CÁC NGHIỆM KHÔNG BỊ CHẶN CỦA PHƯƠNG TRÌNH LOGISTIC VÀ DÁNG ĐIỆU TIỆM CẬN CỦA CHÚNG

NGUYỄN BÍCH HUY [*], TRẦN ĐÌNH THANH [**]

TÓM TẮT

Trong bài báo chúng tôi xét phương trình logistic chứa toán tử p-Laplace và hàm trọng $m(x) \in L^q$ với q nhỏ. Chúng tôi chứng minh sự tồn tại các nghiệm yếu lớn nhất (có thể không bị chặn) và nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của chúng.

ABSTRACT

Unbounded solutions of the logistic equation and their asymptotic behaviors

In the paper we consider the logistic equation involving the p-Laplace operator and the weight function $m(x) \in L^q$ with small q. We prove the existence of maximal weak solutions (may be unbounded) and study their asymptotic behaviors.

1. Mở đầu

Trong bài báo này, chúng tôi xét sự tồn tại và dáng điệu tiệm cận của nghiệm lớn nhất, không bị chặn của phương trình logistic sau:

$$-\Delta_p u = \lambda m(x)u^\alpha - u^\beta \text{ trong } \Omega,\ u = 0 \text{ trên } \partial\Omega, \tag{1}$$

trong đó $\Omega \subset R^N$ là miền bị chặn, có biên trơn, $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ là toán tử p_Laplace, $m(x) \in L^q(\Omega)$ với q thích hợp và $\alpha \le p-1 < \beta$.

Khi hàm $m(x)$ là hằng số và toán tử $-\Delta_p u$ được thay bằng một toán tử tuyến tính elliptic bậc 2 thì với mỗi $\lambda \ge \lambda_0$ bài toán (1) có duy nhất nghiệm trơn và dáng điệu tiệm cận của nghiệm được nghiên cứu trong [3]. Khi q đủ lớn thì (1) có duy nhất nghiệm bị chặn (thuộc $W_0^{1,2} \cap L^\infty$) và sự phụ thuộc của nghiệm vào tham số λ có thể nghiên cứu bằng phương pháp của [4]. Khi q nhỏ nghiệm của (1) có thể không bị chặn và không duy nhất, do đó việc nghiên cứu sự phụ thuộc của nghiệm theo tham số trở nên phức tạp. Trong [6] chúng tôi đã chứng minh sự tồn tại nhánh liên tục không bị chặn trong tập nghiệm của (1) khi p = 2 và q nhỏ. Trong bài này, chúng tôi sẽ nghiên cứu sự tồn tại của nghiệm lớn nhất (khi λ cố định), có thể không bị chặn và dáng điệu tiệm cận của nghiệm khi $\lambda \to 0$ hoặc $\lambda \to \infty$.

2. Các kết quả được sử dụng

[*] PGS TS, Khoa Toán – Tin học, Trường Đại học Sư phạm TP HCM
[**] TS, Trường Đại học Y Dược TP HCM

2.1. Phương trình không gian có thứ tự

Cho X là không gian Banach với thứ tự sinh bởi nón K. Ta nói ánh xạ $F: M \subset X \to X$ là tăng nếu $u, v \in M, u \leq v$ thì $F(u) \leq F(v)$.

Định lý A **[5]**

Cho X là không gian Banach với thứ tự sinh bởi nón, $M \subset X$ là tập đóng, $F: M \to M$ là ánh xạ tăng thỏa mãn các điều kiện

(i) Tập $M_0 = \{u \in M : u \leq F(u)\} \neq \phi$ và có tính chất
$\forall u, v \in M_0, \exists w \in M_0 : u \leq w, v \leq w$.

(ii) Nếu $\{u_n\} \subset M_0$ là dãy tăng thì dãy $\{F(u_n)\}$ hội tụ.

Khi đó F có điểm bất động lớn nhất trong M.

2.2. Nghiệm yếu của một lớp phương trình elliptic tựa tuyến tính

Giả sử $\Omega \subset R^N$ là miền bị chặn, có biên trơn, $\Delta_p u$ là toán tử p-Laplace với $1 < p < N$ và $f: \Omega \times R \to R$ là hàm thỏa điều kiện Caratheodory. Ta xét bài toán biên sau:

$$-\Delta_p u = f(x,u) \text{ trong } \Omega,\ u = 0 \text{ trên } \partial\Omega \tag{2}$$

Ta xét các không gian $W_0^{1,p}(\Omega), L^p(\Omega)$ thông thường, chuẩn trong chúng được ký hiệu tương ứng là $\|.\|$ và $\|.\|_p$. Đặt $p^* = \dfrac{pN}{N-p}$ và $p' = \dfrac{p}{p-1}$. Dưới đây các tích phân đều được lấy trên Ω.

Định nghĩa:

1) Ta nói hàm $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ là nghiệm yếu của (2) nếu $f(x,u) \in L^{(p^*)'}(\Omega)_*$ và

$$\int |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi = \int f(x,u)\varphi, \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{3}$$

2) Ta nói hàm $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ là một nghiệm dưới của (2) nếu $f(x,u_0) \in L^{(p^*)'}(\Omega)$,

$$\int |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \nabla \varphi \leq \int f(x,u_0)\varphi, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega), \varphi \geq 0$$

và $u_0 \leq 0$ trên $\partial\Omega$ theo nghĩa vết.

Định lý B **[2]**

Giả sử hàm $g: \Omega \times R \to R$ thỏa điều kiện Caratheodory và

(i) $g(x,0) = 0, g(x,u)$ tăng theo biến u $\quad \forall x \in \Omega$

(ii) $\forall t > 0, \exists \varphi_t \in L^1(\Omega): \sup\limits_{|u| \leq t} |g(x,u)| \leq \varphi_t(x)$.

Khi đó với mỗi $h \in W^{-1,p'}(\Omega)$ tồn tại duy nhất hàm $z \in W_0^{1,p}(\Omega)$ sao cho $g(x,z) \in L_{loc}(\Omega)$, $g(x,z).z \in L^1(\Omega)$ và

$$\int |\nabla z|^{p-2} \nabla z \nabla \varphi + \int g(x,z)\varphi = \int h\varphi \qquad (4)$$

đúng cho mọi $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ và $\varphi = z$.

Ghi chú 1:

1) Nếu hàm z nói trong định lý B thỏa thêm điều kiện $g(x,z) \in L^{(p^*)'}(\Omega)$ thì (4) cũng đúng cho mọi $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ do tập $C_0^\infty(\Omega)$ trù mật trong $W_0^{1,p}(\Omega)$. Do đó z cũng là nghiệm yếu của bài toán

$$-\Delta_p u + g(x,u) = h \text{ trên } \Omega,\ u = 0 \text{ trên } \partial\Omega.$$

2) Dưới đây, để ngắn gọn ta sẽ kí hiệu vế trái của (3) là $< Au, \varphi >$

3. Kết quả chính

Ta xét phương trình (1) với các giả thiết sau:

(H_1) $m(x) \geq 0$, $m(x) \in L^q(\Omega)$ với q > 1 thích hợp và tồn tại miền trơn $\Omega' \subseteq \Omega$, tồn tại số $m_0 > 0$ sao cho $m(x) \geq m_0 \quad \forall x \in \Omega'$

(H_2) $\alpha < \beta \leq p^* - 1$

Đầu tiên ta sẽ đưa bài toán (1) về bài toán tìm điểm bất động của một ánh xạ tăng trong không gian có thứ tự.

Do điều kiện (H_2) ta có $\dfrac{1+\beta}{\beta} > (p^*)'$, do đó nếu $z^{1+\beta} \in L^1(\Omega)$ thì $z^\beta \in L^{(p^*)'}(\Omega)$. Áp dụng định lý B và ghi chú 1 cho hàm $g(x,u) = u^\beta$ ta có với mọi $h \in L^{(p^*)'}(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega)$ tồn tại duy nhất hàm $z \in W_0^{1,p}(\Omega)$ thỏa $z \in L^{1+\beta}(\Omega)$ và

$$< Az, \varphi > + \int z^\beta \varphi = \int h\varphi \qquad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \qquad (5)$$

Gọi P là ánh xạ đặt tương ứng mỗi $h \in L^{(p^*)'}(\Omega)$ với nghiệm z của (5) thì P có các tính chất sau [4]

(a) $P(h) \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^{1+\beta}(\Omega)$, P là ánh xạ tăng.

(b) Nếu M là một tập bị chặn trong $L^{(p^*)'}(\Omega)$ thì P(M) là một tập bị chặn trong $W_0^{1,p}(\Omega)$ và do đó là tập compắc tương đối trong $L^\gamma(\Omega)$ với $\gamma < p^*$.

(c) P liên tục nếu $p \geq 2$.

Giả sử số $r \geq 1$ thỏa điều kiện

$$\frac{qr}{q\alpha+r} \geq (p^*)' \tag{6}$$

Khi đó nếu $u \in L_+^r(\Omega)$ ta có $m(x)u^\alpha \in L^t(\Omega)$ với $t = \dfrac{qr}{q\alpha+r}$

Do đó ánh xạ Nemyskii $N(\lambda,u) = \lambda m(x)u^\alpha$ tác động từ $L^r(\Omega)$ vào $L^{(p^*)'}(\Omega)$ và liên tục, biến tập bị chặn vào tập bị chặn.

Đặt $F(\lambda,u) = PoN(\lambda,u)$ thì sự tồn tại nghiệm yếu của (1) được đưa về bài toán tìm nghiệm của phương trình

$$u = F(\lambda,u) \tag{7}$$

Bổ đề 1

Giả sử (6) được thỏa mãn thì F là ánh xạ từ $[0,\infty)\times L_+^r(\Omega)$ vào $W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^{1+\beta}(\Omega)$ và

(i) F là ánh xạ tăng; nếu u_0 là nghiệm dưới của (1) thì $u_0 \leq F(\lambda,u_0)$

(ii) Nếu $p \geq 2$ và $\dfrac{qp^*}{q\alpha+p^*} > (p^*)'$ thì F là ánh xạ hoàn toàn liên tục từ $[0,\infty)\times W_0^{1,p}(\Omega)$ vào $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Chứng minh :

Tính chất (i) đã được chứng minh trong [4]. Để chứng minh (ii) ta chọn số $r < p^*$ thỏa (6). Phép nhúng $W_0^{1,p} \to L^r$ là compắc, ánh xạ $N: L^r \to L^{(p^*)'}$ liên tục và $P: L^{(p^*)'} \to W_0^{1,p}$ liên tục nếu F là ánh xạ hoàn toàn liên tục.

Bổ đề 2

Gọi λ_1 là giá trị riêng đầu và u_1 là hàm riêng tương ứng của bài toán biên

$-\Delta_p u = \lambda u^{p-1}$ trong Ω', $u_0 = 0$ trên $\partial\Omega'$.

Ta định nghĩa $u_0 = cu_1$ trong Ω', $u_0 = 0$ trong $\Omega\setminus\Omega'$ với $c > 0$ đủ nhỏ thì u_0 là nghiệm dưới của (1) trong các trường hợp sau :

1) $\alpha < p-1,\ \lambda > 0,$

2) $\alpha = p-1,\ \lambda > \dfrac{\lambda_1}{m_0}$

Chứng minh :

Trong [1] đã chứng minh rằng $-\Delta_p u_0 \leq \lambda_1 u_0^{p-1}$ theo nghĩa yếu.

Với $\varphi \in W_0^{1,p}, \varphi \geq 0$ ta có

$$< Au_0,\varphi > -\int (\lambda m(x)u_0^{\alpha} - u_0^{\beta})\varphi = < Au_0 - \lambda_1 u_0^{p-1},\varphi > -\int (\lambda m(x)u_0^{\alpha} - \lambda_1 u_0^{p-1} - u_0^{\beta})\varphi \quad (8)$$

Vì

$v := \lambda m(x) - \lambda_1 u_0^{p-1} - u_0^{\beta} \ge u_0^{\alpha}(\lambda m_0 - \lambda_1 u_0^{p-1-\alpha} - u_0^{\beta-\alpha})$ trên Ω' và u_1 bị chặn trên Ω' ta thấy nếu c nhỏ và $\alpha < p-1, \lambda > 0$ hoặc $\alpha = p-1, \lambda > \frac{\lambda_1}{m_0}$ thì $v \ge 0$. Vậy ta có vế phải của (8) là không dương và do đó u_0 là nghiệm dưới của (1)

Định lý 1

Giả sử các điều kiện (H_1), (H_2) và (H_3) sau được thỏa mãn

(H_3) $\alpha < p-1,\ q \ge \left(\frac{q^*}{1+\alpha}\right)'$

Khi đó với mỗi $\lambda > 0$ bài toán (1) có nghiệm yếu lớn nhất.

Chứng minh :

Từ điều kiện (H_3) ta thấy (6) đúng với $r = p^*$. Do đó ánh xạ F trong (7) tác động từ L^{p^*} vào chính nó và ta sẽ xét phương trình (7) trong L^{p^*}. Cố định $\lambda > 0$, ta kí hiệu $F(u)$ thay cho $F(\lambda,u)$. Theo bổ đề 1,2 ta có $u_0 \le F(u_0)$. Nếu $u_1 \le F(u_1)$, $u_2 \le F(u_2)$ thì hàm $u = \max(u_1,u_2)$ thỏa $u \le F(u)$ do F là ánh xạ tăng. Vậy điều kiện (i) của định lý A đúng. Để kiểm tra điều kiện (ii) của định lý A ta chỉ cần chứng minh tập $F(M_0)$ là bị chặn trong L^{p^*}. Lấy $u \in M_0$, đặt $v = F(u)$ và lấy v là hàm thử, ta có

$$< Av,v > + \int v^{1+\beta} = \lambda \int m(x)u^{\alpha} v \le \lambda \int m(x)v^{1+\alpha} \le \lambda \|m\|_q . \|v\|_{(1+\alpha)q'}^{1+\alpha} \quad (9)$$

Vì $q'(1+\alpha) \le p^*$ theo (H_3) nên từ (9) ta suy ra $\|v\|_{p^*}^{p} \le c\|v\|_{p^*}^{1+\alpha}$

Vậy tập $F(M_0)$ bị chặn. Định lý được chứng minh.

Định lý 2

Gọi λ_1 là số được định nghĩa trong bổ đề 2. Giả sử các điều kiện (H_1), (H_2) và (H_4) sau được thỏa mãn

(H_4) $\alpha = p-1, q \ge \left(\frac{(1+\beta)p^*}{1+\beta+(p-1)p^*}\right)'$.

Khi đó với $\lambda > \frac{\lambda_1}{m_0}$ bài toán (1) có nghiệm lớn nhất.

Chứng minh :

Với $\lambda > \frac{\lambda_1}{m_0}$ thì ánh xạ $F := F(\lambda,.)$ thỏa điều kiện (i) của định lý A. Từ điều kiện (H$_4$) ta có (6) đúng với $r = 1+\beta$ và do đó F tác động từ $L^{1+\beta}$ vào chính nó. Ta sẽ chứng minh tập $F(M_0)$ bị chặn trong $L^{1+\beta}$. Với $u \in M_0$ và $v = F(u)$ ta có từ (9) (với $\alpha = p-1$)

$$\|v\|^p + \|v\|_{1+\beta}^{1+\beta} \le c.\|v\|_{pq'}^p \tag{10}$$

Nếu $pq' \le 1+\beta$ thì từ (10) ta có $\|v\|_{1+\beta}^{1+\beta} \le c.\|v\|_{1+\beta}^p$ nên vì $\beta > \alpha = p-1$ ta suy ra tập $F(M_0)$ bị chặn.

Tiếp theo ta xét trường hợp $1+\beta < pq'$. Khi đó từ (H$_4$) ta có $q' \le \frac{p^*(1+\beta)}{1+\beta+(p-1)p^*} < \frac{p^*pq'}{pq'+(p-1)p^*}$

và từ đó ta có $pq' \le p^*$.Vì $1+\beta < pq' < p^*$ ta có

$$\|v\|_{pq'} \le c\|v\|^\theta.\|v\|1_{1+\beta}^{1-\theta} \tag{11}$$

Với $\theta \in (0,1)$ không phụ thuộc v. Từ (10), (11) ta có

$\|v\|_{pq'} \le c\|v\|_{pq'}^\gamma$ với $\gamma = \theta + (1-\theta)\frac{p}{1+\beta} < 1$.

Do đó v bị chặn trong $L^{pq'}$ và trong $L^{1+\beta}$.

Định lý 3

Giả sử các giả thiết (H$_1$), (H$_2$) và (H$_3$) sau được thỏa mãn và gọi u_λ là nghiệm lớn nhất của (1); $v_\lambda = \lambda^{1/(\alpha-p+1)}.u_\lambda$. Khi đó

1) Nếu $\beta > p-1$ thì tồn tại nghiệm v của bài toán biên

$$-\Delta_p u = m(x)u^\alpha \text{ trong } \Omega,\ u = 0 \text{ trên } \partial\Omega \tag{12}$$

sao cho $\lim_{\lambda\to 0} v_\lambda = v$ trong $W_0^{1,p}$ và hầu khắp nơi trong Ω

2) Nếu $\beta < p-1$ thì tồn tại nghiệm v của (12) sao cho $\lim_{\lambda\to\infty} v_\lambda = v$ trong $W_0^{1,p}$ và hầu khắp nơi trong Ω.

Chứng minh:

Để đơn giản kí hiệu ta đặt $t_\lambda = \lambda^{(\beta+1-p)(p-1-\alpha)^{-1}}$. Dễ dàng kiểm tra rằng v_λ là nghiệm yếu lớn nhất của bài toán

$$-\Delta_p u = m(x)u^\alpha - t_\lambda u^\beta \text{ trong } \Omega,\ u = 0 \text{ trên } \partial\Omega \tag{13}$$

hay

$$< Au, \varphi > + t_\lambda \int u^\beta \varphi = \int m(x) u^\alpha \varphi \qquad \forall \varphi \in W_0^{1,p} \tag{14}$$

1) Khi $\beta > p-1$ ta có $t_\lambda \to 0$ khi $\lambda \to 0$ và nếu $\lambda < \mu$ thì $t_\lambda < t_\mu$ và v_μ là một nghiệm dưới của (13); do vậy $v_\mu < v_\lambda$. Suy ra tồn tại $v = \lim_{x\to 0} v_\lambda$ tại mỗi điểm của Ω.

Để chứng minh khẳng định của định lý, ta chỉ cần chỉ ra v là nghiệm của (12) và với mọi dãy $\lambda_n \to 0$ thì dãy $\{v_{\lambda_n}\}$ có dãy con hội tụ trong $W_0^{1,p}$ về v.

Đặt $v_n = v_{\lambda_n}$ và cho $\varphi = v_n$ trong (14) và lí luận tương tự trong (9) ta có

$$\|v_n\|^p + t_n \|v_n\|_{1+\beta}^{1+\beta} \le c\|v_n\|_{(1+\alpha)q'}^{1+\alpha} \le c\|v_n\|_{p^*}^{1+\alpha} \le c\|v_n\|^{1+\alpha}$$

trong đó $t_n = t_{\lambda_n}$. Do đó dãy $\{v_n\}$ bị chặn trong $W_0^{1,p}$ và có dãy con mà ta vẫn kí hiệu là $\{v_n\}$ hội tụ yếu trong $W_0^{1,p}$ và hầu khắp nơi trong Ω. Hàm giới hạn phải là v. Vì $t_n \to 0, v_n \le v$ và $v^\beta, m(x)v^\alpha$ thuộc $L^{(p^*)'}$ nên từ (14) (với $u = v_n, t_\lambda = t_n$) ta có thể áp dụng định lí hội tụ bị chặn và nhận được

$$< Av, \varphi > = \int m(x) v^\alpha \varphi \qquad \forall \varphi \in W_0^{1,p} \tag{15}$$

hay v là một nghiệm của (12). Lấy $\varphi = v_n - v$ trong (14) (với $u = v_n, t_\lambda = t_n$) và trong (15) rồi trừ từng vế hai đẳng thức ta có

$$< Av_n - Av, v_n - v > = \int m(x)(v_n^\alpha - v^\alpha)(v_n - v) - t_n \int v_n^\beta (v_n - v) \tag{16}$$

Vì $v_n \le v, m(x)v^{\alpha+1} \in L^1, v^{1+\beta} \in L^1$ và áp dụng định lí hội tụ bị chặn ta suy ra rằng vế phải của (16) hội tụ về 0. Vế trái của (16) lớn hơn $\left(\|v_n\|^{p-1} - \|v\|^{p-1}\right)\left(\|v_n\| - \|v\|\right)$. Do đó $\lim \|v_n\| = \|v\|$. Vì $W_0^{1,p}$ là không gian lồi đều nên từ đây và từ $v_n \to v$ yếu ta suy ra $v_n \to v$ trong $W_0^{1,p}$.

2) Nếu $\beta < p-1$ thì ta có $\lim_{\lambda\to\infty} t_\lambda = 0$ và $t_\lambda > t_\mu$ nếu $\lambda < \mu$. Do đó ta có thể áp dụng các lí luận trên để chứng minh trường hợp này.

***Ghi chú 2**:*

Nếu $\beta = p-1$ thì $t_\lambda = 1$ và $v_\lambda = u_1 \quad \forall \lambda > 0$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Boccardo L., Orsina L. (1994), "Sublinear equations in L^s", *Houston J.Math*., (20), pp. 99-114.
2. Brezis H., Browder F. (1982), "Some properties of higher order Sobolev space", *J.Math. Pures Appl*, (61), pp. 245-259.
3. Delgado M., Suarez A. (2002), "On the structure of the positive solutions of logistic equation with nonlinear diffusion", *JMAA 268*, pp. 200-216.
4. Drabek P., Hernandez J. (2001), "Existence and uiniqueness of positive solution for some quasilinear elliptic problems", *Nonlinear Anal,* (44), pp. 189-204.
5. N. B. Huy (2002), "Positive week solutions for some semilinear elliptic equations", *Nonlinear Anal*, (48), pp. 939-945.
6. Nguyễn Bích Huy, Nguyễn Duy Thanh, Trần Đình Thanh (2007), "Tính liên tục của tập nghiệm yếu của phương trình logistic chứa tham số", *Tạp chí Khoa học ĐHSP TP HCM*, (12), tr. 76-82.