\lambda)^n$. Suy ra $C^n = 0_n$ □

Liên quan đến khái niệm đa thức đặc trưng, giá trị riêng, vết ma trận còn rất nhiều ứng dụng thú vị khác trong lĩnh vực đại số tuyến tính, trong phạm vi bài viết này chúng tôi chỉ giới thiệu những ứng dụng cơ bản nhằm gợi ý cho các bạn sinh viên tiếp tục tìm hiểu thêm❒

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Lê Hào (2014), *Bài giảng đại số,* Chuyên đề bồi dưỡng đội tuyển Olympic sinh viên, Trường Đại học Phú yên.

[2] Lê Hào (2011), *Đa thức đặc trưng và giá trị riêng, áp dụng để tìm lũy thừa ma trận,* Tạp chí thông tin khoa học số 05, Đại học Phú yên năm 2011.

[3] Hội Toán học Việt Nam, *Các đề thi Olympic sinh viên từ 2006 đến 2016,* Hà nội.

[4] Tài liệu bồi dưỡng đội tuyển Olympic (2012), Các *chuyên đề tính định thức,* Trường Đại học Kinh tế quốc dân, Hà nội.

[5] Trần Nam Dũng (2009), *Một số chuyên đề về ma trận,* Đại học KHTN Thành phố Hồ Chí Minh.

Abstract

Eigen values, trace of matrices and applications

In this article we would present the relationship between the Eigen values and trace of matrices (Theorem 3), simultaneously mention some applications of these concepts into the matrices and determinants.

Keywords: *Eigen value, trace of matrix, determinant.*