

THUẬT TOÁN GIẢI BÀI TOÁN CÂN BẰNG GIẢ ĐƠN ĐIỀU MẠNH TRÊN ĐA TẬP HADAMARD

Nguyễn Thị Thu¹

TÓM TẮT

Trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu sự hội tụ của phương pháp chiếu giải bài toán cân bằng giả đơn điều mạnh trên đa tập Hadamard. Với các giả thiết phù hợp, chúng tôi chứng minh rằng, các dãy sinh bởi phương pháp chiếu hội tụ tới nghiệm duy nhất của bài toán cân bằng giả đơn điều mạnh trên đa tập Hadamard.

Từ khóa: Bài toán cân bằng, đa tập Hadamard, song hàm giả đơn điều mạnh, phương pháp chiếu.

DOI: <https://doi.org/10.70117/hdujs.74.03.2025.656>

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Bài toán cân bằng (EP), được giới thiệu bởi Blum và Oettli ([1]), là một mô hình toán học tổng quát, bao gồm các bài toán tối ưu, bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán điểm yên ngựa, bài toán điểm bất động, và bài toán cân bằng Nash trong trò chơi phi hợp tác và một số bài toán khác (xem trong [1], [2], [3] và các tài liệu tham khảo được trích dẫn trong các tài liệu đó). Do có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực như kinh tế, giao thông, xử lý ảnh... bài toán cân bằng đã thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học. Hai vấn đề quan trọng trong bài toán cân bằng là sự tồn tại của nghiệm và các phương pháp lặp để tìm ra nghiệm. Có nhiều nghiên cứu về sự tồn tại nghiệm và các phương pháp giải cho bài toán cân bằng (xem trong [1], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12] và các tài liệu tham khảo liên quan).

Trong những năm gần đây, nhiều khái niệm và kết quả từ giải tích phi tuyến và lý thuyết tối ưu đã được mở rộng từ không gian Euclide sang đa tập Riemann (chẳng hạn như các bài báo [13], [14], [15]). Những mở rộng này đã mang lại nhiều lợi ích quan trọng. Ví dụ, với việc chọn một Riemann metric phù hợp, các bài toán có ràng buộc có thể được chuyển thành các bài toán không ràng buộc, các bài toán tối ưu không lồi có thể được biến thành các bài toán lồi trên đa tập Riemann và các song hàm không đơn điệu có thể được chuyển thành song hàm đơn điệu. Colao và cộng sự ([16]) là những người đầu tiên nghiên cứu bài toán cân bằng trên đa tập. Trong bài báo này, các tác giả đã chứng minh sự tồn tại của nghiệm cho các bài toán cân bằng trên đa tập Hadamard. Các tác giả cũng đã chứng minh sự hội tụ của phép lặp Picard cho các ánh xạ không giãn trên đa tập Hadamard và sử dụng điều này để đề xuất một thuật toán xấp xỉ nghiệm của bài toán cân bằng. Các kết quả trong [16] đã được Wang và cộng sự ([17]) cải tiến và mở rộng cho các đa tập Riemann tổng quát bằng một cách tiếp cận mới. Để tìm hiểu thêm về các kết quả tồn tại nghiệm cho các bài toán cân bằng, độc giả có thể tham khảo, (ví dụ, [18], [19], [20], [21], [22] và các tài liệu tham khảo liên quan). Một số phương pháp giải cho các bài toán cân

¹ Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức; Email: nguyenthithutn@hdu.edu.vn

bằng trên đa tạp cũng đã được phát triển. Cruz Neto và cộng sự ([23]) đã trình bày thuật toán đạo hàm tăng cường để giải các bài toán cân bằng trên các đa tạp Hadamard trong trường hợp song hàm cân bằng không nhất thiết phải giả đơn điệu. Các thuật toán kiểu đạo hàm tăng cường cho các bài toán cân bằng (giả đơn điệu mạnh) trên đa tạp Hadamard đã được thảo luận trong [18], [24], [25], [26]. Những kết quả khác liên quan đến các phương pháp giải cho các bài toán cân bằng trên đa tạp có thể được tìm thấy trong [27], [28], [19] và các tài liệu tham khảo liên quan. Lưu ý rằng các bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh trong không gian tuyến tính đã được nghiên cứu trong nhiều công trình và vẫn thu hút sự chú ý của nhiều nhà nghiên cứu (xem, ví dụ, [4], [5], [9], [6], [7], [8], [11], [12] và các tài liệu tham khảo liên quan). Tuy nhiên, có rất ít bài báo nghiên cứu về các bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh trên đa tạp. Do đó, tiếp tục mở rộng các kết quả đã có cho bài toán cân bằng, đặc biệt là bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh, từ các không gian tuyến tính sang đa tạp là việc làm cần thiết và có ý nghĩa. Lưu ý rằng, nhiều kết quả và kỹ thuật quan trọng trong các không gian tuyến tính không còn đúng khi làm việc trên các đa tạp. Chẳng hạn, tính chất $\langle v, x - y \rangle = \langle v, x - z \rangle + \langle v, z - y \rangle$ đúng với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ và thường được sử dụng khi nghiên cứu các thuật toán giải bài toán cân bằng trong không gian Euclide nhưng đẳng thức tương tự không đúng trong đa tạp. Vì vậy, ta cần những kỹ thuật mới khi làm việc với bài toán cân bằng trên đa tạp.

Mục tiêu của bài báo này là nghiên cứu sự hội tụ của phương pháp chiếu giải bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh trên đa tạp Hadamard dưới các điều kiện khác nhau của bước đi. Các kết quả này mở rộng các kết quả tương ứng trong [6] từ không gian tuyến tính sang đa tạp Hadamard. Bài báo này đóng góp thêm nghiên cứu về các bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh trên đa tạp Hadamard.

2. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Trong phần này chúng tôi giới thiệu một số khái niệm cơ bản về hình học Riemann. Nội dung của phần này được tham khảo từ các tài liệu [29], [30], [31].

Cho $\mathcal{M}$ là đa tạp trơn, liên thông, hữu hạn chiều. Ký hiệu $T_x\mathcal{M}$ là không gian tiếp xúc của $\mathcal{M}$ tại $x \in \mathcal{M}$ và $T\mathcal{M} = \bigcup_{x \in \mathcal{M}} T_x\mathcal{M}$ là bó tiếp xúc của $\mathcal{M}$. Nếu $\mathcal{M}$ được trang bị một mêtric Riemann, khi đó $\mathcal{M}$ là đa tạp Riemann. Tích vô hướng trên $T_x\mathcal{M}$ được ký hiệu là $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ với chuẩn tương ứng là $\|\cdot\|_x$. Trong trường hợp không có sự nhầm lẫn, ta sẽ bỏ chỉ số x .

Độ dài của đường cong trơn từng khúc $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ nối hai điểm x với y trong $\mathcal{M}$ (tức là, $x = \gamma(a)$ và $y = \gamma(b)$), được xác định bởi $L(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$, trong đó $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}\mathcal{M}$ là véc tơ tiếp xúc tại $\gamma(t)$ của $\mathcal{M}$.

Khoảng cách từ một điểm $p \in \mathcal{M}$ tới một tập con $S \subset \mathcal{M}$ được định nghĩa bởi $d(p, S) := \inf\{d(p, q) : q \in S\}$.

Một ánh xạ $V: \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$ được gọi là một trường véc tơ nếu $V(x) \in T_x\mathcal{M}$ với mọi $x \in \mathcal{M}$.

Khoảng cách Riemann $d(x, y)$ giữa hai điểm x và y là độ dài nhỏ nhất của tất cả các đường cong nối chúng. Khoảng cách này tạo ra tôpô metric trên đa tạp $\mathcal{M}$. Với $p \in \mathcal{M}$ và $r > 0$, ta định nghĩa hình cầu metric mở $B(p, r)$ và hình cầu metric đóng $\bar{B}(p, r)$ tại p với bán kính r lần lượt là:
 $B(p, r) = \{q \in \mathcal{M} : d(p, q) < r\}$, $\bar{B}(p, r) = \{q \in \mathcal{M} : d(p, q) \leq r\}$,

Ký hiệu $\text{int}\mathcal{C}$ là phần trong của tập $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$ với tôpô sinh ra bởi khoảng cách d . Khoảng cách từ một điểm $p \in \mathcal{M}$ đến một tập con $\mathcal{C}$ của $\mathcal{M}$ được định nghĩa là:

$$d(p, \mathcal{C}) := \inf\{d(p, q) : q \in \mathcal{C}\}.$$

Giả sử ∇ là liên thông Levi-Civita liên kết với metric Riemann. Một trường véc tơ V được gọi là song song dọc theo một đường cong trơn γ nếu $\nabla_{\gamma'(t)} V = 0$, ở đây 0 véc tơ tiếp tuyến không. Nếu trường véc tơ γ' là song song dọc γ , tức là, $\nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t) = 0$, thì ta nói rằng đường cong γ là một đường trắc địa. Một đường trắc địa γ nối hai điểm x với y được gọi là trắc địa tối thiểu nếu độ dài của nó bằng $d(x, y)$ và trong trường hợp này, đường trắc địa γ được gọi là đường trắc địa cực tiểu.

Một đa tạp Hadamard là một đa tạp Riemann đầy đủ, liên thông đơn, với độ cong mặt cắt không dương.

Từ giờ trở đi, chúng tôi sẽ giả sử rằng $\mathcal{M}$ là một đa tạp Hadamard m -chiều.

Ánh xạ mũ $\exp_x : T_x \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ tại điểm $x \in \mathcal{M}$ xác định bởi $\exp_x v := \gamma_v(1, x)$ với mỗi $v \in T_x \mathcal{M}$, trong đó $\gamma(\cdot) := \gamma_v(\cdot, x)$ là đường trắc địa xuất phát từ x với vận tốc v , tức là, $\gamma(0) = x$ và $\gamma'(0) = v$. Chú ý rằng, với mỗi $x \in \mathcal{M}$, ánh xạ mũ $\exp_x : T_x \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ là một vi phôi, do đó ánh xạ ngược $\exp_x^{-1} : \mathcal{M} \rightarrow T_x \mathcal{M}$ tồn tại. Hơn nữa, ta có $d(x, y) = \|\exp_x^{-1} y\|$ với $x, y \in \mathcal{M}$ bất kỳ.

Định nghĩa 2.1 ([31]) Một tập con $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$ được gọi là lồi (theo nghĩa trắc địa) nếu với mọi cặp điểm x và y trong $\mathcal{K}$, đường trắc địa nối x với y nằm hoàn toàn trong $\mathcal{K}$. Cụ thể, nếu $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ là một đường trắc địa thỏa mãn $\gamma(a) = x$ và $\gamma(b) = y$, thì $\gamma(ta + (1-t)b) \in \mathcal{K}$ với mọi $t \in [0, 1]$.

Định nghĩa 2.2 ([31]) Giả sử $\mathcal{C}$ là một tập lồi khác rỗng của $\mathcal{M}$. Một hàm $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là lồi (theo nghĩa trắc địa) nếu với mọi đường trắc địa $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{C}$ hàm hợp $f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm lồi.

Giả sử $\mathcal{C}$ là một tập lồi, khác rỗng của $\mathcal{M}$ và $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm lồi. Dưới vi phân của f tại một điểm $x \in \mathcal{C}$ được định nghĩa bởi

$$\partial f(x) := \{v \in T_x \mathcal{M} : f(y) - f(x) \geq \langle v, \exp_x^{-1} y \rangle, \forall y \in \mathcal{C}\}.$$

Nón pháp tuyến của $\mathcal{C}$ tại một điểm $x \in \mathcal{C}$ được định nghĩa bởi

$$N_{\mathcal{C}}(x) = \{v \in T_x \mathcal{M} : \langle v, \exp_x^{-1} y \rangle \leq 0 \text{ với mọi } y \in \mathcal{C}\}.$$

Để phục vụ cho các chứng minh, chúng ta cần đến kết quả sau.

Mệnh đề 2.3. ([32]). Giả sử $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm nửa liên tục dưới và $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$ là một tập lồi khác rỗng sao cho f là một hàm lồi trên một tập mở chứa $\mathcal{C}$. Khi đó, x^* là một điểm cực tiểu của bài toán $\min\{f(x) : x \in \mathcal{C}\}$ khi và chỉ khi

$$0 \in \partial f(x^*) + N_{\mathcal{C}}(x^*).$$

Giả sử $\mathcal{X}$ là một tập con lồi đóng, khác rỗng của $\mathcal{M}$ và $f : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ là một song hàm thỏa mãn $f(x, x) = 0$ với mọi $x \in \mathcal{X}$. Bài toán cân bằng trên đa tạp Riemannian (viết tắt là EP) được phát biểu như sau: Tìm $x^* \in \mathcal{X}$ sao cho

$$f(x^*, y) \geq 0 \text{ với mọi } y \in \mathcal{X}. \quad (2.1)$$

Trong trường hợp này, song hàm f được gọi là song hàm cân bằng. Ta ký hiệu $\mathcal{X}^*$ là tập nghiệm của bài toán cân bằng (2.1).

Bài toán cân bằng trên đa tạp lần đầu tiên được giới thiệu trong [16], ở đây tác giả đã chỉ ra một số bài toán quan trọng, có mô hình của bài toán cân bằng (2.1). Đặc biệt, nếu $f(x, y) = \langle V(x), \exp_x^{-1} y \rangle$ với mọi $x, y \in \mathcal{X}$, trong đó V là trường vec tơ trên đa tạp Hadamard $\mathcal{M}$, thì bài toán cân bằng (EP) trở thành bài toán bất đẳng thức biến phân trên đa tạp Hadamard, lần đầu tiên được giới thiệu bởi Németh ([34]). Về sự tồn tại của nghiệm cho các bài toán cân bằng trên đa tạp dưới các giả thiết khác nhau, bạn đọc có thể tham khảo trong [17], [18], [19], [20], [21], [22]. Một số thuật toán giải các bài toán cân bằng trên đa tạp có thể được tìm thấy trong [18], [23], [24], [25], [27], [28] và các tài liệu tham khảo liên quan.

Tiếp theo, ta nhắc lại một số khái niệm về song hàm cân bằng.

Định nghĩa 2.4. Cho $f : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ là một song hàm và $\mathcal{X}$ là một tập con lồi đóng, khác rỗng của $\mathcal{M}$. Song hàm f được gọi là μ -giả đơn điệu mạnh trên $\mathcal{X}$ nếu tồn tại một hằng số dương μ sao cho với mọi $x, y \in \mathcal{X}$, ta có

$$f(x, y) \geq 0 \Rightarrow f(y, x) \leq -\mu d^2(x, y).$$

Định nghĩa 2.5. Cho $f : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ là một song hàm và $\mathcal{X}$ là một tập con khác rỗng của $\mathcal{M}$. Song hàm f được gọi là thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz với hằng số L_1 và L_2 trên $\mathcal{X}$ nếu tồn tại các hằng số $L_1, L_2 > 0$ sao cho với mọi $x, y, z \in \mathcal{X}$, ta có:

$$f(x, y) + f(y, z) \geq f(x, z) - L_1 d^2(x, y) - L_2 d^2(y, z) \quad (2.2)$$

Nhận xét 2.1. Điều kiện kiểu Lipschitz (2.2) được giới thiệu bởi Mastroeni ([34]). Trong bài báo này, chúng tôi xét các giả thiết sau đối với song hàm f :

Giả thiết (A):

- (A1) Với mỗi $x \in \mathcal{X}$, hàm số $y \mapsto f(x, y)$ là hàm lồi trên $\mathcal{X}$.
- (A2) Với mỗi $x \in \mathcal{X}$, hàm số $y \mapsto f(x, y)$ là hàm nửa liên tục dưới trên $\mathcal{X}$.
- (A3) Với mỗi $y \in \mathcal{X}$, hàm số $x \mapsto f(x, y)$ là hàm nửa liên tục trên trên $\mathcal{X}$.
- (A4) Với mỗi $x \in \mathcal{X}$, hàm số $y \mapsto f(x, y)$ là hàm lồi trên một tập mở chứa $\mathcal{X}$.

Sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh được nghiên cứu trong [32].

Định lý 2.1 ([33]). Giả sử các điều kiện (A1)-(A3) thỏa mãn. Khi đó, nếu f là song hàm giả đơn điệu mạnh thì bài toán cân bằng (2.1) có nghiệm duy nhất.

3. PHƯƠNG PHÁP CHIỀU GIẢI BÀI TOÁN CÂN BẰNG GIẢ ĐƠN ĐIỆU MẠNH

Trong phần này chúng tôi xét sự hội tụ của phương pháp chiều giải bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh trên đa tạp Hadamard. Các kết quả trình bày trong phần mở rộng các kết quả trong [6] từ không gian tuyến tính sang đa tạp.

Xét ánh xạ $s_\lambda : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ được định nghĩa bởi

$$s_\lambda(x) = \operatorname{argmin} \left\{ \lambda f(x, y) + \frac{1}{2} d^2(x, y) : y \in \mathcal{X} \right\} \text{ với mọi } x \in \mathcal{X},$$

trong đó λ là một số thực dương.

Ta sẽ giả sử rằng **Giả thiết (A)** được thỏa mãn. Với giả thiết này, hàm $f_\lambda : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ với $\lambda > 0$, được xác định bởi

$$f_\lambda(y) := \lambda f(x, y) + \frac{1}{2} d^2(x, y)$$

là một hàm lồi mạnh trên $\mathcal{X}$. Do đó, ánh xạ s_λ hoàn toàn xác định và là một ánh xạ đơn trị trên $\mathcal{X}$ ([31]). Lưu ý rằng với mọi $\lambda > 0$, x là một nghiệm của bài toán cân bằng (2.1) khi và chỉ khi $x = s_\lambda(x)$ (xem [24, Remark 5]).

Mệnh đề 3.1. Giả sử rằng song hàm $f : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ là giả đơn điệu mạnh với mô đun β và thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz (2.2) với các hằng số L_1, L_2 trên $\mathcal{X}$. Khi đó, dưới **Giả thiết (A)**, với mọi điểm khởi đầu $x_0 \in \mathcal{X}$, dãy $\{x_k\}_{k \geq 0}$ xác định bởi

$$x_{k+1} := \operatorname{argmin} \left\{ \rho f(x_k, y) + \frac{1}{2} d^2(x_k, y) : y \in \mathcal{X} \right\} \quad (3.1)$$

thỏa mãn bất đẳng thức

$$[1 + 2\rho(\beta - L_2)]d^2(x_{k+1}, x^*) \leq d^2(x_k, x^*) \quad (3.2)$$

với điều kiện $0 < \rho \leq \frac{1}{2L_1}$, trong đó x^* là nghiệm duy nhất của bài toán cân bằng (EP).

Chứng minh. Vì x_{k+1} là điểm cực tiểu của bài toán $\min \left\{ \rho f(x_k, y) + \frac{1}{2} d^2(x_k, y) : y \in \mathcal{X} \right\}$ nên theo điều kiện tối ưu cho hàm lồi (Mệnh đề 2.3), ta có

$$0 \in \partial[\rho f(x_k, \cdot) + \frac{1}{2} d^2(x_k, \cdot)](x_{k+1}) + N_{\mathcal{X}}(x_{k+1}).$$

Hay $0 \in \rho \partial_2 f(x_k, x_{k+1}) - \exp_{x_{k+1}}^{-1} x_k + N_{\mathcal{X}}(x_{k+1})$.

Vậy tồn tại $v_k \in N_{\mathcal{X}}(x^{k+1})$ sao cho $-\rho v_k + \exp_{x_{k+1}}^{-1} x_k \in N_{\mathcal{X}}(x_{k+1})$. Suy ra
 $\langle -\rho v_k + \exp_{x_{k+1}}^{-1} x_k, \exp_{x_{k+1}}^{-1} y \rangle \leq 0, \forall y \in \mathcal{X}$.

(Điều này suy trực tiếp từ định nghĩa nón pháp tuyến). Ta có

$$\langle \exp_{x_{k+1}}^{-1} x_k, \exp_{x_{k+1}}^{-1} y \rangle \leq \rho \langle v_k, \exp_{x_{k+1}}^{-1} y \rangle, \forall y \in \mathcal{X}. \quad (3.3)$$

Mặt khác, vì $v_k \in N_{\mathcal{X}}(x^{k+1})$ nên

$$\langle v_k, \exp_{x_{k+1}}^{-1} y \rangle \leq f(x_k, y) - f(x_k, x_{k+1}), \forall y \in \mathcal{X}. \quad (3.4)$$

Kết hợp (3.4) với (3.3) ta có

$$\langle \exp_{x_{k+1}}^{-1} x_k, \exp_{x_{k+1}}^{-1} y \rangle \leq \rho [f(x_k, y) - f(x_k, x_{k+1})], \forall y \in \mathcal{X}. \quad (3.5)$$

Thay $y := x^*$ vào (3.5) ta có

$$\langle \exp_{x_{k+1}}^{-1} x_k, \exp_{x_{k+1}}^{-1} x^* \rangle \leq \rho [f(x_k, x^*) - f(x_k, x_{k+1})]. \quad (3.6)$$

Vì x^* là nghiệm duy nhất của bài toán cân bằng (EP), ta có $f(x^*, x_{k+1}) \geq 0$. Từ tính chất giả đơn điệu mạnh của f ta có

$$f(x_{k+1}, x^*) \leq -\beta d^2(x_{k+1}, x^*). \quad (3.7)$$

Áp dụng điều kiện liên tục kiểu Lipschitz (2.5) với $x := x_k$, $y := y_{k+1}$ và $z := x^*$, ta thu được $f(x_k, x_{k+1}) + f(x_{k+1}, x^*) \geq f(x_k, x^*) - L_1 d^2(x_k, x_{k+1}) - L_2 d^2(x_{k+1}, x^*)$.

Suy ra

$$f(x_k, x^*) - f(x_k, x_{k+1}) \leq f(x_{k+1}, x^*) + L_1 d^2(x_k, x_{k+1}) + L_2 d^2(x_{k+1}, x^*). \quad (3.8)$$

Kết hợp (3.8) với (3.7) ta có

$$f(x_k, x^*) - f(x_k, x_{k+1}) \leq -\beta d^2(x_{k+1}, x^*) + L_1 d^2(x_k, x_{k+1}) + L_2 d^2(x_{k+1}, x^*).$$

Suy ra

$$f(x_k, x^*) - f(x_k, x_{k+1}) \leq -(\beta - L_2) d^2(x_{k+1}, x^*) + L_1 d^2(x_k, x_{k+1}). \quad (3.9)$$

Kết hợp (3.9) với (3.6) ta có

$$\langle \exp_{x_{k+1}}^{-1} x_k, \exp_{x_{k+1}}^{-1} x^* \rangle \leq -\rho(\beta - L_2) d^2(x_{k+1}, x^*) + \rho L_1 d^2(x_k, x_{k+1}). \quad (3.10)$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức so sánh của tam giác trắc địa (2.3), ta có

$$\langle \exp_{x_{k+1}}^{-1} x_k, \exp_{x_{k+1}}^{-1} x^* \rangle \geq \frac{1}{2} [d^2(x_k, x_{k+1}) + d^2(x_{k+1}, x^*) - d^2(x_k, x^*)]. \quad (3.11)$$

Kết hợp (3.11) với (3.10) ta có

$$\frac{1}{2} [d^2(x_k, x_{k+1}) + d^2(x_{k+1}, x^*) - d^2(x_k, x^*)] \leq -\rho(\beta - L_2) d^2(x_{k+1}, x^*) + \rho L_1 d^2(x_k, x_{k+1}).$$

Suy ra $[1 + 2\rho(\beta - L_2)]d^2(x_{k+1}, x^*) \leq d^2(x_k, x^*) + (2\rho L_1 - 1)d^2(x_{k+1}, x_k)$.

Từ điều kiện $0 < \rho \leq \frac{1}{2L_1}$ ta có $2\rho L_1 - 1 \leq 0$. Vậy:

$$[1 + 2\rho(\beta - L_2)]d^2(x_{k+1}, x^*) \leq d^2(x_k, x^*).$$

Mệnh đề được chứng minh.

Dựa vào Mệnh đề 3.1 ta có thể phát triển thuật toán hội tụ tuyến tính cho bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz (2.5). Nhắc lại rằng một dãy $\{z^k\}$ hội tụ tuyến tính đến z^* nếu tồn tại một số $t \in (0, 1)$ và chỉ số k_0 thỏa mãn $d(z^{k+1}, z^*) \leq td(z^k, z^*)$ với mọi $k \geq k_0$. Một điểm $x \in \mathcal{X}$ là ε -nghiệm của bài toán cân bằng nếu $d(x_k, x^*) \leq \varepsilon$, trong đó x^* là một nghiệm chính xác của bài toán cân bằng.

Thuật toán 3.1. *Khởi tạo:* Chọn sai số $\varepsilon \geq 0$ và $0 < \rho \leq \frac{1}{2L_1}$.

Bắt đầu với điểm khởi tạo $x_0 \in \mathcal{X}$ và $k = 0$.

Bước 1: Giải bài toán tối ưu lồi mạnh

$$\min \left\{ \rho f(x_k, y) + \frac{1}{2} d^2(x_k, y) : y \in \mathcal{X} \right\}. \quad (3.12)$$

để tìm nghiệm duy nhất x_{k+1} .

Bước 2: Kiểm tra điều kiện: $\frac{\alpha}{1 - \alpha} d(x_{k+1}, x_k) \leq \varepsilon$ với $\alpha := \frac{1}{\sqrt{1 + 2\rho(\beta - L_2)}}$. Nếu

điều kiện thỏa mãn thì dừng lại và x_{k+1} là một ε -nghiệm của bài toán cân bằng (EP).

Ngược lại, ta thay $k \leftarrow k + 1$ và quay lại **Bước 1**.

Kết quả về sự hội tụ được trình bày sau đây là một hệ quả trực tiếp của Mệnh đề 3.1.

Định lý 3.1. Giả sử rằng $L_2 < \beta$ và $0 < \rho \leq \frac{1}{2L_1}$. Khi đó dãy $\{x_k\}$ sinh ra bởi

Thuật toán 3.1 hội tụ tuyến tính tới nghiệm duy nhất x^* của bài toán cân bằng (EP) và thỏa mãn:

$$d(x_{k+1}, x^*) \leq \frac{\alpha^{k+1}}{1 - \alpha} d(x_1, x_0), \forall k \geq 0 \quad (3.13)$$

trong đó $\alpha := \frac{1}{\sqrt{1 + 2\rho(\beta - L_2)}} \in (0, 1)$.

Chứng minh. Do $L_2 < \beta$ và $\rho > 0$ nên $1 + 2\rho(\beta - L_2) > 1$. Suy ra

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\rho(\beta - L_2)}} \in (0, 1).$$

Từ kết quả của Mệnh đề 3.1, ta có:

$$\begin{aligned} [1 + 2\rho(\beta - L_2)]d^2(x_{k+1}, x^*) &\leq d^2(x_k, x^*), \forall k \geq 0 \\ \Leftrightarrow d^2(x_{k+1}, x^*) &\leq \frac{1}{1 + 2\rho(\beta - L_2)} d^2(x_k, x^*), \forall k \geq 0 \\ \Leftrightarrow d(x_{k+1}, x^*) &\leq \frac{1}{\sqrt{1 + 2\rho(\beta - L_2)}} d(x_k, x^*), \forall k \geq 0 \\ \Leftrightarrow d(x_{k+1}, x^*) &\leq \alpha d(x_k, x^*), \forall k \geq 0 \end{aligned}$$

Vậy $\{x_k\}$ sinh ra bởi Thuật toán 3.1 hội tụ tuyến tính tới nghiệm duy nhất x^* của bài toán cân bằng (EP).

Tiếp theo, ta có: $d(x_{k+1}, x^*) \leq \alpha d(x_k, x^*) \leq \dots \leq \alpha^{k+1} d(x_0, x^*)$.

Mặt khác: $d(x_k, x^*) \leq d(x_k, x_{k+1}) + d(x_{k+1}, x^*) \leq d(x_k, x_{k+1}) + \alpha d(x_k, x^*)$, $\forall k \geq 0$.

Suy ra $d(x_k, x^*) \leq \frac{1}{1 - \alpha} d(x_k, x_{k+1})$, $\forall k \geq 0$.

Ta có: $d(x_0, x^*) \leq \frac{1}{1 - \alpha} d(x_0, x_1)$.

Vậy: $d(x_{k+1}, x^*) \leq \alpha^{k+1} d(x_0, x^*) \leq \frac{\alpha^{k+1}}{1 - \alpha} d(x_0, x_1)$.

Định lý được chứng minh.

Thuật toán 3.1 có một nhược điểm là để xác định tham số ρ , ta cần biết trước các hằng số Lipschitz. Thuật toán 3.2 dưới đây không yêu cầu phải biết trước các hằng số Lipschitz.

Thuật toán 3.2. *Khởi tạo:* Chọn sai số $\varepsilon \geq 0$ và một dãy các số dương $\{\rho_k\}_{k \geq 0} \subset (0, \infty)$ thỏa mãn

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k = \infty, \text{ và } \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = 0 \quad (3.14)$$

Lấy $x_0 \in \mathcal{X}$ và $k = 0$.

Bước 1: Giải bài toán lồi mạnh

$$\min \left\{ \rho_k f(x_k, y) + \frac{1}{2} d^2(x_k, y) : y \in \mathcal{X} \right\}. \quad (3.15)$$

để tìm nghiệm duy nhất x_{k+1} .

Bước 2: Nếu $d(x_{k+1}, x_k) \leq \varepsilon$ thì dừng lại và x_{k+1} là một ε -nghiệm của bài toán cân bằng (EP).

Ngược lại, ta thay k bởi $k + 1$ và quay lại **Bước 1**.

Định lý 3.2 Giả sử rằng $f : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ là song hàm β – giả đơn điệu mạnh trên $\mathcal{X}$ với mô đun β và thỏa mãn điều kiện kiểu Lipschitz (2.5) với các hằng số L_1, L_2 trên $\mathcal{X}$, $L_2 < \beta$. Gọi $\{x_k\}$ là dãy sinh bởi Thuật toán 3.2 và x^* là nghiệm duy nhất của bài toán cân bằng (EP). Khi đó, với **Giả thiết A**, tồn tại chỉ số $k_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $k > k_0$, ta có

$$d(x_{k+1}, x^*) \leq \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=k_0}^k [1 + 2\rho_i(\beta - L_2)]}} d(x_{k_0}, x^*). \quad (3.16)$$

Hơn nữa,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=k_0}^k [1 + 2\rho_i(\beta - L_2)]}} = 0 \quad (3.17)$$

do đó, dãy $\{x_k\}$ hội tụ mạnh tới nghiệm x^* của bài toán cân bằng (EP).

Chứng minh. Lập luận tương tự như trong chứng minh trên, với mỗi k ta có

$$[1 + 2\rho_k(\beta - L_2)]d^2(x_{k+1}, x^*) \leq d^2(x_k, x^*) - (1 - 2\rho_k L_1)d^2(x_k, x_{k+1})$$

Vì $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = 0$ nên tồn tại $k_0 \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $1 - 2\rho_k L_1 > 0, \forall k \geq k_0$. Do đó, ta có:

$$[1 + 2\rho_k(\beta - L_2)]d^2(x_{k+1}, x^*) \leq d^2(x_k, x^*) \forall k \geq k_0.$$

$$\text{Suy ra: } d(x_{k+1}, x^*) \leq \frac{1}{\sqrt{1 + 2\rho_k(\beta - L_2)}} d(x_k, x^*) \forall k \geq k_0.$$

$$\text{Vậy: } d(x_{k+1}, x^*) \leq \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=k_0}^k [1 + 2\rho_i(\beta - L_2)]}} d(x_{k_0}, x^*).$$

Để chứng minh (3.17), ta đặt $\alpha_k := 2\rho_k(\beta - L_2) > 0$, khi đó

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} \alpha_k = 2(\beta - L_2) \sum_{k=k_0}^{\infty} \rho_k = \infty$$

$$\text{suy ra } \frac{1}{\prod_{i=k_0}^k (1 + \alpha_i)} \leq \frac{1}{1 + \sum_{i=k_0}^k \alpha_i} \rightarrow 0, \text{ khi } k \rightarrow \infty.$$

Từ (3.16), ta thấy $x_k \rightarrow x^*$ khi $k \rightarrow \infty$. Ta có điều phải chứng minh.

4. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, chúng tôi đã đạt được một số kết quả mới cho các bài toán cân bằng giả đơn điệu mạnh (viết tắt là SPEP) trên các đa tạp Hadamard. Chúng tôi chứng

minh được rằng các dãy sinh bởi phương pháp chiếu hội với bước nhảy phù hợp hội tụ đến nghiệm duy nhất của SPEP. Các kết quả này mở rộng các kết quả tương tự từ không gian tuyến tính sang đa tạp Hadamard.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] E. Blum, W. Oettli (1994), *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*, Math. Student 62(1), 127-169.
- [2] G. Bigi, M. Castellani, M. Pappalardo, M. Passacantando (2019), *Nonlinear Programming Techniques for Equilibria*, Springer, Berlin.
- [3] I. Konnov (2007), *Equilibrium Models and Variational Inequalities*, Elsevier, Amsterdam.
- [4] P. K. Anh, T. N. Hai (2017), *Splitting extragradient-like algorithms for strongly pseudomonotone equilibrium problems*, Numer. Algor. 76(1), 67-91.
- [5] P. K. Anh, T. N. Hai (2019), *Novel self-adaptive algorithms for non-Lipschitz equilibrium problems with applications*, J. Global Optim. 73(3), 637-657.
- [6] P. M. Duc, L. D. Muu, N. V. Quy (2016), *Solution-existence and algorithms with their convergence rate for strongly pseudomonotone equilibrium problems*, Pacific J. Optim. 12(4), 833-845.
- [7] T. N. Hai (2020), *Error bounds and stability of the projection method for strongly pseudomonotone equilibrium problems*, Int. J. Comput. Math. 97(12), 2516-2530.
- [8] D. V. Hieu (2019), *New inertial algorithm for a class of equilibrium problems*, Numer. Algor. 80(4), 1413-1436.
- [9] L. V. Nguyen, Q. H. Ansari, X. Qin (2020), *Linear conditioning, weak sharpness and finite convergence for equilibrium problems*, J. Global Optim. 77(2), 405-424.
- [10] T. D. Quoc, L. D. Muu (2012), *Iterative methods for solving monotone equilibrium problems via dual gap functions*, Comput. Optim. Appl. 51(2), 709-728.
- [11] P. Vuong, J. Strodiot (2020), *A dynamical system for strongly pseudomonotone equilibrium problems*, J. Optim. Theory Appl. 185(3), 767-784.
- [12] L. Yin, H. Liu, J. Yang (2022), *Modified golden ratio algorithms for pseudomonotone equilibrium problems and variational inequalities*, Appl. Math. 67, 273-296.
- [13] D. Azagra, J. Ferrera, F. López-Mesas (2005), *Nonsmooth analysis and Hamilton-Jacobi equations on Riemannian manifolds*, J. Funct. Anal. 220(2), 304-361.
- [14] Y. Ledyev, Q. Zhu (2007), *Nonsmooth analysis on smooth manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. 359(8), 3687-3732.
- [15] C. Li, G. López, V. Martín-Márquez (2009), *Monotone vector fields and the proximal point algorithm on Hadamard manifolds*, J. London Math. Soc. 79(3), 663-683.
- [16] V. Colao, G. López, G. Marino, V. Martín-Márquez (2012), *Equilibrium problems in Hadamard manifolds*, J. Math. Anal. Appl. 388(1), 61-71.
- [17] X. Wang, G. López, C. Li, J. C. Yao (2019), *Equilibrium problems on Riemannian manifolds with applications*, J. Math. Anal. Appl. 473(2), 866-891.

- [18] S. Al-Homidan, Q.H. Ansari, M. Islam (2021), *Existence results and two step proximal point algo rithm for equilibrium problems on Hadamard manifolds*, Carpathian J. Math. 37(3), 393-406.
- [19] G. Bento, J. Neto, P. Soares, A. Soubeyran (2022), *A new regularization of equilibrium problems on Hadamard manifolds: applications to theories of desires*, Ann. Oper. Res. 316(2), 1301-1318.
- [20] G. Bento, J. Neto, I. Melo (2022), *Combinatorial convexity in Hadamard manifolds: existence for equilibrium problems*, J. Optim. Theory Appl. 195(3), 1087-1105.
- [21] J. Cruz Neto, F. Jacinto, P. Soares, J. Souza (2018), *On maximal monotonicity of bifunctions on Hadamard manifolds*, J. Global Optim. 72(3), 591-601.
- [22] J. Pang (2018), *Study of equilibrium problem in Hadamard manifolds by extending some concepts of nonlinear analysis*. Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM. 112, 1521-1537.
- [23] J. Cruz Neto, P. Santos, P. Soares (2016), *An extragradient method for equilibrium problems on Hadamard manifolds*, Optim. Lett. 10(6), 1327-1336.
- [24] J. Chen, S. Liu, X. Chang (2021), *Extragradient method and golden ratio method for equilibrium problems on Hadamard manifolds*, Int. J. Comput. Math. 98(8), 1699-1712.
- [25] J. Fan, B. Tan, S. Li (2021), *An explicit extragradient algorithm for equilibrium problems on Hadamard manifolds*, Comput. Appl. Math. 40(2), 1-15.
- [26] K. Khammahawong, P. Kumam, P. Chaipunya, J. Yao, C. Wen, W. Jirakitpuwapat (2020), *An extragradient algorithm for strongly pseudomonotone equilibrium problems on Hadamard manifolds*, Thai J. Math. 18, 350-371.
- [27] Q. H. Ansari, M. Islam (2020), *Explicit iterative algorithms for solving equilibrium problems on Hadamard manifolds*, J. Nonlinear Convex Anal. 21(2), 425-439.
- [28] F. Babu, A. Ali, A. H. Alkhaldi (2022), *An extragradient method for non-monotone equilibrium problems on Hadamard manifolds with applications*, Appl. Numer. Math. 180, 85-103.
- [29] M. P. Carmo (1992), *Riemannian Geometry*, Vol. 6. Birkhäuser, Boston.
- [30] T. Sakai (1996), *Riemannian Geometry*, American Mathematical Society, Providence.
- [31] C. Udriste (1994), *Convex Functions and Optimization Methods on Riemannian Manifolds*, Springer, Dordrecht.
- [32] N. T. An, L. V. Nguyen, N. T. Thu (2024), *Existence and solution methods for strongly pseu domonotone equilibrium problems on Hadamard manifolds*, submitted, Comput. Appl. Math.
- [33] S. Németh (2003), *Variational inequalities on Hadamard manifolds*, Nonlinear Anal. 52(5), 1491-1498.
- [34] G. Mastroeni (2003), *On Auxiliary Principle for Equilibrium Problems*, In: P. Daniele, et. al.(eds.) *Equilibrium Problems and Variational Models*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 289-298.

ALGORITHMS FOR SOLVING STRONGLY PSEUDOMONOTONE EQUILIBRIUM PROBLEMS ON HADAMARD MANIFOLDS

Nguyen Thi Thu

ABSTRACT

This paper is concerned with strongly pseudomonotone equilibrium problems on Hadamard manifolds. We have shown that sequences generated by the modified projection method converge to the unique solution of the strongly pseudomonotone equilibrium problem under given assumptions.

Keywords: *Equilibrium problems, Hadamard manifolds, strongly pseudomonotone, modified projection method.*

** Ngày nộp bài: 07/11/2024; Ngày gửi phản biện: 25/11/2024; Ngày duyệt đăng: 10/03/2025*