 p-ISSN 2815-648X/ e-ISSN 2815-6471

DẠNG LŨY THỪA THỰC CỦA MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC KIỂU YOUNG VỚI HỆ SỐ LOGARIT

Đinh Phương Thoại[1]

Ngày nhận bài: 10/5/2023; Ngày phản biện thông qua: 18/10/2023; Ngày duyệt đăng: 10/10/2023

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi mở rộng một số kết quả gần đây liên quan đến dạng tổng quát lũy thừa thực của bất đẳng thức kiểu Young được đưa ra bởi các tác giả Hồ Xuân Thiên Bá và Phạm Thị Phương Trang (Tạp chí Khoa học Trường Đại học Tây Nguyên, số 55, năm 2022, trang 23 đến 27) với hệ số logarit. Đồng thời chúng tôi cũng đưa ra một số ứng dụng của các kết quả này vào lí thuyết toán tử. Phương pháp được chúng tôi sử dụng là lí thuyết bộ trội yếu.

Từ khóa: *Bất đẳng thức Young, Bất đẳng thức Young với hệ số logarit, Toán tử.*

1. MỞ ĐẦU

Bất đẳng thức cổ điển Young được phát biểu dưới dạng

$$(1-\nu)a+\nu b\ge a^{1-\nu}b^{\nu}, \quad (1.1)$$

trong đó $a,b>0$, $0\le\nu\le1$. Bất đẳng thức này còn được biết đến với tên gọi bất đẳng thức trung bình số học - trung bình hình học có trọng. Nó đã được các nhà toán học quan tâm, phát triển theo nhiều hướng khác nhau. Một số các hướng phát triển tiêu biểu của bất đẳng thức này có thể kể đến như sau.

Trước hết, bất đẳng thức (1.1) được làm mịn hoặc làm ngược bằng cách thêm hoặc bớt ở vế phải một số đại lượng không âm nào đó. Một trong các thành tựu ấn tượng nhất của cách làm này phải kể đến công trình của các tác giả F. Kittaneh và Y. Manasrah (2010, 2011) được đưa ra như sau: Nếu $a,b>0$ và $\nu\in[0,1]$ thì ta có

$$a^{1-\nu}b^{\nu}+r_0\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\le(1-\nu)a+\nu b\le a^{1-\nu}b^{\nu}+R_0\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2, \quad (1.2)$$

trong đó $r_0=\min\{\nu,1-\nu\}$, $R_0=\max\{\nu,1-\nu\}$.

Ở một hướng tiếp cận khác, bất đẳng thức (1.1) được phát triển bằng cách thêm vào đại lượng $a^{1-\nu}b^{\nu}$ một hệ số lớn hơn hoặc bằng 1, ta tạm gọi đây là hướng phát triển bất đẳng thức Young với các hệ số nổi tiếng như: Hằng số Kantorovich, tỉ số Specht, hệ số logarit… Trong bài viết này, chúng tôi quan tâm đến hướng phát triển với hệ số logarit. Hệ số này được định nghĩa như sau:

$$Q_N(\nu)=1+\frac{L(2^N\nu)}{2^{2N}}(\ln a-\ln b)^2,$$

$N=0;1;2;...$

trong đó, $L(\nu)=\dfrac{\nu^2}{2}\left(\dfrac{1-\nu}{\nu}\right)^{2\nu}$, $\nu\in(0,1]$ và $L(0)=0$. Rõ ràng, hàm L đối xứng qua $\frac{1}{2}$, nghĩa là, $L(\nu)=L(1-\nu)$, với $\nu\in[0,1]$. Từ đây, ta cũng thấy được với mỗi $\nu\in[0,1]$ thì $1+\dfrac{L(2^N\nu)}{2^{2N}}\ln^2 x$ tăng trên $[1,+\infty)$ và giảm trên $(0,1)$.

P. Kórus (2017) đã đưa ra một làm mịn của (1.1) ứng với hệ số logarit như sau

$$(1-\nu)a+\nu b\ge Q_0(\nu)a^{1-\nu}b^{\nu}. \quad (1.3)$$

C. Yang và cộng sự (2019) đã đưa ra một làm mịn của (1.1) tốt hơn (1.3) có dạng

$$(1-\nu)a+\nu b\ge Q_1(\nu)a^{1-\nu}b^{\nu}+r_0\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2. \quad (1.4)$$

Gần đây, hai tác giả M. A. Ighachane và M. Akkouchi (2021) đã đạt được một thành công rất lớn khi đưa ra được làm mịn dạng chuỗi cho bất đẳng thức Young liên quan đến hệ số logarit như sau.

Cho a, b là hai số thực dương và $0\le\nu\le1$. Khi đó với mọi số nguyên dương N, ta có:

$$(1-\nu)a+\nu b\ge\left(1+\frac{L(2^N\nu)}{2^{2N}}\ln^2\left(\frac{a}{b}\right)\right)a^{1-\nu}b^{\nu}+r_0\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\sum_{l=1}^{N-1}r_l(\nu)\sum_{k=1}^{2^l}f_{l,k}(a,b)\chi_{\left(\frac{k-1}{2^l},\frac{k}{2^l}\right)}(\nu) \quad (1.5)$$

trong đó, $r_l(\nu)$ và $f_{l,k}$ được xác định như sau:

$$r_l(\nu)=\begin{cases}2^l\nu-k+1, & \text{nếu } \dfrac{k-1}{2^l}\le\nu\le\dfrac{2k-1}{2^{l+1}}\\ k-2^l\nu, & \text{nếu } \dfrac{2k-1}{2^{l+1}}\le\nu\le\dfrac{k}{2^l}\end{cases}$$

.(1.6)

$$f_{l,k}(a,b)=\left(\sqrt{a^{\frac{k-l}{2^l}}b^{1-\frac{k-l}{2^l}}}-\sqrt{a^{\frac{k}{2^l}}b^{1-\frac{k}{2^l}}}\right)^2, \quad (1.7)$$

với $l,k\in\mathbb{N}$, $l\ge0$, $1\le k\le2^l$.

[1]*Khoa Khoa học Tự nhiên và Công nghệ, Trường Đại học Tây Nguyên;*
Tác giả liên hệ: Đinh Phương Thoại; ĐT: 0975287614; Email: 19101020@sv.ttn.edu.vn.

Đồng thời, cũng trong công trình này, các tác giả cũng đưa ra một kết quả vô cùng đẹp cho phiên bản ngược của bất đẳng thức này.

Cho a, b là hai số thực dương và $0 \le \nu \le 1$. Khi đó với mọi số nguyên dương N, ta có

$$(1-\nu)a+\nu b \le \left(1+\frac{L\left(2^N(1-\nu)\right)}{2^{2N}}\ln^2\left(\frac{a}{b}\right)\right)^{-1} a^{1-\nu}b^{\nu}$$

$$+R_0\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2-\sum_{l=1}^{N-1}r_l(\nu)\sum_{k=1}^{2^l}f_{l,k}(a,b)\chi_{\left(\frac{k-1}{2^l},\frac{k}{2^l}\right)}(\nu)$$

(1.8)

trong đó $R_0=\max\{\nu,1-\nu\}$, $r_l(\nu)$ và $f_{l,k}$ được xác định như trong (1.6) và (1.7).

Một hướng tiếp cận phổ biến khác chúng tôi muốn đề cập đến đó là việc phát triển lũy thừa của đại lượng $(1-\nu)a+\nu b$. Cụ thể, hai tác giả F. Kittaneh và Y. Manasrah (2015) đã chứng minh được bất đẳng thức

$$\left((1-\nu)a+\nu b\right)^m \ge \left(a^{1-\nu}b^{\nu}\right)^m + r_0^m\left(a^{\frac{m}{2}}-b^{\frac{m}{2}}\right)^2, \quad (1.9)$$

trong đó m là số nguyên dương.

Một kết quả tốt hơn được D. Choi (2018) đưa ra và chứng minh là

$$\left((1-\nu)a+\nu b\right)^m \ge \left(a^{1-\nu}b^{\nu}\right)^m$$
$$+(2r_0)^m\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^m-\left(\sqrt{ab}\right)^m\right), \quad (1.10)$$

và $\left((1-\nu)a+\nu b\right)^m \le \left(a^{1-\nu}b^{\nu}\right)^m$

$$+(2R_0)^m\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^m-\left(\sqrt{ab}\right)^m\right), \quad (1.11)$$

với m là số nguyên dương.

Nhận thấy các kết quả (1.10) - (1.11) chỉ được chứng minh với số mũ nguyên dương. Gần đây, chúng đã được các tác giả Phạm Thị Phương Trang, Hồ Xuân Thiên Bá (2022) xem xét, mở rộng lên lũy thừa thực $p \ge 1$ như sau

$$\left[(1-\nu)a+\nu b\right]^p \ge \left(a^{1-\nu}b^{\nu}\right)^p$$
$$+(2r_0)^p\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^p-\sqrt{ab}^{\,p}\right], \quad (1.12)$$

và $\left[(1-\nu)a+\nu b\right]^p \le \left(a^{1-\nu}b^{\nu}\right)^p$

$$+(2R_0)^p\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^p-\sqrt{ab}^{\,p}\right], \quad (1.13)$$

trong đó, p là số thực và $p \ge 1$.

Mục đích chính của chúng tôi trong bài báo này là mở rộng các kết quả (1.12), (1.13) về dạng

$$\left[(1-\nu)a+\nu b\right]^p \ge \left[Q_1(\nu)a^{1-\nu}b^{\nu}\right]^p$$
$$+(2r_0)^p\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^p-\sqrt{ab}^{\,p}\right], \quad (1.14)$$

và $\left[(1-\nu)a+\nu b\right]^p \le \left[Q_1^{-1}(1-\nu)a^{1-\nu}b^{\nu}\right]^p$

$$+(2R_0)^p\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^p-\sqrt{ab}^{\,p}\right], \quad (1.15)$$

trong đó, p là số thực và $p \ge 1.$ Đồng thời ứng dụng kết quả thu được cho phiên bản toán tử.

2. NỘI DUNG VÀ PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

2.1. Nội dung nghiên cứu

Bài báo tập trung nghiên cứu về bất đẳng Young với hệ số logarit cho lũy thừa thực. Từ đó đưa ra ứng dụng của các bất đẳng thức thu được cho lí thuyết toán tử.

2.2. Phương pháp nghiên cứu

Chúng tôi sử dụng các phương pháp chứng minh bất đẳng thức: biến đổi về bất đẳng thức tương đương, đánh giá, so sánh; các phương pháp toán lí thuyết. Đồng thời chúng tôi còn sử dụng một kĩ thuật mới là lí thuyết bộ dưới trội yếu và tính chất của các hàm lồi tăng, liên tục.

3. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

3.1. Một số kết quả mới cho bất đẳng thức Young với hệ số logarit

Trước hết, chúng ta nhắc lại về định nghĩa bộ dưới trội yếu. Cho $x=(x_1,x_2)$ và $y=(y_1,y_2)$ là hai vectơ trong $\mathbb{R}^2$. Khi đó y được gọi là bộ dưới trội yếu của x, kí hiệu $x \prec_{\omega} y$ nếu hệ sau được thỏa mãn $\begin{cases} x_1^* \le y_1^* \\ x_1^*+x_2^* \le y_1^*+y_2^* \end{cases}$, trong đó $x^*=(x_1^*,x_2^*)$, $y^*=(y_1^*,y_2^*)$ là hai vectơ thu được bằng cách sắp xếp lại các phần tử của x và y theo thứ tự giảm dần, nghĩa là $x_1^* \ge x_2^*$, $y_1^* \ge y_2^*$.

Bổ đề 3.1: Cho $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$ là hai vectơ trong $\mathbb{R}^2$ với

$$x_1=Q_1(\nu)a^{1-\nu}b^{\nu},\ x_2=r_0(a+b),$$
$$y_1=(1-\nu)a+\nu b,\ y_2=2r_0\sqrt{ab},$$

trong đó a, b là các số thực dương, $\nu\in[0;1]$ và $r_0=\min\{\nu,1-\nu\}$. Khi đó, ta có $x \prec_{\omega} y$.

Chứng minh:

Để chứng minh $x \prec_{\omega} y$ ta chứng minh

$$\begin{cases} x_1^* \le y_1^* & (3.1) \\ x_1^*+x_2^* \le y_1^*+y_2^* & (3.2) \end{cases}.$$

+ Để chứng minh (3.1), ta cần chứng minh rằng $x_1 \le y_1$ và $x_2 \le y_1$.

Thật vậy, từ (1.4) ta có:

$(1-\nu)a+\nu b \ge Q_1(\nu)a^{1-\nu}b^{\nu}$ hay $y_1 \ge x_1$.

Mặt khác, vì $r_0 = \min\{\nu, 1-\nu\}$ nên

$r_0(a+b) \le (1-\nu)a+\nu b$ hay $x_2 \le y_1$.

Vậy (3.1) đã được chứng minh xong.

+ Để chứng minh (3.2), ta cần chứng minh $x_1 + x_2 \le y_1 + y_2$.

Nghĩa là:

$$Q_1(\nu)a^{1-\nu}b^{\nu} + r_0(a+b) \le (1-\nu)a+\nu b + 2r_0\sqrt{ab}$$
$$\Leftrightarrow (1-\nu)a+\nu b \ge Q_1(\nu)a^{1-\nu}b^{\nu} + r_0(a+b) - 2r_0\sqrt{ab}$$
$$\Leftrightarrow (1-\nu)a+\nu b \ge Q_1(\nu)a^{1-\nu}b^{\nu} + r_0\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$$

Đây chính là (1.4). Vậy (3.2) đã được chứng minh xong.

Điều này cũng có nghĩa ta đã kiểm tra được $x \prec_{\omega} y$.

Bổ đề 3.2: Cho $X = (X_1, X_2)$, $Y = (Y_1, Y_2)$ là hai vectơ trong $\mathbb{R}^2$ với

$X_1 = (1-\nu)a+\nu b$, $X_2 = 2R_0\sqrt{ab}$,

$Y_1 = R_0(a+b)$, $Y_2 = \left[Q_1(1-\nu)\right]^{-1} a^{1-\nu}b^{\nu}$,

trong đó a,b là các số thực dương, $0 \le \nu \le 1$ và $R_0 = \max\{1-\nu, \nu\}$. Khi đó ta có $X \prec_{\omega} Y$.

Chứng minh:

Để chứng minh $X \prec_{\omega} Y$ ta chứng minh

$$\begin{cases} X_1^* \le Y_1^* & (3.3) \\ X_1^* + X_2^* \le Y_1^* + Y_2^* & (3.4) \end{cases}.$$

+ Để chứng minh (3.3), ta cần chứng minh rằng $X_1 \le Y_1$ và $X_2 \le Y_1$.

Thật vậy. Vì $R_0 = \max\{1-\nu, \nu\}$ nên

$R_0(a+b) \ge (1-\nu)a+\nu b$ hay $X_1 \le Y_1$.

Mặt khác, với a, b là các số thực dương, theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$a+b \ge 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow R_0(a+b) \ge 2R_0\sqrt{ab}$$

hay $X_2 \le Y_1$. Vậy (3.1) đã được chứng minh xong.

+ Để chứng minh (3.4), ta cần chứng minh $X_1 + X_2 \le Y_1 + Y_2$.

Đây là kết quả mà hai tác giả M. A. Ighachane and M. Akkouchi đã thu được tương ứng với N=2 trong (1.8).

Vậy ta đã hoàn thành quá trình chứng minh Bổ đề 3.2.

Trong tài liệu A. W. Marshall, I. Olkin (2011), các tác giả đã đưa ra một mối liên hệ khá thú vị giữa bộ trội yếu và lớp các hàm lồi, liên tục, tăng như sau:

$$x \prec_{\varpi} y \text{ khi và chỉ khi } \sum_{i=1}^{n} g(x_i) \le \sum_{i=1}^{n} g(y_i), \quad (3.5)$$

với $x, y \in \mathbb{R}^n$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm lồi, tăng, liên tục.

Dựa vào (3.5), chúng ta sẽ đưa ra những mở rộng của lớp các bất đẳng thức Young với hệ số logarit cho lũy thừa thực. Cụ thể kết quả được cho trong định lí sau.

Định lí 3.3: Nếu $a, b > 0$ và $0 \le \nu \le 1$ thì với mọi số thực $p \ge 1$, ta có

$$\left[(1-\nu)a+\nu b\right]^p \ge \left[Q_1(\nu)a^{1-\nu}b^{\nu}\right]^p + (2r_0)^p\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^p - \sqrt{ab}^{\,p}\right], (3.6)$$

và

$$\left[(1-\nu)a+\nu b\right]^p \le \left[Q_1^{-1}(1-\nu)a^{1-\nu}b^{\nu}\right]^p + (2R_0)^p\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^p - \sqrt{ab}^{\,p}\right]. \quad (3.7)$$

Chứng minh

Xét $g_0 : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$

$t \mapsto t^p$,

Khi đó, g_0 là hàm lồi, tăng, liên tục. Áp dụng (3.5) cho g_0 và hai vectơ x, y được định nghĩa như Bổ đề 3.1, ta có:

$$x_1^{\,p} + x_2^{\,p} \le y_1^{\,p} + y_2^{\,p},$$

hay

$$\left[Q_1(\nu)a^{1-\nu}b^{\nu}\right]^p + \left[r_0(a+b)\right]^p \le \left[(1-\nu)a+\nu b\right]^p + \left(2r_0\sqrt{ab}\right)^p$$
$$\Leftrightarrow \left[(1-\nu)a+\nu b\right]^p \ge \left[Q_1(\nu)a^{1-\nu}b^{\nu}\right]^p + \left[r_0(a+b)\right]^p - \left(2r_0\sqrt{ab}\right)^p$$
$$\Leftrightarrow \left[(1-\nu)a+\nu b\right]^p \ge \left[Q_1(\nu)a^{1-\nu}b^{\nu}\right]^p + r_0^{\,p}(a+b)^p - (2r_0)^p\sqrt{ab}^{\,p}$$
$$\Leftrightarrow \left[(1-\nu)a+\nu b\right]^p \ge \left[Q_1(\nu)a^{1-\nu}b^{\nu}\right]^p + (2r_0)^p\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^p - \sqrt{ab}^{\,p}\right]$$

Vậy (3.6) đã được chứng minh xong.

Tương tự áp dụng (3.5) cho g_0 và hai vectơ X, Y được định nghĩa như Bổ đề 3.2, ta có:

$$X_1^p + X_2^p \le Y_1^p + Y_2^p$$

hay

$$\left[(1-\nu)a+\nu b\right]^p+\left(2R_0\sqrt{ab}\right)^p\le\left[R_0(a+b)\right]^p+\left[\left(Q_1(\nu)\right)^{-1}a^{1-\nu}b\right]^p$$

$$\Leftrightarrow\left[(1-\nu)a+\nu b\right]^p\le\left[\left(Q_1(1-\nu)\right)^{-1}a^{1-\nu}b\right]^p+\left[R_0(a+b)\right]^p-\left(2R_0\sqrt{ab}\right)^p$$

$$\Leftrightarrow\left[(1-\nu)a+\nu b\right]^p\le\left[\left(Q_1(1-\nu)\right)^{-1}a^{1-\nu}b\right]^p+\left(2R_0\right)^p\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^p-\sqrt{ab}^{\,p}\right]$$

Vậy (3.7) đã được chứng minh xong.

3.2. Ứng dụng cho phiên bản toán tử

Trong mục này chúng tôi sẽ sử dụng các kết quả thu được trong phiên bản số (3.6) và (3.7) để đưa ra ứng dụng cho phiên bản toán tử.

Trong suốt phần này, các toán tử khả nghịch trên không gian Hilbert phức H sẽ được biểu thị bằng các chữ cái in hoa và I là toán tử đồng nhất trên H. Chúng tôi cũng sử dụng các kí kiệu sau:

(i) $A\ge 0\,(A>0)$ nếu A là một toán tử dương (khả nghịch);

(ii) $A\ge B\,(A>B)$ nếu $A-B$ là một toán tử dương (khả nghịch).

Với $A,B>0$ và $\nu\in\mathbb{R}$, trung bình số học và hình học có trọng số ν của A và B được xác định tương ứng bởi:

$$A\nabla_\nu B=(1-\nu)A+\nu B$$

$$A\#_\nu B=A^{\frac{1}{2}}\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{\nu}A^{\frac{1}{2}}.$$

Chúng tôi cũng viết $A\nabla B$ và $A\# B$ thay cho $A\nabla_{\frac{1}{2}}B$ và $A\#_{\frac{1}{2}}B$. Chúng tôi cũng sử dụng cùng các kí hiệu này cho trung bình hình học có trọng trong trường hợp $\nu\in\mathbb{R}$.

Ý tưởng chính để chỉ ra các bất đẳng thức toán tử tương ứng với các phiên bản vô hướng của chúng là sử dụng tính đơn điệu toán tử của các hàm liên tục trong phần sau.

Bộ đề 4.1. Cho X là toán tử tự liên hợp tùy ý. Nếu f và g là các hàm nhận giá trị thực liên tục trên phổ $Sp(X)$ thỏa mãn $f(t)\ge g(t)$ với mọi $t\in Sp(X)$ thì ta có bất đẳng thức toán tử $f(X)\ge g(X)$.

Định lí 4.2. Cho $0\le\nu\le 1$ và $A,B>0$ thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

(i) $0<mI\le A\le\gamma I<\Gamma I\le B\le MI$,

(ii) $0<mI\le B\le\gamma I<\Gamma I\le A\le MI$,

trong đó $0<M,m,\Gamma,\gamma<+\infty$ là các đại lượng vô hướng. Khi đó với mọi số thực $p\ge 1$, ta có

$$A\#_p\left(A\nabla_\nu B\right)\ge Q(\nu)^p A\#_{\nu p}B+\left(2r_0\right)^p\left[A\#_p\left(A\nabla B\right)-A\#_{\frac{p}{2}}B\right],\quad(4.1)$$

và

$$A\#_p\left(A\nabla_\nu B\right)\le Q(1-\nu)^{-p} A\#_{\nu p}B+\left(2R_0\right)^p\left[A\#_p\left(A\nabla B\right)-A\#_{\frac{p}{2}}B\right],\quad(4.2)$$

trong đó $Q(\nu)=1+\dfrac{L(2\nu)}{4}\ln^2\left(\dfrac{\Gamma}{\gamma}\right)$ và

$$L(\nu)=\frac{\nu^2}{2}\left(\frac{1-\nu}{\nu}\right)^{2\nu}.$$

Chứng minh:

Ta có, $\dfrac{m}{M}\le\dfrac{\gamma}{\Gamma}<1<\dfrac{\Gamma}{\gamma}\le\dfrac{M}{m}$.

Trước hết ta giả sử các toán tử A, B thỏa mãn điều kiện (i). Sử dụng bất đẳng thức (3.6) và hàm số $Q(\nu)(x)=1+\dfrac{L(2\nu)}{4}\ln^2(x)$ tăng trên $[1;+\infty)$.

Với mọi $x\in\left[\dfrac{\Gamma}{\gamma},\dfrac{M}{m}\right]\subset\left[\dfrac{m}{M},\dfrac{M}{m}\right]$, ta có

$$\begin{aligned}\left[(1-\nu)+\nu x\right]^p&\ge\left[Q(\nu)(x)x^\nu\right]^p+\left(2r_0\right)^p\left[\left(\frac{1+x}{2}\right)^p-x^{\frac{p}{2}}\right]\\&\ge\min_{h\le x\le h'}\left(Q(\nu)(x)\right)^p x^{\nu p}+\left(2r_0\right)^p\left[\left(\frac{1+x}{2}\right)-x^{\frac{p}{2}}\right]\\&=\left(Q(\nu)(h)\right)^p x^{\nu p}+\left(2r_0\right)^p\left[\left(\frac{1+x}{2}\right)-x^{\frac{p}{2}}\right],\end{aligned}$$

trong đó $h=\dfrac{\Gamma}{\gamma}$ và $h'=\dfrac{M}{m}$. Điều này cùng với Bổ đề 4.1, cho thấy, mọi toán tử X dương với phổ của nó trong $[h,h']$ thì

$$\left[(1-\nu)I+\nu X\right]^p\ge\left(Q(\nu)(h)\right)^p X^{\nu p}+\left(2r_0\right)^p\left[\left(\frac{1}{2}I+\frac{1}{2}X\right)-X^{\frac{p}{2}}\right].$$

Mặt khác, theo điều kiện (i), phổ $Sp\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)$ của toán tử $A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}$ nằm trong $\left[\dfrac{\Gamma}{\gamma},\dfrac{M}{m}\right]$. Do đó, thay $X = A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}$ vào bất đẳng thức trên, ta có

$$\left[(1-\nu)I+\nu A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right]^p \geq \left(Q(\nu)(h)\right)^p\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{\nu p}$$

$$+(2r_0)^p\left[\left(\frac{1}{2}I+\frac{1}{2}A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)-\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{p}{2}}\right].$$

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức trên với $A^{\frac{1}{2}}$, ta được

$$A^{\frac{1}{2}}\left[(1-\nu)I+\nu A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right]^p A^{\frac{1}{2}} \geq$$

$$\left(Q(\nu)(h)\right)^p A^{\frac{1}{2}}\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{\nu p}A^{\frac{1}{2}}$$

$$+(2r_0)^p\left[A^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}I+\frac{1}{2}A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)A^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.-A^{\frac{1}{2}}\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{p}{2}}A^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\Leftrightarrow A^{\frac{1}{2}}\left[A^{-\frac{1}{2}}\left[(1-\nu)A+\nu B\right]A^{-\frac{1}{2}}\right]^p A^{\frac{1}{2}} \geq$$

$$\left(Q(\nu)(h)\right)^p A^{\frac{1}{2}}\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{\nu p}A^{\frac{1}{2}}$$

$$+(2r_0)^p\left\{A^{\frac{1}{2}}\left[A^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B\right)A^{-\frac{1}{2}}\right]A^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.-A^{\frac{1}{2}}\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{p}{2}}A^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$\Leftrightarrow A^{\frac{1}{2}}\left[A^{-\frac{1}{2}}\left[(1-\nu)A+\nu B\right]A^{-\frac{1}{2}}\right]^p A^{\frac{1}{2}} \geq$$

$$\left(Q(\nu)(h)\right)^p A^{\frac{1}{2}}\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{\nu p}A^{\frac{1}{2}}$$

$$+(2r_0)^p\left\{A^{\frac{1}{2}}\left[A^{-\frac{1}{2}}\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)A+\frac{1}{2}B\right)A^{-\frac{1}{2}}\right]A^{\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.-A^{\frac{1}{2}}\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{p}{2}}A^{\frac{1}{2}}\right\}$$

hay $A\#_p(A\nabla_\nu B) \geq \left(Q(\nu)(h)\right)^p A\#_{\nu p}B$

$$+(2r_0)^p\left[A\#(A\nabla B)-A\#_{\frac{p}{2}}B\right].$$

Vậy (4.1) đã được chứng minh xong. (4.2) được chứng minh tương tự.

4. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, chúng tôi đã chứng minh được bất đẳng thức của hai tác giả Hồ Xuân Thiên Bá và Phạm Thị Phương Trang (Tạp chí Khoa học Đại học Tây Nguyên, số 55, năm 2022, trang 23 đến 27) còn có thể mở rộng thêm với hệ số logarit. Từ đó đưa ra một số ứng dụng của các kết quả này vào lí thuyết toán tử.

LỜI CẢM ƠN

Tôi xin gửi lời cảm ơn sâu sắc đến ThS Đoàn Thị Thúy Vân về những định hướng ý tưởng và phương pháp để có thể hoàn thành bài báo này.

THE REAL POWER FORM FOR YOUNG-TYPE INEQUALITIES WITH LOGARITHMIC CONSTANT

Dinh Phuong Thoai[1]

Received Date: 10/5/2023; Revised Date: 18/10/2023; Accepted for Publication: 10/10/2023

ABSTRACT

In this paper, we extend some results on Young-type inequality given by Ho Xuan Thien Ba and Pham Thi Phuong Trang (Tay Nguyen journal of science , No. 55, 2022, page 23. to 27) with logarithmic constants. Simultaneously, we also give some applications of these results to operator theory. The method used in here is based on the theory of weak sub-majorization.

Keywords: *Young inequality, Young inequality with logarithmic constants, Operator.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tài liệu tiếng Việt

Hồ Xuân Thiên Bá, Phạm Thị Phương Trang (2022). Dạng lũy thừa thực của một số bất đẳng thức kiểu Young. *Tạp chí khoa học trường Đại học Tây Nguyên,* 55, 23-27.

Tài liệu tiếng nước ngoài

Choi, D. (2018). A generalization of Young-type inequalities. Mathematical Inequalities and Applications, 21, no. 1, 99-106.

Ighachance, M. A,. & Akkouchi, M. (2021). Further refinements of Young's type inequality for positive linear maps. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas, 115, no. 94.

Kittaneh, F., & Manasrah, Y. (2010). Improved Young and Heinz inequalities for matrices. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 361, no. 1, 262-269.

Kittaneh, F., & Manasrah, Y. (2011). Reverse Young and Heinz inequalities for matrices. Linear and Multilinear Algebra, 59, no. 9, 1031-1037.

Kórus, P. (2017). A refinement of young's inequality. Acta Mathematica Hungarica, 153, 430 - 435.

Manasrah, Y., & Kittaneh, F. (2015). A generalization of two refined Young inequalities. Positivity 19, no. 4, 757-768.

Marshall, A. W., & et al. (2011). Inequalities: Theory of majorization and its applications (2nd ed.). New York: Springer Series in Statistics, Springer.

Yang, C. J., & et al. (2019). Some refinements of Young type inequality for positive linear map. Mathematica Slovaca, vol. 69, 919-930.

[1]*Faculty of Natural Science and Technology, Tay Nguyen University;*
Corresponding author: Dinh Phuong Thoai; Tel: 0975287614; Email: 19101020@sv.ttn.edu.vn.