VẤN ĐỀ DẠY HỌC LOGARIT TRONG CHƯƠNG TRÌNH TOÁN PHỔ THÔNG VÀ NHỮNG ĐIỀU CẦN BIẾT VỀ LOGARIT

NGUYỄN VIẾT HIẾU*

TÓM TẮT

Chuyển hóa sư phạm tạo điều kiện cho người học tiếp cận nhanh và có hệ thống các tri thức đã được nhân loại thừa nhận. Tuy nhiên, quá trình đó làm cho tri thức không còn giống như nguồn gốc ban đầu của nó, đôi khi có sự khác biệt khá lớn. Điển hình là tri thức về logarit trong chương trình Toán phổ thông hiện hành. Với mong muốn tìm lại nghĩa và vai trò cho đối tượng logarit, bài viết giới thiệu sự xuất hiện của nó trong lịch sử và những vai trò công cụ qua các ứng dụng nổi bật.

Từ khóa: logarit, nghĩa của tri thức, lịch sử Toán.

ABSTRACT

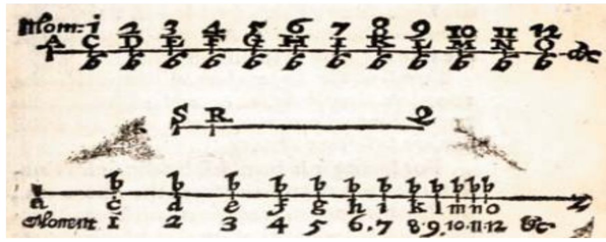
The issue of teaching logarithm in high school mathematics syllabus and what to know about logarithm

The pedagogical transfer has brought learners opportunities to approach quickly and systematically the knowledge that has been acknowledged by all human beings. However, that process has made the knowledge on longer the same as its origin; in fact, there're sometimes wide disparities. A very typical example is the knowledge about logarithm, which has been presented in the current high school mathematics syllabus. Aiming to retrieve the meanings as well as the roles of logarithm, the article will discuss the appearance of logarithm in history and its main roles as a tool through outstanding applications.

Keywords: logarithm, meanings of the knowledge, the history of maths.

1. Vài nét sơ lược về lịch sử xuất hiện khái niệm logarit

Logarit được John Napier[1] (1550 – 1617) giới thiệu đầu tiên trong tác phẩm *"Mirifici logarithmorum canonis descriptio"* vào năm 1614, sau 20 năm nghiên cứu. Dựa trên ý tưởng "nhân hai số theo cộng và trừ" của phương pháp (PP) *prosthaphaeresis*[2] có trước đó. Tuy nhiên, PP prosthaphaeresis chứa đựng nhiều bất lợi khi thực hiện phép chia và khai căn. Trong khi đó, sự phát triển của khoa học thời bấy giờ đòi hỏi cần phải tính nhân, chia, khai căn hiệu quả hơn. Chính điều đó đã thôi thúc Napier sáng tạo ra PP tính nhân, chia, căn bậc hai, căn bậc ba dựa trên logarit. Tuy nhiên định nghĩa khái niệm logarit do Napier đưa ra hoàn toàn khác so với chúng ta biết ngày nay.

* HVCH, Trường Đại học Sư phạm TPHCM

***Hình 1.** Hai đường thẳng song song, đoạn SQ , đoạn SQ cho trước và các điểm do hai điểm B, b vạch ra*

Theo [10], Edward Wright chỉ ra rằng: Napier đã tưởng tượng hai điểm B và b chuyển động trên hai đường thẳng song song (Hình 1), trong khi điểm B chuyển động theo một chiều nhất định trên đường thẳng dài vô hạn với tốc độ không đổi, bắt đầu từ A thì điểm b chuyển động từ a trên đoạn thẳng az với tốc độ giảm dần. Ở những khoảng thời gian bằng nhau điểm B vạch ra các điểm C, D, E,… tương ứng với thời điểm 1, 2, 3,…, trong khi đó điểm b vẽ ra các điểm c, d, e,… thỏa $\frac{RQ}{SQ}=\frac{cz}{az}=\frac{dz}{cz}=\frac{ez}{dz}\ldots$ với đoạn thẳng SQ và điểm R thuộc đoạn SQ cho trước. Napier đã định nghĩa:

$AC=\log_{nap}(cz)$ với $cz = \mathrm{Sin}\theta_1$

$AD=\log_{nap}(dz)$ với $dz = \mathrm{Sin}\theta_2$

$AE=\log_{nap}(ez)$ với $ez = \mathrm{Sin}\theta_3$

Tương tự cho các điểm khác mà B và b vạch ra trên hai đường thẳng theo những khoảng thời gian bằng nhau. Napier đã chọn độ dài $az = 10.000.000$ và tạo ra những bảng tính logarit cần thiết cho các tính toán của mình.

Như vậy, khái niệm logarit do Napier xây dựng dường như khác biệt so với khái niệm logarit chúng ta biết ngày nay[3], đó là sự liên hệ giữa các phần tử của cấp số cộng (CSC) và các phần tử của cấp số nhân (CSN). Logarit biến đổi các phần tử của CSN thành phần tử của CSC tương ứng. Tuy nhiên, không có một định nghĩa logarit một số thực dương bất kì cho trước, cũng như không có một mối liên hệ gì với lũy thừa mũ số thực trong định nghĩa ban đầu này. Thêm nữa, không có một định nghĩa tường minh nào cho cơ số của logarit. Vậy, logarit do Napier xây dựng được sử dụng để làm gì? Tính chất nào của khái niệm logarit đã được thiết lập?

Nghiên cứu [10] chúng tôi thấy: Napier đã chứng minh một số tính chất quan trọng của khái niệm logarit do mình tạo ra. Cụ thể như sau:

- *Nếu a,b,c,d là bốn số của một CSN thỏa* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

thì $\log_{nap} a - \log_{nap} b = \log_{nap} c - \log_{nap} d$.

- *Nếu a,b,c là ba số hạng liên tiếp của một CSN*

thì $2\log_{nap} b = \log_{nap} a + \log_{nap} c$.

- *Nếu a, b, c, d là bốn số hạng liên tiếp của một CSN*

thì $3\log_{nap} b = 2\log_{nap} a + \log_{nap} d$ *và* $3\log_{nap} c = 2\log_{nap} d + \log_{nap} a$.

Theo [10] và [14], Napier đã kiểm chứng được tính ưu việt của logarit thông qua các bài toán: tính trung bình nhân của hai số 10.000.000, 5.000.000 và tìm số hạng thứ hai, thứ ba trong CSN gồm 4 số hạng khi biết số hạng đầu 14142135 và số hạng cuối 5.000.000. Napier khẳng định rằng: Tính theo logarit dễ dàng hơn cách tính thông thường. Cụ thể khi tính $\sqrt{10.000.000 \times 5.000.000}$, Napier dựa trên tính chất đã chứng minh, ông lấy $\log_{nap} 10.000.000 + \log_{nap} 5.000.000 = 0 + 6931470 = 6931470$ và $6931470 \div 2 = 3465735$. Napier tra bảng logarit và tìm được kết quả 7071068, tương đối gần với kết quả đúng.

Với bài toán thứ hai, để tiện theo dõi chúng tôi kí hiệu CSN với 4 số hạng sau $a; b; c; d$ trong đó $a = 14142135$, $d = 5000000$. Rõ ràng $b^3 = a^2.d$; $c^3 = d^2.a$, do đó ta có thể tính được $b; c$ theo công thức $b = \sqrt[3]{a^2.d}$; $c = \sqrt[3]{d^2.a}$. Nhưng Napier tính theo cách dựa trên phép cộng, nhân hai và chia ba, có sự hỗ trợ của bảng logarit, $\log_{nap} c = \dfrac{2\log_{nap} d + \log_{nap} a}{3} = \dfrac{2 \times 6931470 + (-3465735)}{3} \approx 3465735$ và tra bảng logarit ông tính được $c \approx 7071068$. Tương tự $b \approx 10^7$, do đó có CSN 14142135, 10000000, 7071068, 5000000.

Như vậy, logarit do Napier tạo ra nhằm mục đích để đơn giản hóa các phép tính nhân, chia, căn bậc hai, căn bậc ba theo các phép tính đơn giản hơn như cộng, trừ, chia hai và chia ba. Dù tính toán đã được cải thiện nhưng cơ số logarit chưa thực sự tiện lợi, bằng lí thuyết toán hiện đại người ta chứng minh được $\log_{nap} x = 10^7.\log_{\frac{1}{e}}\left(\dfrac{x}{10^7}\right)$. Song với những ưu điểm vượt trội, logarit đã tạo hứng thú cho nhiều nhà toán học như Henry Briggs (1561–1630), Nicolaus Mercator (1620–1687), Leonhard Euler (1707–1783),… nghiên cứu sâu và rộng hơn về logarit.

Cùng với sự phát triển của khoa học, Toán học đã phát triển rất nhanh và logarit cũng không phải là ngoại lệ. Vai trò của logarit thực sự đã "tiến xa" hơn vai trò của nó trong lịch sử. Không những được ứng dụng rộng rãi trong Toán học mà logarit còn xuất hiện trong các công thức tính ở các bộ môn khoa học khác. Chúng tôi xin điểm qua vài ứng dụng của logarit và các vai trò công cụ được thể hiện qua những ứng dụng đó.

2. Vai trò công cụ của logarit qua một số ứng dụng

2.1. Logarit – công cụ đơn giản hóa các phép tính phức tạp

Như ta biết, từ khi ra đời logarit đóng vai trò là một công cụ đơn giản hóa các phép tính nhân, chia và khai căn thành các phép tính đơn giản hơn. Dưới tác động của logarit các biểu thức cho dưới dạng tích, thương, lũy thừa được đưa về các biểu thức đơn giản. Rõ ràng, sử dụng logarit cơ số a $(0 < a \neq 1)$ tác động vào biểu thức

$x^3.y^2.\sqrt{z}$ ($x, y, z > 0$) ta biến đổi được nó thành $3\log_a x + 2\log_a y + \frac{1}{2}\log_a z$, thay vì tính nhân, lũy thừa ta có thể tính toán dựa trên phép cộng các logarit. Theo tiến trình phát triển của Toán học, vai trò đó của logarit vẫn tiếp tục được kế thừa và có phát triển. Vai trò công cụ đơn giản hóa các biểu thức phức tạp cho dưới dạng tích, thương, lũy thừa thể hiện qua các ứng dụng sau của logarit:

a) Tính các giới hạn vô định dạng $1^\infty, 0^0, \infty^0$

b) Tính đạo hàm các hàm số có dạng $y = f(x)^{g(x)}$ và $y = f_1^{\alpha_1}(x).f_2^{\alpha_2}(x)...f_n^{\alpha_n}(x)$

c) Chuyển hàm mũ, lũy thừa về hàm tuyến tính hay bán tuyến tính

d) Giải phương trình mũ dạng $a^{f(x)} = b$, $a^{f(x)} = b^{g(x)}$

Chúng tôi khảo sát cụ thể từng ứng dụng trên của logarit qua các mục sau:

2.1.1. Tính các giới hạn vô định dạng $1^\infty, 0^0, \infty^0$

Trong giải tích đôi khi ta cần tính các giới hạn vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$; đó là các giới hạn có dạng $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ trong đó a có thể hữu hạn hoặc vô cùng. Trong trường hợp 1^∞ thì $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ và $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, chẳng hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, tương tự cho các trường hợp $0^0, \infty^0$. Nghiên cứu các tài liệu tham khảo, chúng tôi thấy có nhiều kĩ thuật tìm giới hạn của các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$ nhưng phổ biến nhất và chung cho cả ba dạng trên là kĩ thuật sử dụng logarit. Sau đây là hai ví dụ và lời giải tương ứng:

Ví dụ 1: Tìm $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^{\tan x}$ (Giới hạn vô định dạng 0^0) (Tham khảo [13])

Lời giải: Đặt $y = (\sin x)^{\tan x}$. Lấy logarit nêpe hai vế có

$$\ln y = \tan x.\ln(\sin x) = \frac{\ln(\sin x)}{\cot x}.$$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sin x)}{\cot x} \overset{L'Hospital}{=} \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-\cos x.\sin x) = 0$. Do đó $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln y = 0$.

Vậy, $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^{\tan x} = \lim\limits_{x\to 0^+} y = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^0 = 1.$

Ví dụ 2: Tìm giới hạn: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$ (Giới hạn vô định dạng 1^∞)

Lời giải: 5) Đặt $A = (\sin x)^{\tan x} = \left[1 + (\sin x - 1)\right]^{\tan x}$

$$\ln A = \tan x.\ln\left(1+(\sin x-1)\right) = \frac{\ln\left(1+(\sin x-1)\right)}{\cot x} = \frac{\ln\left(1+(\sin x-1)\right)}{\sin x - 1}.\frac{\sin x - 1}{\cot x}$$

Và $\frac{\sin x-1}{\cot x} = \sin x.\frac{\sin x - 1}{\cos x}$. Do đó $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x - 1}{\cot x} = 0$

Cuối cùng: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \ln A = 0$, nghĩa là: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} A = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x} = e^0 = 1$ ([8], tr.46)

Từ hai ví dụ trên ta thấy: logarit tham gia vào kĩ thuật tìm giới hạn vô định dạng $1^\infty, 0^0$ ở góc độ tác động vào biểu thức $f(x)^{g(x)}$ và biến nó thành $g(x).\ln[f(x)]$. Từ đó thay vì tính giới hạn trực tiếp, logarit chuyển hàm số $y = f(x)^{g(x)}$ về dạng đơn giản hơn $g(x).\ln[f(x)]$ và áp dụng công thức L'Hospital hoặc $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1$ để tính. Mục đích tính toán được thực hiện thông qua sự biến đổi của logarit. Dù chúng tôi không đưa ra ví dụ và lời giải cụ thể cho dạng vô định ∞^0 nhưng bạn đọc có thể áp dụng kĩ thuật tương tự để tìm giới hạn. Bạn đọc có thể thử tìm $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$.

2.1.2. Tính đạo hàm các hàm số có dạng $y = f(x)^{g(x)}$ và $y = f_1^{\alpha_1}(x).f_2^{\alpha_2}(x)...f_n^{\alpha_n}(x)$

Trong giải tích, ta thường gặp các bài toán tính đạo hàm của các hàm số có dạng $y = f(x)^{g(x)}$, chẳng hạn như bài tập sau:

Bài 3. *Tính đạo hàm của các hàm số: $y = x^{\frac{1}{x}}$*

Lời giải được trình bày bởi tác giả Nguyễn Đình Trí:

Để ý rằng hàm số $y = x^{\frac{1}{x}}$ không thuộc dạng a^x (vì x không phải là hằng số), cũng không thuộc dạng x^α (vì $\frac{1}{x}$ không phải hằng số), do đó, muốn tính y' nhất thiết phải lấy logarit của hai vế và khi đó có $\ln y = \frac{1}{x}.\ln x$.

Và $\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2}.\ln x + \frac{1}{x}.\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}(1 - \ln x)$.

Do đó: $y' = \frac{y}{x^2}(1 - \ln x) = \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2}(1 - \ln x)$ ([8], tr.61)

Rõ ràng, hàm số $y = f(x)^{g(x)}$ cho trong bài tập trên có đặc điểm $y = g(x)$ và $y = f(x)$ không là hàm hằng nên hàm số $y = f(x)^{g(x)}$ không phải là hàm số mũ và cũng không là hàm lũy thừa, kéo theo ta không thể tính đạo hàm bằng công thức thông thường được. Việc lấy đạo hàm được thực hiện bằng cách lấy logarit nêpe hai vế của phương trình $y = f(x)^{g(x)}$, biến đổi về dạng $\ln y = g(x).\ln f(x)$ và lấy đạo hàm theo biến x hai vế. Dù không trực tiếp đưa ra đạo hàm của hàm số $y = f(x)^{g(x)}$ nhưng logarit cho phép chuyển hàm số về dạng đơn giản $\ln y = g(x).\ln f(x)$ và tạo điều kiện thuận lợi cho việc tính đạo hàm.

Không chỉ riêng những hàm số có dạng $y = f(x)^{g(x)}$, hàm số cho bởi công thức $y = f_1^{\alpha_1}(x).f_2^{\alpha_2}(x)...f_n^{\alpha_n}(x)$ ($\alpha_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{1;n}$) cũng có thể được tính đạo hàm thông qua sự tác động của logarit. Dưới đây là ví dụ minh chứng điều đó:

Bài 3. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$, $x \neq \pm 1$ ([8], tr.54)

Lời giải dựa trên hướng dẫn của tài liệu [8]:

Ta có: $\forall x \neq \pm 1$ thì $|y| = \left|\dfrac{1+x^3}{1-x^3}\right|^{\frac{1}{3}}$. Suy ra $\ln|y| = \dfrac{1}{3}.\left[\ln\left|1+x^3\right| - \ln\left|1-x^3\right|\right]$ (2)

Lấy đạo hàm hai vế của (2) có: $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3x^2}{1+x^3} + \dfrac{3x^2}{1-x^3}\right) = x^2.\left[\dfrac{1}{1+x^3} + \dfrac{1}{1-x^3}\right]$

Do đó $y' = \dfrac{2x^2}{1-x^6}\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$, $|x| \neq 1$.

Hàm số cho trong bài toán trên không có dạng $y = f_1^{\alpha_1}(x).f_2^{\alpha_2}(x)...f_n^{\alpha_n}(x)$ ($\alpha_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{1;n}$) nhưng ta có thể chuyển được về $y = f_1^{\alpha_1}(x).f_2^{\alpha_2}(x)...f_n^{\alpha_n}(x)$ nhờ các tính chất của lũy thừa mũ số thực. Logarit đã tham gia như thế nào trong kĩ thuật tính đạo hàm của hàm số $y = f_1^{\alpha_1}(x).f_2^{\alpha_2}(x)...f_n^{\alpha_n}(x)$?

Từ ví dụ trên ta thấy: việc lấy logarit tác động vào hai vế của $y = f_1^{\alpha_1}(x).f_2^{\alpha_2}(x)...f_n^{\alpha_n}(x)$ không phải được thực hiện một cách tùy ý, mà biến đổi được tiến hành trên những giá trị x mà hàm số có đạo hàm và $f_i(x) > 0$ hoặc $|f_i(x)| > 0$, $\forall i = \overline{1;n}$. Ở ví dụ trên, tại những giá trị $x \neq \pm 1$ hàm số luôn có đạo hàm và $\left|\dfrac{1+x^3}{1-x^3}\right| > 0$ nên việc lấy logarit nêpe hai vế của $|y| = \left|\dfrac{1+x^3}{1-x^3}\right|^{\frac{1}{3}}$ hoàn toàn có thể thực hiện được. Theo đó, một cách tổng quát logarit tác động vào hai vế của $|y| = |f_1(x)|^{\alpha_1}.|f_2(x)|^{\alpha_2}...|f_n(x)|^{\alpha_n}$,

biến đổi nó thành $\ln|y| = \alpha_1 \ln|f_1(x)| + \alpha_2.\ln|f_2(x)| + ... + \alpha_n \ln|f_n(x)|$, và việc tính đạo hàm của hàm số ban đầu đã được chuyển về tính tổng đạo hàm của các hàm số đơn giản hơn. Như vậy, logarit tham gia vào kĩ thuật tính đạo hàm của các hàm số dạng $y = f_1^{\alpha_1}(x).f_2^{\alpha_2}(x)...f_n^{\alpha_n}(x)$ như là công cụ biến đổi hàm số cho dưới dạng tích về hàm số đơn giản hơn. Thông qua biến đổi đó cho phép ta thực hiện được mục đích tính toán.

2.1.3. Chuyển các hàm mũ, lũy thừa về các hàm tuyến tính và bán tuyến tính

Theo [5], kinh tế lượng là môn toán kinh tế về đo lường, định lượng các mối quan hệ kinh tế và dự báo khả năng phát triển. Việc thiết lập các mô hình toán học, hay đơn giản là xây dựng các hàm toán học diễn tả các mối quan hệ kinh tế ảnh hưởng rất lớn đến ước lượng và dự báo. Trong thực tế để diễn tả tốc độ tăng trưởng dân số, lượng cung tiền, việc làm,… các nhà kinh tế học đã sử dụng mô hình hồi quy mũ và lũy thừa, chẳng hạn như hàm sản xuất Cobb-Douglas và công thức lãi gộp[4].

Có nhiều phương pháp ước lượng nhưng thường dùng nhất là bình phương nhỏ nhất – còn gọi là phương pháp OLS (Ordinary Least Square) do nhà toán học Đức, Carl Friedrich Gauss đề xuất. Mô hình hồi quy mũ, lũy thừa cũng được ước lượng theo phương pháp này. Vậy các nhà toán học, các nhà kinh tế học đã sử dụng công cụ gì và sử dụng như thế nào để biến đổi các mô hình hồi quy mũ, lũy thừa về mô hình hồi quy tuyến tính?

Chúng tôi tìm thấy câu trả lời trong phần trình bày ở trang 64 và trang 99, tài liệu [5] như sau:

- Trong lí thuyết tiền tệ, tài chính và ngân hàng, chúng ta đã biết công thức tính lãi suất gộp: $Y_t = Y_0\left(1+r\right)^t \ \left(3.20\right)$, với r là tốc độ tăng trưởng (theo thời gian) của Y.

Lấy lôgarit tự nhiên của (3.20) ta được: $\ln Y_t = \ln Y_0 + t.\ln\left(1+r\right) \quad \left(3.21\right)$.

Nếu đặt $\beta_1 = \ln Y_0$; $\beta_2 = \ln\left(1+r\right)$ ta có thể viết (3.21) dưới dạng: $\ln Y_t = \beta_1 + \beta_2.t \quad \left(3.22\right)$

Nếu thêm yếu tố ngẫu nhiên vào (3.22), ta có: $\ln Y_t = \beta_1 + \beta_2.t + U_i \quad \left(3.23\right)$ ([5], tr.64)

- Từ phương trình (4.42)[5], rõ ràng quan hệ giữa Y với X_2 và X_3 không phải là tuyến tính. Tuy nhiên, nếu lấy Lôgarit hai vế ta được:

$$\ln Y_i = \ln\beta_1 + \beta_2\ln X_{2i} + \beta_3.\ln X_{3i} + U_i = \beta_0 + \beta_2\ln X_{2i} + \beta_3.\ln X_{3i} + U_i \quad \left(4.43\right)$$

Trong đó $\beta_0 = \ln\beta_1$, (4.43) là mô hình hồi quy tuyến tính logarit ([5], tr.99)

Từ trình bày trên ta thấy: biến đổi các hàm hồi quy mũ $Y_t = Y_0\left(1+r\right)^t$, lũy thừa $Y_i = \beta_1.X_{2i}^{\beta_2}.X_{3i}^{\beta_3}.e^{U_i}$ về các dạng $\ln Y_t = \beta_1 + \beta_2.t$ và $\ln Y_i = \beta_0 + \beta_2\ln X_{2i} + \beta_3.\ln X_{3i} + U_i$ được thực hiện nhờ tác động của logarit nêpe vào hai vế của phương trình. Dù các mô hình hồi quy (3.23) và (4.43) chưa phải là mô hình hồi quy tuyến tính, nhưng với phép đặt $Y_t^* = \ln Y_t$ ở (3.23) và đặt $Y_t^* = \ln Y_i$; $X_{2i}^* = \ln X_{2i}$; $X_{3i}^* = \ln X_{3i}$ ở (4.43) cho phép ta chuyển chúng về dạng tuyến tính. Việc chuyển như vậy tạo điều kiện cho việc ước lượng các mô hình trên có thể được thực hiện theo phương pháp OLS.

Từ đó cho thấy, logarit là một công cụ tốt để chuyển các hàm hồi quy phức tạp cho dưới dạng mũ, lũy thừa về các hàm đơn giản hơn, hàm tuyến tính hay bán tuyến tính. Thông qua biến đổi đó việc ước lượng dễ thực hiện hơn thay vì ước lượng trực tiếp trên các hàm hồi quy mũ, lũy thừa.

2.1.4. Giải phương trình mũ dạng $a^{f(x)} = b$, $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ $\left(0 < a \neq 1, b > 0\right)$

Từ thực tế cuộc sống, có nhiều sự kiện dẫn đến việc giải phương trình (PT) dạng

$a^{f(x)} = b \ (0 < a \neq 1, b > 0)$, chẳng hạn:

- Tính số năm gởi tiền N từ công thức lãi kép $C = A.(1+r)^N$ biết số tiền gởi ban đầu A, lãi suất r% mỗi năm, tổng số tiền bao gồm cả lãi lẫn vốn sau N năm.
- Tính thời gian phân rã t của các chất phóng xạ từ công thức $m = m_0 e^{-\lambda t}$ biết m_0, m là khối lượng ban đầu, khối lượng còn lại sau thời gian t của chất phóng xạ.

Ta có thể giải PT mũ $a^{f(x)} = b$, $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ bằng kĩ thuật đưa về cùng cơ số bởi biến đổi "b thành $a^{\log_a b}$" và dẫn đến kết quả $f(x) = \log_a b$ hoặc $f(x) = g(x)\log_a b$. Tuy nhiên, ta có thể giải PT bằng kĩ thuật sử dụng logarit. Dưới đây là hai ví dụ điển hình và lời giải tương ứng cho hai dạng PT mũ đã nêu:

Ví dụ 8: Giải PT $e^{5-3x} = 10$. Lời giải được đề nghị bởi tác giả James Stewart: Lấy logarit hai vế của phương trình và sử dụng (9)[6]: $\ln\left(e^{5-3x}\right) = \ln 10$ $5 - 3x = \ln 10$ $x = \frac{1}{3}(5 - \ln 10)$ ([12], tr.66)	*Bài 2.98:* Giải PT $5^{7^x} = 7^{5^x}$ ([3], tr.86) Lời giải: Lấy logarit cơ số 5 hai vế rồi chia cả hai vế cho 5^x, ta được: $\left(\frac{7}{5}\right)^x = \log_5 7 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{7}{5}} \log_5 7$ ([3], tr.118)

Từ hai ví dụ ta tổng quát được: logarit cơ số a tác động của hai vế PT $a^{f(x)} = b$, $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ và biến đổi nó thành $f(x) = \log_a b$ và $f(x) = g(x)\log_a b$. Nhờ sự tác động đó, thay vì giải trực tiếp các PT $a^{f(x)} = b$, $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ ta giải các PT $f(x) = \log_a b$, $f(x) = g(x)\log_a b$ bằng các kĩ thuật giải PT đại số thông thường. Dù chưa đưa ra nghiệm cụ thể cho PT ban đầu, nhưng logarit được xem như một phần không thể thiếu trong kĩ thuật giải PT $a^{f(x)} = b$, $a^{f(x)} = b^{g(x)}$. Qua kĩ thuật giải PT $a^{f(x)} = b$, $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, logarit nổi bật với ứng dụng giải hai loại PT đó nhưng quan trọng hơn là vai trò công cụ cho phép chuyển việc tìm nghiệm của PT có dạng mũ về tìm nghiệm của PT đơn giản hơn.

Nhận xét:

Trong Toán học, logarit được ứng dụng để tính giới hạn các dạng vô định $1^\infty, 0^0, \infty^0$; chuyển các hàm mũ, lũy thừa về các hàm tuyến tính, bán tuyến tính; tính đạo hàm các hàm số có dạng $y = f(x)^{g(x)}$, $y = f_1^{\alpha_1}(x).f_2^{\alpha_2}(x)...f_n^{\alpha_n}(x)$ và giải PT mũ dạng $a^{f(x)} = b$, $a^{f(x)} = b^{g(x)}$. Thông qua những ứng dụng đó, logarit thực sự nổi bật với vai trò công cụ cho phép chuyển việc nghiên cứu các biểu thức phức tạp có dạng tích, thương, lũy thừa về các biểu thức đơn giản hơn nhờ mối quan hệ giữa phép nhân và phép cộng. Thông qua sự tác động của logarit, các biểu thức phức tạp được chuyển về dạng đơn giản hơn và mục đích tính toán được thực hiện trên những biểu thức đơn giản đó.

2.2. Logarit – công cụ tính số các chữ số của một số nguyên dương

Trong tính toán, đôi khi ta cần phải xác định một số nguyên dương có bao nhiêu chữ số. Có nhiều cách tính số các chữ số, có thể tính bằng cách đếm từng chữ số một. Chẳng hạn với số 1357902468, bằng cách đếm ta xác định được nó có 10 chữ số. Tuy nhiên, ta không thể xác định bằng cách đếm có bao nhiêu chữ số của 2^{2013} khi viết trong hệ thập phân. Nhưng logarit cho phép làm được điều đó.

Giả sử x là một số nguyên dương cho trước cần xác định số các chữ số. Theo tính chất của số tự nhiên, ta tìm được một số tự nhiên n sao cho $10^n \le x < 10^{n+1}\ (1)$. Lấy logarit cơ số 10 hai vế của (1) ta được $n \le \log x < n+1$. Điều này chứng tỏ $n = [\log x]$. Do đó, số chữ số của số nguyên dương x là $[\log x]+1$.

Từ lập luận trên ta dễ dàng tính được số chữ số của số 2^{2013} là $\left[\log 2^{2013}\right]+1=606$. Tương tự, số nguyên tố Mersenne[7] $M_{1398269} = 2^{1398269}-1$ có $\left[\log\left(2^{1398269}-1\right)\right]+1=420921$ chữ số. Như vậy, logarit được xem như là một công cụ tốt để tính số các chữ số của một số nguyên dương bất kì.

2.3. Tỉ lệ logarit

Trong tính toán, nhiều khi ta cần phải chuyển phạm vi của một đại lượng để tiện so sánh, đối chiếu và phân tích. Có thể phóng to kích thước của một hình lớn gấp m lần hoặc thu nhỏ n lần để xem xét. Với dãy số liệu 0,01; 0,1; 10; 100; 1000; 10.000; 100.000; 1.000.000.000 nếu thực hiện giảm với tỉ lệ $\frac{1}{10}$ thì ta có dãy số nhỏ hơn 10 lần như sau: 0,001; 0,01; 1; 10; 100; 1000; 10.000; 100.000.000. Xét cho cùng ta vẫn có một dãy số phức tạp. Nếu lấy logarit thập phân các số từ dãy số liệu ban đầu đó ta có dãy số sau: -2; -1; 1, 2, 3, 4, 5, 9. Rõ ràng dãy số ban đầu đã được chuyển về dãy số dễ theo dõi và dễ kiểm soát hơn.

Thực tế cho thấy, logarit thực sự có thể chuyển các đại lượng có phạm vi rộng hoặc quá nhỏ về phạm vi có thể kiểm soát được. Điều này được minh họa bởi thang đo pH, thang độ Richter và thang đo decibel - sự thể hiện cụ thể hóa của tỉ lệ logarit. Chúng tôi sẽ phân tích cụ thể tỉ lệ logarit qua thang đo pH.

Theo tài liệu [7],*"Trong nước nguyên chất cũng như trong bất kì dung dịch nào luôn luôn có mặt các ion H^+ và OH^-"* và *"nồng độ của các ion[8] H^+ và OH^- biểu diễn được tính axit và bazơ của dung dịch"*. Tuy nhiên, nồng độ ion H^+ của dung dịch thường thay đổi trong phạm vi rất nhỏ, khó kiểm soát từ $10^{-14}\,mol/l$ cho đến $10^0\,mol/l$. Và theo [7]: *"Môi trường của dung dịch có thể biểu diễn bằng đại lượng thuận lợi hơn: đại lượng chỉ số hydro pH: $pH = -\log C_{H^+}$"* ([7], tr.119). Vậy, chỉ số hydro pH thuận lợi hơn nồng độ ion H^+ thể hiện ở chỗ nào?

Qua phân tích, chúng tôi nhận thấy một số điểm thuận lợi sau:

+ Thứ nhất, theo công thức tính pH thì pH là giá trị của hàm số $y = -\log x$, với x đại diện cho nồng độ ion H^+ và giá trị của x thuộc đoạn $\left[10^{-14};10^0\right]$. Mà ta biết: hàm số $y = -\log x$ là hàm nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ nên mỗi giá trị x thuộc đoạn $\left[10^{-14};10^0\right]$ có duy nhất một giá trị pH tương ứng thuộc đoạn $[0;14]$ và ngược lại. Từ đó cho thấy phạm vi hẹp $\left[10^{-14};10^0\right]$ của nồng độ ion H^+ đã được đưa về phạm vi dễ theo dõi hơn $[0;14]$.

+ Thứ hai, dựa vào chỉ số pH ta cũng có thể xác định được tính axit hay bazơ của dung dịch. Thay vì so sánh nồng độ ion H^+ $10^{-7} mol/l$ ta so sánh chỉ số pH với 7 $\left(-\log\left(10^{-7}\right) = 7\right)$. Theo đó, nếu dung dịch có pH = 7 thì có môi trường trung tính, dung dịch có pH > 7 thì có môi trường bazơ và dung dịch có pH<7 thì có môi trường axit.

+ Thứ ba, từ chỉ số pH hoàn toàn có thể tính lại được nồng độ ion H^+ của dung dịch theo công thức $C_{H^+} = 10^{-pH}$.

Như vậy, không chỉ được tính toán trong Toán học, logarit còn được ứng dụng để xác định chỉ số pH của dung dịch. Từ ứng dụng tính pH đó ta thấy logarit nổi bật với vai trò công cụ cho phép chuyển đại lượng có phạm vi nhỏ về phạm vi có thể kiểm soát được.

Trong khi nồng độ ion H^+ đại diện cho đại lượng có phạm vi nhỏ, hẹp thì cường độ các trận động đất, cường độ của âm thanh là những trường hợp điển hình cho đại lượng có phạm vi tương đối rộng. Chẳng hạn, độ mạnh của các trận động đất dao động trong khoảng I_0 cho đến $800,000,000I_0$ với I_0 là biên độ dao động bé hơn $1\mu m$ trên máy đo địa chấn được đo bằng địa chấn kế đặt xa cách tâm chấn 100km.

Logarit được ứng dụng để xác định độ chấn động của trận động đất và độ to nhỏ của âm thanh theo các công thức:

- Độ chấn động của các trận động đất: $M = \log\dfrac{I}{I_0}$ (đơn vị độ Richter), trong đó I_0 là biên độ dao động chuẩn, I là biên độ dao động được đo bằng địa chấn kế đặt xa cách tâm chấn 100km.
- Cường độ âm thanh: $L = 10\log\dfrac{I}{I_0}$ (đơn vị decibel), trong đó I là năng lượng truyền đi bởi sóng âm trong một đơn vị thời gian và qua một đơn vị diện tích bề mặt vuông góc với phương truyền (đơn vị đo là W/m^2); I_0 là cường độ của âm ở ngưỡng nghe $\left(I_0 = 10^{-12} W/m^2\right)$.

Logarit không chỉ đơn thuần được ứng dụng để tính độ pH, đo độ chấn động của các trận động đất, đo độ to nhỏ của âm thanh, mà qua các ứng dụng đó logarit nổi bật với vai trò công cụ chuyển các đại lượng có phạm vi quá hẹp hoặc quá rộng về phạm vi dễ kiểm soát hơn.

3. Logarit trong chương trình toán phổ thông

Chương trình (CT) toán phổ thông hiện hành đặt ra yêu cầu cần đạt đối với kĩ năng giải toán liên quan đến logarit là: "*biết vận dụng định nghĩa, các tính chất của logarit vào tính toán các biểu thức chứa logarit và giải được một số phương trình, bất phương trình mũ đơn giản bằng phương pháp logarit hóa*" ([1], tr.182-183). Định nghĩa và các tính chất của logarit chủ yếu được yêu cầu để tính các biểu thức chứa logarit và giải một số PT, bất phương trình (BPT) mũ.

Theo trình bày của sách giáo khoa (SGK) Giải tích 12 ở CT chuẩn và nâng cao: Logarit cơ số a của b ($0 < a \neq 1,\ b > 0$) được định nghĩa là số thực α thỏa $a^{\alpha} = b$. Logarit cơ số a của b còn được biết đến là nghiệm của PT $a^x = b$ (với $0 < a \neq 1, b > 0$). Các tính chất của logarit chủ yếu được vận dụng để tính giá trị hay đơn giản các biểu thức chứa logarit, chẳng hạn "*Tính* $36^{\log_6 5} + 10^{1-\log 2} - 8^{\log_2 3}$" ([6], tr.92) hay "*Đơn giản biểu thức* $\log\frac{4}{9} + \frac{1}{2}\log 36 + \frac{3}{2}\log\frac{9}{2}$"([6], tr.93). Logarit thực sự nổi bật với ứng dụng giải các PT mũ dạng $a^x = b$, $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ hay $a^{f(x)}.b^{g(x)} = c$ và các BPT mũ.

Về các ứng dụng khác của logarit, SGK Giải tích 12 CT chuẩn hiện hành không đưa thêm một ứng dụng nào khác, trong khi đó SGK Giải tích 12 nâng cao (GT12NC) có đưa vào ứng dụng tính số các chữ số của một số nguyên dương trong phần bài học và bài tập. Ngoài ra, GT12NC bổ sung một số bài đọc thêm như "*Về lịch sử phát minh logarit và bảng logarit*","*Logarit trong một số công thức đo lường*". Thông qua các bài đọc đó, GT12NC cung cấp thêm được ứng dụng "đo độ pH của dung dịch, đo độ chấn động của các trận động đất, đo độ to nhỏ của âm thanh" của logarit, vài nét cơ bản về lịch sử xuất hiện logarit, có đề cập"*Thực tế, logarit của Nêpe đã làm cuộc cách mạng trong thiên văn và trong nhiều lĩnh vực toán bằng cách thay thế việc thực hiện "phép tính nhân, chia, tính căn bậc hai, căn bậc ba của những số lớn mà bên cạnh việc tiêu phí thời gian một cách tẻ nhạt, người ta còn bị nhầm lẫn" bằng thực hiện các phép tính cộng, trừ, đơn giản những số tương ứng. Phát minh của Nêpe là một phương thức tiết kiệm thời gian*" ([6], tr.91). Tuy nhiên, không có một nhận xét hay tình huống để nhấn mạnh vai trò "công cụ cho phép đơn giản hóa các biểu thức phức tạp cho dưới dạng tích, thương, lũy thừa về các dạng đơn giản hơn" của logarit và những phân tích để chỉ ra vai trò "công cụ chuyển các đại lượng có phạm vi quá rộng hoặc quá hẹp về phạm vi có thể kiểm soát được".

Trong khi đó, giáo viên (GV) giảng dạy trên lớp chỉ bám sát CT, SGK. Nếu có mở rộng, nâng cao thì GV chủ yếu tập trung vào các bài toán giải PT mũ, hệ PT mũ trong các đề thi đại học, chẳng hạn "*Giải PT* $\log_2(8-x^2) + \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) - 2 = 0$"[9]. Còn học sinh (HS) chủ yếu học qua bài giảng của GV và tham khảo nội dung bài trong SGK.

Do vậy, có thể nói rằng HS học xong CT phổ thông biết đến logarit với các ứng dụng giải PT, BPT mũ; tính độ pH của dung dịch, đo độ chấn động của các trận động đất, đo độ to nhỏ của âm thanh và công cụ tính số chữ số của một số nguyên dương cho trước. Trong khi đó, vai trò "công cụ cho phép đơn giản hóa các biểu thức phức tạp cho dưới dạng tích, thương, lũy thừa về các dạng đơn giản hơn" và vai trò "công cụ chuyển các đại lượng có phạm vi quá rộng hoặc quá hẹp về phạm vi có thể kiểm soát được" của logarit không được biết đến.

Đáng lẽ ra, chúng ta có thể làm bật được hai vai trò ấy của logarit qua những tình huống, những phân tích từ ứng dụng "đo độ pH của dung dịch, đo độ chấn động của các trận động đất, đo độ to nhỏ của âm thanh" và tính đạo hàm của các hàm số cho dưới dạng $y=f_1^{\alpha_1}(x).f_2^{\alpha_2}(x)...f_n^{\alpha_n}(x)$ và $y=f(x)^{g(x)}$. Cho nên, SGK nhất thiết phải đưa ra những tình huống, phân tích và kết luận về những vai trò ấy của logarit để HS có thể biết vận dụng trong thực tiễn khi cần dùng đến.

4. Kết luận

Logarit ra đời xuất phát từ nhu cầu của lịch sử, nhằm mục đích đơn giản hóa các phép tính phức tạp như nhân, chia, khai căn thành các phép cộng, trừ, chia hai và chia ba. Thay vì tính theo cách thông thường logarit cho phép thực hiện nhân, chia, khai căn theo cách đơn giản hơn mà vẫn đảm bảo kết quả chính xác tương đối. Theo tiến trình phát triển của lịch sử Toán học, lí thuyết về logarit ngày càng hoàn thiện. Không chỉ đơn thuần là công cụ hỗ trợ tính nhân, chia, căn bậc hai, căn bậc ba, logarit còn được biết đến với ứng dụng giải PT, BPT mũ; tính pH của dung dịch; đo độ chấn động của các trận động đất; đo độ lớn của âm thanh; tính số các chữ số của một số nguyên dương, tính giới hạn vô định dạng 1^{∞}, $0^0, \infty^0$; tính đạo hàm của các hàm số có dạng $y=f(x)^{g(x)}$, $y=f_1^{\alpha_1}(x).f_2^{\alpha_2}(x)...f_n^{\alpha_n}(x)$;… Qua các ứng dụng đó, logarit nổi bật với vai trò công cụ tính số các chữ số của một số nguyên dương cho trước, công cụ chuyển các đại lượng có phạm vi quá rộng hoặc quá hẹp về phạm vi có thể kiểm soát được và công cụ cho phép đơn giản hóa các biểu thức phức tạp có dạng tích, thương, lũy thừa về các dạng đơn giản hơn. Tuy nhiên, chương trình toán phổ thông hiện hành đưa logarit vào thực sự chỉ làm nổi bật được ứng dụng giải BPT và PT mũ dạng $a^x=b$ hay $a^{f(x)}=b^{g(x)}$. Các vai trò công cụ của logarit chưa được quan tâm một cách thỏa đáng. Chúng tôi nhận thấy cần thiết phải bổ sung vào sách giáo khoa các bài tập, hoạt động và tình huống cho phép làm bật các vai trò trên của logarit, đặc biệt là vai trò công cụ cho phép nghiên cứu các biểu thức phức tạp thông qua các biểu thức đơn giản hơn bằng cách dựa vào quan hệ giữa phép nhân và phép cộng.

[1] John Napier là một nhà toán học, vật lí, chiêm tinh và thiên văn học người Scotland. Ông là địa chủ thứ tám của vùng Merchiston.

[2] ***Prothaphaeresis*** được ghép từ hai từ ***prosthesis*** (cộng) và ***aphaeresis*** (trừ), thay vì nhân theo cách thông thường, PP prosthaphaeresis dựa theo công thức $\cos a.\cos b=\dfrac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$.

[3] Chúng tôi ám chỉ khái niệm logarit được định nghĩa như sau:
"Cho a là số dương khác 1 và b là một số dương. Số thực α thỏa $a^{\alpha}=b$ được gọi là logarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$, tức là $\alpha=\log_a b \Leftrightarrow a^{\alpha}=b$" ([6], tr.83)

[4] Hàm sản xuất Cobb – Douglas ở dạng ngẫu nhiên $Y_i = \beta_1.X_{2i}^{\beta_2}.X_{3i}^{\beta_3}.e^{U_i}$, trong đó Y – sản lượng; X_2 - lượng lao động; X_3 – lượng vốn; U_i –sai số ngẫu nhiên.

Công thức lãi suất gộp trong lí thuyết tiền tệ, tài chính và ngân hàng: $Y_t = Y_0\left(1+r\right)^t$, trong đó r là tốc độ tăng trưởng gộp (theo thời gian) của Y.

[5] Hàm sản xuất Cobb – Douglas ở dạng ngẫu nhiên $Y_i = \beta_1.X_{2i}^{\beta_2}.X_{3i}^{\beta_3}.e^{U_i}$

[6] Các công thức (9) được đề cập trong Calculus – Concepts and Contexts – 4th Edition là:
$\ln\left(e^x\right) = x, x \in \mathbb{R}; e^{\ln x} = x, x > 0$.

[7] Số nguyên tố Mersenne là số nguyên tố có dạng $M_p = 2^p - 1$ trong đó p là một số nguyên tố, do nhà toán học Pháp M.Mersenne (1588 – 1648) đề xuất.
Số nguyên tố Mersenne M_{31} do Euler phát hiện năm 1750. Nhà toán học Pháp E.Lucas (1842 – 1891) phát hiện M_{127} phát hiện năm 1876. $M_{1398269}$ được phát hiện năm 1996.

[8] Nồng độ ion H^+ thường được kí hiệu $\left[H^+\right] hay C_{H^+}$ và nồng độ ion OH^- được kí hiệu $\left[OH^-\right] hay C_{OH^-}$.

[9]Trích đề thi tuyển sinh đại học môn toán khối D năm 2011.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Bộ Giáo dục và Đào tạo (2006), *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán,* Nxb Giáo dục.
2. Lê Thị Hoài Châu, Lê Văn Tiến, Annie Bessot và Claude Comiti (2009), *Những yếu tố cơ bản của Didactic toán*, Nxb Đại học Quốc gia TPHCM.
3. Nguyễn Huy Đoan (2007), *Bài tập giải tích 12 nâng cao*, Nxb Giáo dục Việt Nam.
4. Trần Văn Hạo (2007), *Giải tích 12*, Nxb Giáo dục Việt Nam.
5. Hoàng Ngọc Nhậm (2008), *Giáo trình Kinh tế lượng*, Nxb Lao động – Xã hội.
6. Đoàn Quỳnh (2007), *Giải tích 12 nâng cao*, Nxb Giáo dục Việt Nam.
7. Nguyễn Đình Soa (1990), *Hóa đại cương*, Nxb Trường Đại học Bách Khoa TPHCM.
8. Nguyễn Đình Trí (2009), *Bài tập toán cao cấp: Phép tính giải tích một biến số*, Nxb Giáo dục.
9. Vũ Tuấn (2007), *Bài tập giải tích 12*, Nxb Giáo dục Việt Nam.
10. Edward Wright (1618), *A Description of the Admirable Table of Logarithms*, London
11. Florian Cajori (1913), "History of the Exponential and Logarithmic Concepts", *The American Mathematical Monthly*, Vol.20, No.1, pp.5-14, published by: Mathematical Association of America.
12. James Stewart (2010), *Calculus – Concepts and contexts* – 4th Edition.
13. *http://calclab.math.tamu.edu/~belmonte*
14. *http://www.17centurymaths.comơ*

Người phản biện khoa học: ***PGS. TS. Lê Thị Hoài Châu***
(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 21-5-2013; ngày phản biện đánh giá: 12-8-2013; ngày chấp nhận đăng: 16-9-2013)