

## THỰC NGHIỆM TRONG TOÁN HỌC VÀ QUAN ĐIỂM “THỰC NGHIỆM” TRONG GIẢNG DẠY TOÁN

**Trần Anh Dũng\***

Nội dung đề cập trong bài này bắt nguồn từ những quan niệm khác nhau trong cộng đồng các nhà khoa học và các nhà giáo dục về thực nghiệm trong toán học và về giảng dạy các khoa học được gọi là “thực nghiệm”.

Toán học được quan niệm là một khoa học thực nghiệm dựa trên bốn khía cạnh: phương pháp toán học; ứng dụng của toán học; phương pháp dạy học (PPDH) toán học; đặc trưng phát triển nội tại của toán học.

Trong phạm vi bài báo này chúng tôi không có ý định trình bày những quan điểm nói trên, mà chỉ đề cập đến xu hướng thực nghiệm trong lịch sử và trong hoạt động dạy học toán hiện nay. Đồng thời trả lời câu hỏi: có hay không quan điểm “thực nghiệm” trong chương trình và sách giáo khoa Toán bậc phổ thông trung học ở Việt Nam hiện nay?

### 1. Thực nghiệm trong toán học

Theo truyền thống, toán học luôn được quan niệm là một khoa học suy diễn, và vì vậy trong toán học không có chỗ đứng của thực nghiệm, thí nghiệm như trong những ngành khoa học khác (vật lí, hóa học...).

Tuy nhiên, trong lịch sử phát triển của toán học, các nhà toán học đã dùng “thực nghiệm” để kiểm nghiệm, tính toán những số liệu mà họ dự đoán trong điều kiện chỉ có công cụ tính tay thô sơ. Điển hình nhất là những thực nghiệm trong lịch sử khi các nhà toán học tính gần đúng số  $\pi$ .

Newton thú nhận rằng ông đã sử dụng rất nhiều hình vẽ để tính gần đúng số  $\pi$  đến 15 chữ số thập phân khi ông sử dụng kết quả  $\pi = \int_0^{1/4} \sqrt{x-x^2} dx$  để đưa ra giá trị

gần đúng của  $\pi$  là : 
$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24 \left( \frac{1}{3 \times 8} - \frac{1}{5 \times 32} + \frac{1}{7 \times 128} - \dots \right)$$

---

\* ThS, Trường THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai

Nhiều “thực nghiệm” khác đã được sử dụng để tính toán giá trị gần đúng của  $\pi$  trước và sau Newton. Những tính toán này đòi hỏi nhiều công sức và thời gian.

Gauss cũng được xem là một nhà toán học thực nghiệm. Có lần Gauss đã thú nhận về một kết quả ông phát hiện được: “Tôi đã tìm được kết quả nhưng tôi không biết làm thế nào để có được nó”. Chẳng hạn, năm 1790 khi khảo sát bản gốc tích phân đã cho bởi James Stirling ông đã phát hiện ra bài toán ngược của tích phân

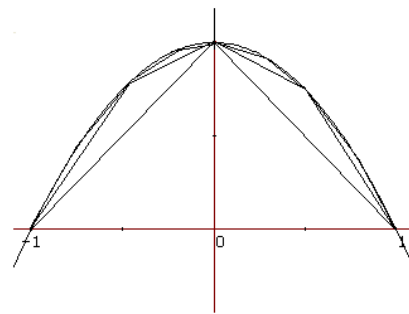
$\frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ . Dựa vào các tính toán tay, Gauss phỏng đoán rằng giá trị của tích phân đó bằng với giới hạn của các dãy  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  cho bởi :

$$a_0 = 1; b_0 = \sqrt{2}; a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ và } b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Kết quả này được ghi chú trong một cuốn nhật kí của ông. Mãi đến thế kỉ XIX, kết quả đó mới được chứng minh khi lí thuyết tích phân các hàm elliptic ra đời.

Thực ra, nghiên cứu kỹ thuật mà Archimedes sử dụng trong phương pháp “vét kiệt” khi tính diện tích miền giới hạn bởi parabol và đường thẳng vuông góc với trục của nó, chúng ta có thể cho rằng tư tưởng “thực nghiệm” trong toán học đã xuất hiện từ thời cổ đại. Để dễ thấy hơn kỹ thuật mà Archimedes đã sử dụng, chúng ta giải thích lại cách làm của Archimedes theo phương pháp tọa độ hiện nay.

Nếu (P) là parabol có phương trình  $y = 1 - x^2$ , Archimedes tính diện tích giới hạn bởi (P) và trục Ox bằng cách “lấp kín” hình này bằng những tam giác. Archimedes bắt đầu từ tam giác cân mà các đỉnh là  $(\pm 1; 0)$  và  $(0; 1)$ , tam giác đó có diện tích là 1. Ông ta thêm vào hai tam giác mà đỉnh là  $(\pm \frac{1}{2}; \frac{3}{4})$ , phần diện tích tăng



thêm là  $\frac{1}{4}$ . Tiếp tục ông thêm vào 4 tam giác với các đỉnh mới là  $(\pm 1/4; 15/16)$  và  $(\pm 3/4; 7/16)$  thì diện tích tăng thêm là  $1/16$ ... cứ thế với mỗi tam giác có sẵn ông lại thêm hai tam giác mới. Archimedes quan sát thấy diện tích càng ngày càng gần với  $4/3$  vì:

$$1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}$$

$$1 + \frac{1}{4} = \frac{4}{3} - \frac{1}{4.3}$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{4}{3} - \frac{1}{16.3}$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} = \frac{4}{3} - \frac{1}{64.3} \dots$$

Bằng các lập luận có lí, Archimedes đi đến kết luận diện tích cần tính là  $4/3$ . Kết quả mà Archimedes có được là một điển hình về sự kết hợp khéo léo giữa thực nghiệm và suy luận trong nghiên cứu toán học.

Kỉ nguyên của máy tính điện tử đã làm một cuộc cách mạng trong hoạt động toán học thực nghiệm. Máy tính đầu tiên ENIAC được sử dụng lần đầu vào năm XIX49 đã tính 2037 chữ số thập phân của  $\pi$  trong 70 giờ. Thời gian này càng được rút ngắn với những máy tính thế hệ sau.

Mặc dù hầu hết những lí thuyết, nguyên lí, định lí quan trọng của toán học đều có mặt trước kỉ nguyên của công nghệ thông tin (CNTT) nhưng sự phát triển của CNTT đến lượt nó lại tạo điều kiện thuận lợi cho hoạt động nghiên cứu toán học và giảng dạy toán học có một công cụ mới, gắn toán học và giảng dạy toán học với hoạt động thực nghiệm. Xu hướng này vẫn chưa có mặt ở chương trình giảng dạy toán bậc ĐH ở nước ta mặc dù đã phát triển ở nhiều nước tiên tiến hơn một thập kỉ qua.

## 2. Quan điểm thực nghiệm trong dạy học toán

Trong những năm gần đây, thực nghiệm đã trở thành một xu hướng phát triển quan trọng trong nghiên cứu và giảng dạy toán học. Mặc dù thực nghiệm không thể thay thế vai trò của suy luận, chứng minh nhưng nó làm tăng vai trò của toán học với thực tiễn, đồng thời tạo điều kiện thuận lợi cho việc đổi mới PPDH toán theo hướng tích cực, phù hợp hơn với khoa học luận.

Trong nhiều nước phát triển, giáo trình “Toán học thực nghiệm” đã được giảng dạy từ những năm 90. Theo giáo sư Shangzhi Li thuộc trường ĐH Khoa học và Công Nghệ Trung Quốc (University of Science and Technology of China) thì ở

Trung Quốc giáo trình “Toán học thực nghiệm” được giảng dạy đầu tiên tại trường ĐH này và đến nay nhiều trường ĐH và CĐ ở Trung Quốc đang giảng dạy nó. Tại ĐH Princeton (Hoa Kỳ), có hẳn một phòng thực hành “thực nghiệm trong toán học” để sinh viên có điều kiện hoạt động toán học theo định hướng thực nghiệm.

Thực nghiệm trong dạy học toán học là gì ? Theo GS Shangzhi Li, đây là một hướng mới trong giảng dạy toán học ở bậc ĐH, dựa trên các yếu tố sau:

a. *Thực nghiệm toán học làm tăng tính khám phá, tìm tòi trong hoạt động toán học.* Trong các giáo trình lí thuyết toán, các vấn đề đều rõ ràng, hoàn hảo, không mâu thuẫn hay chệch hướng. Điều này không đúng với qui trình nhận thức toán học trong lịch sử hay nói cách khác là không như khoa học luận lịch sử phát triển của toán học. Thực nghiệm toán học tạo điều kiện để sinh viên khám phá, trải nghiệm về một thế giới chưa biết. Qua thực nghiệm toán học, họ có điều kiện quan sát, phỏng đoán và kiểm nghiệm các phỏng đoán đó.

b. *Thực nghiệm toán học là một qui trình làm tăng tính sáng tạo, phát minh cho sinh viên.* Bắt đầu từ giải quyết một bài toán, một vấn đề và đi đến tổng quát hóa vấn đề.

c. *Thực nghiệm toán học được thiết kế thuận lợi nhờ sự phát triển của công nghệ thông tin và những phần mềm toán học hỗ trợ.* Nhờ ứng dụng CNTT, thực nghiệm toán học có thể được tổ chức, thiết kế trong một phạm vi khá rộng của toán học: giải tích, hình học, số học, xác suất, hình học fractal....

Trong “Toán học bằng thực nghiệm” (Mathematics by Experiments), các tác giả đã nêu rõ thực nghiệm toán học là “phương pháp hoạt động toán học sử dụng các tính toán để:

- a. Thu thập được các thông tin ngầm ẩn từ trực quan.
- b. Nghiên cứu các mối liên hệ.
- c. Sử dụng CNTT để dự đoán các nguyên lí, định lí toán học.
- d. Thử nghiệm và kiểm tra các phỏng đoán.
- e. Nghiên cứu một số trường hợp cụ thể và cách chứng minh kết quả.
- f. Đề xuất một cách chứng minh.
- g. Thay thế các tính toán tay bằng công cụ máy tính.

h. Hợp thức hóa kết quả.

### 3. Quan điểm thực nghiệm trong chương trình và sách giáo khoa toán bậc trung học cơ sở ở nước ta

Đối với bậc trung học phổ thông (THPT), qua nghiên cứu chương trình chính lí hợp nhất năm 2000 và các sách giáo khoa toán ứng với chương trình đó, chúng tôi thấy quan điểm thực nghiệm không tồn tại. Đối với bậc trung học cơ sở (THCS), mặc dù vai trò của “trực giác” được xem là có vị trí quan trọng nhưng dường như quan điểm thực nghiệm cũng vắng mặt. SGK cũng nhấn mạnh đến phương diện suy luận :

*“Hình học lớp 7 có nhiệm vụ rèn luyện cho học sinh kỹ năng suy luận diễn dịch”* (Sách giáo viên, trang 3).

*“Khi luyện tập, ngoài các yêu cầu về kiến thức khoa học, giáo viên phải hết sức chú ý rèn luyện cách trình bày, cách lập, cách chứng minh một bài toán hình học, nhất là ở giai đoạn đầu”* (Phân phối chương trình toán THCS, 2000, trang 26).

Trong chương trình và SGK, các hoạt động đặc trưng của thực nghiệm như quan sát, dự đoán nói riêng và quan điểm thực nghiệm nói chung không được nêu lên một cách rõ ràng, thuật ngữ “thực nghiệm” chưa bao giờ xuất hiện. Tuy nhiên, hoạt động thực nghiệm có khả năng đã được vận dụng trong thực tế giảng dạy toán học. Trong “Đổi mới PPDH toán ở trường THCS”, PGS Phạm Gia Đức đã đề nghị nên dùng kiểu hoạt động này trong dạy học. Theo tác giả, “dạy học các khái niệm ban đầu về hình học phẳng (lớp 6) nhất thiết phải thông qua các thao tác vật chất (đo đạc, tính toán, thực nghiệm)...”

PPDH Toán nhìn chung trong giai đoạn trước khi triển khai chương trình hiện hành còn nặng về kinh viện. Theo GS. Nguyễn Bá Kim (2006) trong “*PPDH môn Toán*”, PPDH toán ở nước ta hiện nay còn những nhược điểm: 1. Giáo viên thuyết trình tràn lan, 2. Tri thức được truyền thụ dưới dạng có sẵn, ít yếu tố tìm tòi, phát hiện, 3. Giáo viên áp đặt, học sinh thụ động, 4. Thiên về dạy, yếu về học, thiếu hoạt động tự giác, tích cực và sáng tạo của HS, 5. Không kiểm soát được việc học.

Theo một nghiên cứu của PGS.TS Lê Văn Tiến (2002) về chương trình và SGK bậc THCS và THPT cùng thời kì năm 2000, *quan điểm thực nghiệm trong chương trình và SGK chỉ được vận dụng chủ yếu ở lớp 7 và một phần nhỏ ở lớp 8. Đặc biệt nó hoàn toàn vắng mặt trong chương trình toán THPT.*

#### 4. Có hay không quan điểm thực nghiệm trong SGK Toán THPT hiện hành?

Theo GS. Nguyễn Cảnh Toàn, “*Toán học không chấp nhận chứng minh bằng thực nghiệm nhưng khuyến khích tìm tòi bằng thực nghiệm, rồi chứng minh bằng suy diễn*”. Để tìm kiếm những dấu hiệu thể hiện quan điểm biện chứng đó, chúng tôi đã nghiên cứu SGK bậc THPT hiện hành và những nguyên tắc chủ đạo trong việc đổi mới chương trình môn Toán của Bộ GD&ĐT.

Nguyên tắc chủ đạo của việc xây dựng chương trình và SGK mới là: “*Tăng tính thực tiễn và tính sư phạm, giảm nhẹ yêu cầu quá chặt về mặt lí thuyết*”. Nguyên tắc đó được cụ thể hóa thành những nguyên tắc cơ bản khi biên soạn SGK:

- Nội dung SGK phải bảo đảm tính khoa học, cơ bản, tinh giản, thiết thực và cập nhật, giảm bớt tính hàn lâm, kinh viện, phù hợp với sự phát triển của khoa học - công nghệ, kinh tế - xã hội.

- Kết hợp cả hai cách tiếp cận trực quan và suy diễn trong việc trình bày kiến thức.

- Góp phần đổi mới PPDH.

- Giúp học sinh chuyển từ học tập thụ động sang chủ động.

Điểm đổi mới rõ nét của SGK hiện hành so với chương trình chính lí hợp nhất là sự xuất hiện của các *hoạt động*. Các *hoạt động* được đưa vào SGK nhằm đạt được việc kết hợp hai cách tiếp cận trực quan và suy diễn, tăng tính chủ động của học sinh trong học tập.

Chẳng hạn hoạt động H1 (§3; mục 1., chương 4, Giới hạn, Đại số và Giải tích 11, 2007) nhằm mục đích từ tiếp cận hình học sang tiếp cận số học của định nghĩa hàm số liên tục tại một điểm. Cụ thể, H1 được thiết kế gồm các bước :

• Ghi nhận đồ thị các hàm số  $y = x^2$  và  $y = \begin{cases} 2x - 1 & x \geq 1 \\ 2 & x < 1 \end{cases}$

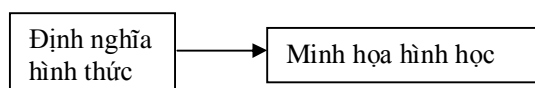
• Tính giá trị mỗi hàm số tại  $x = 1$  và so sánh với giới hạn (nếu có) của hàm số khi  $x \rightarrow 1$ .

• Nhận xét về đồ thị của mỗi hàm số tại  $x = 1$ .

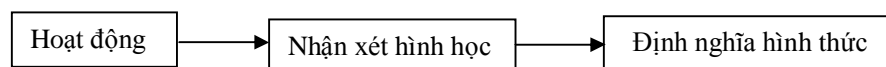
Cách tiếp cận khái niệm cụ thể đó đã thay đổi so với trước đây trong SGK thuộc chương trình chỉnh lí hợp nhất năm 2000. Cách tiếp cận của SGK năm 2000 mang tính áp đặt và vì vậy đặt học sinh vào tình huống học tập thụ động.

Có thể sơ đồ hóa để so sánh cách tiếp cận khái niệm này ở hai thời kì :

• SGK 2000:



• SGK 2007:



Tuy chưa thể nói rằng ví dụ nêu trên là một ví dụ điển hình khẳng định sự tồn tại của quan điểm “thực nghiệm” trong SGK THPT hiện hành, song tư tưởng “thực nghiệm” dường như đã được các nhà sư phạm thể hiện qua một số *hoạt động* được lồng trong các bài học.

Tuy nhiên, nghiên cứu SGK bậc THPT hiện hành chúng tôi ghi nhận những khiếm khuyết sau :

1. Các *hoạt động* được lồng ghép trong bài học ở SGK rất hạn chế trong việc đạt được những mục tiêu thể hiện bởi những nguyên tắc cụ thể nêu trên, đặc biệt là định hướng “giúp học sinh chuyển từ học tập thụ động sang chủ động”.

2. Sự tồn tại quá hiếm hoi của tư tưởng “thực nghiệm”, đặc biệt là sự vắng mặt của các chỉ dẫn, gợi ý cho giáo viên trong sách giáo viên về việc ứng dụng CNTT để tổ chức hoạt động *thực nghiệm* ngay cả với những chủ đề rất phù hợp với việc ứng dụng CNTT như: định lí giá trị trung gian, giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất, tích phân...

**5. Kết luận và đề xuất**

Trong thập niên gần đây, xu hướng toán học thực nghiệm đã xuất hiện ở nhiều nước. Đặc biệt, với sự phát triển nhanh chóng của CNTT theo hướng ứng dụng, cùng với quá trình đổi mới giáo dục trung học mà trọng tâm là đổi mới PPDH nhằm tích cực hóa quá trình học tập của học sinh thì thực nghiệm càng có điều kiện thuận lợi để giữ một vai trò quan trọng trong dạy học toán học. Nước ta cũng không nằm

ngoài xu thế phát triển đó, bằng chứng là các yếu tố thực nghiệm ít nhiều đã xuất hiện trong SGK toán phân ban hiện hành.

Tuy nhiên, để phát huy hết những ưu thế của thực nghiệm và khắc phục những khiếm khuyết của nó cần có những nghiên cứu sâu về đặc trưng của khoa học thực nghiệm nói chung và của hoạt động thực nghiệm trong toán học nói riêng. Từ đó, có những nghiên cứu ứng dụng đưa hoạt động thực nghiệm vào dạy học toán ở trường phổ thông một cách hệ thống, có cơ sở khoa học và cơ sở thực tiễn. Đồng thời, với tư cách là nơi đào tạo giáo viên, các trường sư phạm cũng cần nghiên cứu đưa vào chương trình đào tạo nội dung chuyên biệt về thực nghiệm trong toán học.

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. David Bressoud (2007), *A Radical Approach to Real Analysis*, The Mathematical Association of America.
- [2]. Jonathan Borwein, David Bailey (2003), *Mathematics by Experiment*, A K Peters.
- [3]. Shangzhi Li, Falai Chen, Yaohua Wu, Yanhua Zhang (2003), *Mathematics Experiments*, World Scientific Publishing Pte Ltd.
- [4]. Trần Văn Hạo (tổng chủ biên) (2007), *Đại số và giải tích 11*, NXB Giáo dục.
- [5]. Trần Văn Hạo (tổng chủ biên) (2007), *Đại số và giải tích 11*, Sách giáo viên, NXB Giáo dục.
- [6]. Lê Đức Phúc (2002), *Mối quan hệ giữa lý luận và thực tiễn trong nghiên cứu giáo dục*, Tạp chí giáo dục, số 28.
- [7]. Lê Thị Hoài Châu (2006), *Đổi mới chương trình - nội dung và phương pháp dạy học toán*, ĐHSP TPHCM.
- [8]. Lê Văn Tiến (2002), *Chương trình và sách giáo khoa Toán đang thí điểm hiện nay ở trường THPT, nhìn từ quan điểm “thực nghiệm” trong toán học*, Tạp chí khoa học, trường ĐHSP TPHCM.



- [9]. Nguyễn Bá Kim (2006), *Phương pháp dạy học môn Toán*, NXB Giáo dục.

### **Tóm tắt**

#### **Thực nghiệm trong Toán học và quan điểm “thực nghiệm” trong giảng dạy toán học**

Bài báo này bàn đến sự tồn tại của nghiên cứu thực nghiệm trong lịch sử toán học, xu hướng nhấn mạnh nghiên cứu thực nghiệm trong chương trình toán đại học của một số nước trên thế giới và vị trí mờ nhạt của nó trong chương trình, sách giáo khoa toán THCS và THPT Việt Nam. Từ đó, trình bày một vài đề xuất liên quan đến thực nghiệm trong dạy học toán học.

### **Abstract**

#### **Experiment in mathematics and the viewpoint on experiment in mathematics teaching**

This article is about the existence of experimental methodology in the history of mathematics, the trend of emphasizing the importance of this method in mathematics in universities of some countries in the world and its blurry role in mathematical curricular and textbooks for junior and senior high schools in Vietnam. Thereby, some suggestions about experiment in mathematics teaching are made.