BÓNG CỦA ĐOẠN TRONG K–POSET CÁC VECTƠ BOOLE

TRẦN HUYÊN *

1. Mở đầu

Poset B các vectơ Boole là tập hợp gồm các vectơ $x = x_1x_2 \dots x_k,\ k \in \mathbb{N}$ và $x_i \in \{0, 1\}$, với thứ tự bộ phận được xác định như sau:

$$x = x_1x_2 \dots x_k \leq y_1y_2 \dots y_n = y$$

nếu $k \leq n$, đồng thời tồn tại dãy chỉ số $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ sao cho $x_1 \leq y_{i_1},\ x_2 \leq y_{i_2}, \dots, x_k \leq y_{i_k}$.

Với mỗi vectơ Boole $x = x_1x_2 \dots x_n$, ta gọi hạng của vectơ là $r(x) = n$, tức là số thành phần của vectơ. Trọng lượng của vectơ x được xác định là số

$$w(x) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

Tập tất cả các vectơ cùng hạng n được kí hiệu là $B(n)$. Kí hiệu $B(n, k)$ dành chỉ tập các vectơ cùng hạng n và cùng trọng lượng k.

Bóng thứ i của vectơ $x \in B(n)$ là $\Delta_i x \in B(n-1)$, có được từ x sau khi bỏ đi tọa độ thứ i. Vậy nếu $x = \dots x_{i-1}x_ix_{i+1}\dots$ thì $\Delta_i x = \dots x_{i-1}x_{i+1}\dots$ Bóng của vectơ x, kí hiệu là

$$\Delta x = \bigcup\{\Delta_i x | 1 \leq i \leq n\}$$

Tập các bóng thành phần thứ i của Δx còn giữ nguyên trọng lượng của x lập thành bóng đầy của vectơ x, kí hiệu là

$$\Delta_f x = \bigcup\{\Delta_i x | w(\Delta_i x) = w(x)\}$$

Các bóng thành phần có trọng lượng bé hơn trọng lượng của x, lập thành bóng khuyết

$$\Delta_d x = \bigcup\{\Delta_i x | w(\Delta_i x) < w(x)\}$$

*TS, khoa Toán – Tin học, Trường ĐHSP Tp.HCM

Hiển nhiên: $\Delta x = \Delta_f x \cup \Delta_d x$.

Bóng của tập $A \subset B$, như thông lệ được xác định bởi biểu thức:

$$\Delta A = \bigcup_{x \in A} \Delta x$$

Vào những năm 1990, Daykin.D.E và Trần Ngọc Danh đã trang bị cho poset B – các vectơ Boole một thứ tự tuyến tính $<$, gọi là thứ tự dồn như sau:

$$\begin{aligned} x = x_1x_2\ldots x_k < y_1y_2\ldots y_n = y \quad &\text{nếu} \quad k < n \\ x = x_1x_2\ldots x_n < y_1y_2\ldots y_n = y \quad &\text{nếu} \quad w(x) < w(y) \end{aligned}$$

hoặc $w(x) = w(y)$ và tồn tại chỉ số t sao cho $x_i = y_i$ khi $i < t$ đồng thời $x_t = 1 > 0 = y_t$.

Như vậy, theo thứ tự dồn: các vectơ có hạng bé hơn được sắp trước các vectơ có hạng lớn hơn; còn trong tập các vectơ cùng hạng thì các vectơ có trọng lượng bé hơn lại được xếp trước; và trong các vectơ đồng hạng và cùng trọng lượng thì vectơ x được sắp trước vectơ y nếu trong sự khác nhau đầu tiên các thành phần của 2 vectơ tại chỉ số t thì $x_t = 1 > 0 = y_t$.

Daykin.D.E và Trần Ngọc Danh đã chứng minh được rằng poset B với thứ tự dồn là một K – poset, nói riêng, bóng của một đoạn đầu (theo thứ tự dồn) trong B lại là một đoạn đầu. Kết quả này gợi ý cho chúng ta ý tưởng mở rộng nó cho một đoạn bất kỳ trong poset B, tìm kiếm các điều kiện cần và đủ để bóng của một đoạn lại là một đoạn.

2. Các kết quả chính

Trước hết, để tiện lợi cho các phát biểu và chứng minh các kết quả, ta đưa ra một vài quy ước về mặt kí hiệu. Với mỗi vectơ $x = x_1x_2\ldots x_n$, ta đặt:

$$\begin{aligned} h_1 &= \max\{i : x_i = 1\} \\ h_0 &= \max\{i : x_i = 0\} \\ l_1 &= \min\{i : x_i = 1\} \\ l_0 &= \min\{i : x_i = 0\} \end{aligned}$$

và khi đó, chúng ta có:

Mệnh đề 1. *Với mỗi vectơ Boole* $x = x_1x_2\dots x_n$*, ta có:*

a. $\max\Delta_f x = \Delta_{h_0} x$

b. $\min\Delta_f x = \Delta_{l_0} x$

c. $\max\Delta_d x = \Delta_{l_1} x$

d. $\min\Delta_d x = \Delta_{h_1} x$

Do đó: $\max\Delta x = \Delta_{h_0} x, \quad \min\Delta x = \Delta_{h_1} x$

Chứng minh.

a. Để chứng minh $\max\Delta_f x = \Delta_{h_0} x$, ta đặt

$$s = \min\{i : x_i = 0 \text{ mà không tồn tại } t \in [i; h_0] \text{ để } x_t = 1\}$$

Khi đó, với $\Delta_i x \in \Delta_f x$, có các khả năng sau:

- Hoặc $s \le i \le h_0$, hiển nhiên $\Delta_i x = \Delta_{h_0} x$.
- Hoặc $i < s$ (khi đó có quyền giả sử $x_{i+1} = 1$), thì $\Delta_i x < \Delta_{h_0} x$ vì các thành phần của $\Delta_i x$ và $\Delta_{h_0} x$ là như nhau với các chỉ số $j < i$, trong lúc đó thành phần thứ i của $\Delta_{h_0} x$ là $x_i = 0$ còn thành phần thứ i của $\Delta_i x$ là $x_{i+1} = 1$.

Vậy: $\max\Delta_f x = \Delta_{h_0} x$.

b. Đặt

$$v = \max\{i : x_i = 0 \text{ và không có } t \in [l_0; i] \text{ mà } x_t = 1\}$$

Với $\Delta_i x \in \Delta_f x$, có các khả năng xảy ra:

- Hoặc $l_0 \le i \le v$. Hiển nhiên, $\Delta_i x = \Delta_{l_0} x$.
- Hoặc $i > v + 1$ (vì rõ ràng $x_{v+1} = 1$). Khi đó, dễ thấy là: $\Delta_i x > \Delta_{l_0} x$ vì các thành phần có chỉ số bé hơn v của chúng là như nhau, trong khi đó, thành phần chỉ số v của $\Delta_i x$ là $x_v = 0$, còn thành phần chỉ số v của $\Delta_{l_0} x$ lại là $x_{v+1} = 1$.

Vậy, $\min\Delta_f x = \Delta_{l_0} x$.

c. Đặt

$$r = \max\{i : x_i = 1 \text{ và không có } t \in [l_1; i] \text{ mà } x_t = 0\}$$

Với bất kì $\Delta_i x \in \Delta_d x$, xảy ra các khả năng sau:

- Hoặc $l_1 \leq i \leq r$: Hiển nhiên $\Delta_i x = \Delta_{l_1} x$.
- Hoặc $i > r+1$ (vì rõ ràng $x_{r+1} = 0$ thì $\Delta_i x < \Delta_{l_1} x$, vì các thành phần có chỉ số bé hơn r của chúng là như nhau, còn thành phần chỉ số r của $\Delta_{l_1} x$ là $x_{r+1} = 0$ trong lúc đó thành phần thứ r của $\Delta_i x$ là $x_r = 1$.

Vậy, $\max \Delta_d x = \Delta_{l_1} x$.

d. Đặt

$$p = \min\{i : x_i = 1 \text{ và không có } t \in [i; h_1] \text{ mà } x_t = 0\}$$

Với $\Delta_i x \in \Delta_d x$, có các khả năng xảy ra:

- Hoặc $p \leq i \leq h_1$. Hiển nhiên $\Delta_i x = \Delta_{h_1} x$.
- Hoặc $i < p$ (và có quyền giả sử $x_{i+1} = 0$). Khi đó, $\Delta_i x > \Delta_{h_1} x$, bởi các thành phần có chỉ số trước i của $\Delta_i x$ và $\Delta_{h_1} x$ là như nhau, trong khi đó thành phần thứ i của $\Delta_i x$ là $x_{i+1} = 0$, còn thành phần thứ i của $\Delta_{h_1} x$ là $x_i = 1$.

Vậy, $\min \Delta_d x = \Delta_{h_1} x$.

□

Mệnh đề 2. *Trong poset B với thứ tự dồn, cho $x < y$. Khi đó*

a. $\min \Delta x \leq \min \Delta y$.

b. $\max \Delta x \leq \max \Delta y$.

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh cho trường hợp $x, y \in B(n,k)$ (các trường hợp còn lại, kết quả là hiển nhiên!). Thật vậy, nếu $x = x_1 \ldots x_t \ldots x_n < y_1 \ldots y_t \ldots y_n = y$, thì tồn tại chỉ số t mà $x_i = y_i$ khi $i < t$, còn $x_t = 1 > 0 = y_t$.

a. Có hai khả năng xảy ra sau cho $\min \Delta x$:

- Hoặc $\min \Delta x = \min \Delta_d x = \Delta_t x$, tức $t = h_1(x)$. Vì các thành phần của vectơ x với chỉ số lớn hơn t của y bằng 1. Vì vậy: $\min \Delta y = \Delta_t x = \min \Delta x$.
- Hoặc $\min \Delta x = \Delta_{h_1} x$ với $h_1(x) > t$, thì rõ ràng $\min \Delta_d x < \min \Delta_d y$ vì hai vectơ này có các thành phần với chỉ số bé hơn t là như nhau, còn tại chỉ số t thì $x_t = 1 > 0 = y_t$. Vậy, trong mọi trường hợp:

$$\min \Delta x \leq \min \Delta y.$$

b. Có hai khả năng sau xảy ra cho $\max \Delta y$:

- Hoặc $\max \Delta y = \max \Delta_f y = \Delta_t y$, tức $t = h_0(y)$. Do các thành phần của vectơ y với chỉ số lớn hơn t đều bằng 1 và $w(x) = w(y)$ nên chỉ đúng một thành phần với chỉ số lớn hơn t của x bằng 0. Vì vậy:

$$\max \Delta x = \max \Delta_f x = \Delta_t y = \max \Delta y.$$

- Hoặc $\max \Delta y = \Delta_{h_1} y$ với $h_1(y) > t$. Do $w(x) = w(y)$ và sự khác nhau đầu tiên các thành phần của x và y xảy ra tại chỉ số t với $x_t = 1 > 0 = y_t$, ắt tồn tại chỉ số $i > t$ mà $x_i = 0$. Do vậy, $\max \Delta_f x = \Delta_q x$ với $q > t$. Vì cả $h_1(y)$ và q đều lớn hơn t nên $\Delta_{h_1} y$ và $\Delta_q x$ giữ nguyên các thành phần của y và x với các chỉ số không vượt quá t. Do đó, $\max \Delta_y = \Delta_{h_1} y > \Delta_q x = \max \Delta_x$.

$\square$

Từ mệnh đề 2, tức khắc suy ra kết quả:

Hệ quả 1. *Trong poset B các vectơ Boole theo thứ tự dồn, nếu $x < y$ thì $\Delta[x, y] \subset [\min \Delta x; \max \Delta y]$.*

Vấn đề quan tâm của chúng ta ở đây là, với những điều kiện nào cho x, y, sẽ có được bao hàm thức ngược trong hệ quả 1. Trước hết, ta hãy xem xét trường hợp lí thú nhất của bài toán trên, khi các vectơ $x, y \in B(n, k)$. Bởi $\Delta[x; y] = \Delta_d[x; y] \cup \Delta_f[x; y]$ với $\Delta_d[x; y] \subset B(n-1, k-1)$ còn $\Delta_f[x; y] \subset B(n-1, k)$ nên muốn $\Delta[x; y]$ là đoạn trong $B(n-1)$ thì buộc $\Delta_d[x; y]$ phải chứa phần tử lớn nhất của $B(n-1, k-1)$, còn $\Delta_f[x; y]$ phải chứa phần tử bé nhất của $B(n-1, k)$. Những đòi hỏi này, buộc đoạn $[x; y]$ phải có chứa các vectơ $a = v.z$ và $b = m.u$ trong đó

$v \in B(k+1, k)$; $z \in B(n-k-1, 0)$; $m \in B(n-k+1, 1)$ và $u \in B(k-1, k-1)$.

Sự phân tích này dẫn đến chúng ta có kết quả quan trọng sau:

Định lí 1. *Trong $B(n, k)$ cho $x < y$. Bóng $\Delta[x; y]$ là đoạn trong $B(n-1)$ khi và chỉ khi $x = v.z$ và $y = m.u$, trong đó $v \in B(k+1, k)$ và $m \in B(n-k+1, 1)$.*

Chứng minh. Theo sự phân tích trên, điều kiện cho x, y nói trong định lí hiển nhiên là cần.

Do hệ quả của mệnh đề 2, để kết thúc chứng minh định lí, ta chỉ cần chứng minh bóng khuyết $\Delta_d[x, y]$ và bóng đầy $\Delta_f[x, y]$ đều là các đoạn.

- Để chứng minh $\Delta_d[x, y]$ là đoạn, ta chỉ cần chứng tỏ với bất kì $z = z_1z_2 \dots z_{n-1} > \min \Delta_d x$, luôn tồn tại vectơ $a \in [x, y]$ sao cho $z \in \Delta_d a$.
  So sánh các chỉ số của thành phần 0 đầu tiên của z và $\min \Delta_d x$, có hai khả năng sau xảy ra:
  - Hoặc $l_0(z) = l_0(\min \Delta_d x) \geq l_0(y)$. Khi đó, $z = u0c$ với u là vectơ với các thành phần đều là 1. Chọn $a = u01c$ thì dễ dàng kiểm tra $x \leq a \leq y$ và $z = u0c \in \Delta a$.
  - Hoặc $l_0(z) < l_0(\min \Delta_d x)$. Khi đó, chọn $a = 1z$ thì hiển nhiên $a \leq y$. Đồng thời $l_0(a) = l_0(z) + 1 \leq l_0(x)$ và do cấu trúc thành phần của x mà $x \leq a$.

  Vậy, trong mọi khả năng: $z \in \Delta_d[x, y]$.
- Để chứng minh $\Delta_f[x, y]$ là đoạn, ta chỉ ra rằng với bất kì $z = z_1z_2 \dots z_{n-1} < \max \Delta_f y$, luôn tồn tại $a \in [x, y]$ mà $z \in \Delta_f a$.
  So sánh các chỉ số của thành phần 1 đầu tiên của z và $\max \Delta_f y$, có hai khả năng xảy ra sau:
  - Hoặc $l_1(z) = l_1(\max \Delta_f y) = t$. Gọi chỉ số của thành phần 0 đầu tiên của x là $l_0(x) = j$. Nếu $j > t$, chọn $a = a_1 \dots a_{j-1}a_ja_{j+1} \dots a_n$ với $a_i = z_i$ khi $i < j$, $a_j = 0$, $a_i = z_{i-1}$ khi $i > j$. Nếu $j \leq t$, chọn $a = a_1 \dots a_ta_{t+1}a_{t+2} \dots a_n$ với $a_i = z_i$, khi $i \leq t$; $a_{t+1} = 0$ và $a_i = z_{i-1}$ khi $i > t + 1$. Dựa vào cấu trúc thành phần của x, y, có thể kiểm tra dễ dàng trong cả hai trường hợp trên $x \leq a \leq y$ và hiển nhiên $z \in \Delta a$.
  - Hoặc $l_1(z) < l_1(\max \Delta_f y)$. Đặt $l = l_1(z)$ và chọn $a = a_1 \dots a_{l-1}a_l$ $a_{l+1} \dots a_n$ với $a_i = z_i$ khi $i < l$, $a_l = 0$ và $a_i = z_{i-1}$ khi $i > l$. Dễ dàng kiểm tra để thấy rằng $x \leq a \leq y$ và $z \in \Delta a$.

  Vậy, trong mọi khả năng: $z \in \Delta_f[x; y]$.

□

Nhận xét: Trong chứng minh định lí trên, chúng ta đã không xét đến trường hợp đặc biệt khi x là phần tử bé nhất, hay y là phần tử lớn nhất trong $B(n, k)$. Điều đó được khắc phục bởi các kết quả mạnh hơn sau đây:

Mệnh đề 3. *Trong $B(n,k)$ cho a là phần tử bé nhất và b là phần tử lớn nhất. Khi đó, với bất kì $x \in B(n,k)$, ta luôn có:*

a. $\Delta_f[a;x]$ *là đoạn trong* $B(n-1,k)$.

b. $\Delta_d[x,b]$ *là đoạn trong* $B(n-1,k-1)$.

Chúng tôi dành cho độc giả tự chứng minh các kết quả này và sử dụng chúng cho viện chứng minh định lí sau:

Định lí 2. *Trong poset B các vectơ Boole theo thứ tự dồn, cho $x < y$. Khi đó, bóng $\Delta[x,y]$ là một đoạn nếu xảy ra các trường hợp sau:*

a. $r(x) < r(y)$.

b. $r(x) = r(y)$ *và* $w(y) - w(x) \leq 2$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Anderson, I. (1989), *Combinatorics of finite sets*, Clarendon Press, Oxford.

[2] Kruskal, J.B (1963), *The number of simplices in a complex*, Math. Optimization techniques. University of California Press, Berkeley.

[3] Daykin, D.E (1996), *To find all siutable orders of 0,1 vectors*, Congressus Asian Bulletin of Mathematics.

[4] Tran Ngoc Danh (1997), *Sets of 0,1 vectors with minimal sets of subvectors*, Rostock Math; Kollog.

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi xem xét về bóng của một đoạn trong poset B các vectơ Boole theo theo thứ tự dồn và đưa ra một vài điều kiện cần và đủ để bóng của một đoạn trong poset B lại là một đoạn.

Abstract

The shadow of a segment in poset B of 0,1 vectors

In this paper, we look for shadow of a segment in poset B of 0,1 vectors, in which were defined squashed order, and prove some necessary and sufficient conditions for that the shadow of a segment is a segment.