

Phân tích dao động của kết cấu cầu theo số liệu tải trọng ngẫu nhiên của trạm cân Dầu Giây

Analysis of structural bridge vibration under random load data from weighing station Dau Giay

> PGS.TS NGUYỄN XUÂN TOÀN, THS NGUYỄN THỊ KIM LOAN*

Trường Đại học Bách khoa, Đại học Đà Nẵng; Email: ntkloan@dut.udn.vn; * Corresponding author

TÓM TẮT

Bài báo giới thiệu về phân tích dao động và hệ số động lực (HSDL) của chuyển vị khi kết cấu cầu chịu tải trọng xe ngẫu nhiên. Tải trọng xe thực tế đã được thu thập tại trạm cân Dầu Giây và sử dụng thuật toán khởi tạo biến ngẫu nhiên để tạo ra một bộ dữ liệu ngẫu nhiên. Nghiên cứu đã mô phỏng 10.000 lần để phân tích cho cầu Suối Khoét trên đường bộ cao tốc Phan Thiết - Dầu Giây. Kết quả nghiên cứu cho thấy mối quan hệ giữa tải trọng đầu vào và đầu ra rất phức tạp và không đơn điệu. Phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên cũng rất phức tạp. Đa số kết quả về HSDL đều lớn hơn giá trị đang được áp dụng trong quy trình thiết kế cầu tại nước ta theo tiêu chuẩn TCVN1823-13:2017. Điều này cần được lưu ý trong quá trình thiết kế và xây dựng cầu.

Từ khóa: Dao động; hệ số động lực; tải trọng xe ngẫu nhiên; cầu Suối Khoét.

ABSTRACT

This article introduces the analysis of vibration and dynamic impact factor (DIF) of displacement in the case of a bridge structure subjected to random vehicle loads. The actual vehicle load data was collected at the Dau Giay weigh station, and a random variable initialization algorithm was used to generate a random dataset of 3-axle loads. The study performed 10,000 simulations to analyze the Suoi Khoet bridge on the Phan Thiet - Dau Giay highway in Vietnam. The results showed that the relationship between input and output loads is highly complex and non-monotonic. The probability distribution of the random variable is also highly complex. Most of the DIF results are higher than the values currently applied in bridge design processes in Vietnam according to TCVN1823-13:2017 standards. This needs to be taken into account during the design and construction of bridges.

Keywords: Vibration, Dynamic impact factor (DIF); random vehicle loads; Suoi Khoet bridge.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Tải trọng động do sự dao động của xe là một vấn đề rất quan trọng đối với độ bền của cầu, đặc biệt là trong bối cảnh hiện nay khi tỷ lệ sử dụng các phương tiện hạng nặng và tốc độ cao trong giao thông ngày càng tăng [1]; [2]. Phần lớn công trình nghiên cứu tập trung vào việc phân tích bài toán động lực học tương tác giữa cầu và xe theo mô hình tiền định. Tuy nhiên, tương tác động lực giữa cầu và xe là quá trình tương tác ngẫu nhiên do nhiều nguyên nhân, bao gồm tính ngẫu nhiên của độ gồ ghề mặt cầu, vận tốc của xe, khối lượng và hiện tượng đồng pha, lệch pha của hoạt tải di động khi chạy vào cầu. Một số nghiên cứu chỉ xem xét ngẫu nhiên trong kích thích do độ nhám bề mặt đường trong khi đó các thông số hệ thống của cả hai cây cầu và phương tiện được coi là xác định. Những công bố này chủ yếu được phân loại thành phương pháp miền tần số [3, 4] và phương pháp miền thời gian [5, 6]. Những công bố khác bao gồm sự ngẫu nhiên về khối lượng, độ cứng, giảm xóc

và vận tốc di chuyển [7,8] của phương tiện di chuyển và phương pháp nhiễu loạn đã được sử dụng để đánh giá số liệu thống kê của phản ứng cấu trúc theo ngẫu nhiên kích thích. Williams và các cộng sự [9] đã đề xuất một thuật toán hiệu quả cho dao động ngẫu nhiên không dừng của hệ thống cầu-xe. Phương pháp kích thích giả được mở rộng để xử lý phân tích ngẫu nhiên các hệ thống cầu xe phụ thuộc vào thời gian, trong đó các đặc tính thống kê của các phản ứng động được tính toán. M. Gładysz and P. Sniady [10] đã trình bày phân tích quang phổ về dao động của dầm với các tham số không chắc chắn dưới tác dụng của lực ngẫu nhiên trên tàu. Giả thiết rằng tần số riêng của cầu là không chắc chắn và được mô hình hóa bằng số mờ, biến ngẫu nhiên hoặc biến ngẫu nhiên mờ. Kết quả thu được các hàm mật độ phổ của phản ứng động của dầm. Nguyễn Xuân Toàn và các cộng sự ([11,12]) đã nghiên cứu dao động của các kết cấu cầu dưới tác dụng của tải trọng di động, xét đến độ gồ ghề ngẫu nhiên của mặt cầu. Kết quả

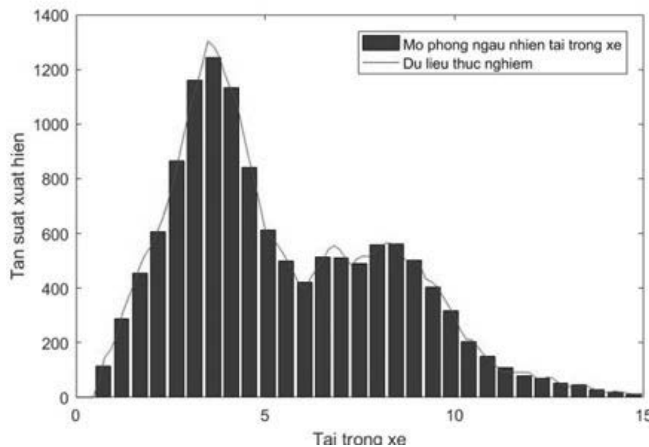
ngghiên cứu đã giải quyết được vấn đề tương tác động lực học ngẫu nhiên của cầu dưới tác dụng của tải trọng di động trên mặt cầu không bằng phẳng.

Các tải trọng ngẫu nhiên của xe và hàng hóa trên xe đóng vai trò quan trọng trong tương tác giữa cầu và xe và là một nguồn ngẫu nhiên đáng kể. Tuy nhiên, chúng chưa được nghiên cứu đầy đủ trong vấn đề tương tác giữa cầu và xe. Trong nghiên cứu này, phương pháp Monte-Carlo được sử dụng để tạo ra các dị thường ngẫu nhiên trong tính toán động. Để thu thập số liệu về tải trọng xe, có thể sử dụng các trạm cân động trên đường, trên cầu hoặc bằng các trạm cân tĩnh. Ngoài ra, dữ liệu về tải trọng xe nặng và xe quá tải có thể được thu thập thông qua điều tra thống kê. Số liệu thực tế về tải trọng xe chạy qua cầu trong nghiên cứu này được thu thập tại trạm cân Dầu Giây. Các mô phỏng số được thực hiện để phân tích dao động và hệ số động lực của cầu Suối Khoét thuộc đoạn đường bộ cao tốc Phan Thiết - Dầu Giây. Cầu dầm bê tông cốt thép đơn giản gồm 1 nhịp chiều dài 18.6m được đưa vào mô hình tính toán chịu tác dụng của tải trọng xe ngẫu nhiên.

2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

2.1. Thu thập và cơ sở lý thuyết xử lý số liệu tải trọng

Dựa trên kết quả thu thập số liệu tại Trạm cân Dầu Giây, ước lượng phân bố xác suất của tải trọng trục. Thông qua thuật toán khởi tạo biến ngẫu nhiên (Pseudo - Random Process Generator) [13] để tạo ra một đồng nhất biến ngẫu nhiên độc lập có phân phối. Bằng cách thực hiện mô phỏng 10.000 lần, một bộ dữ liệu ngẫu nhiên của tải trọng xe 3 trục đã được tạo ra và thể hiện trong Hình 1. Kết quả cho thấy rằng dữ liệu được tạo ra đạt mức độ phù hợp cao đối với tải trọng của xe trục thứ ba và thể hiện tính hiệu quả cũng như độ chính xác của thuật toán khởi tạo biến ngẫu nhiên đã được sử dụng.

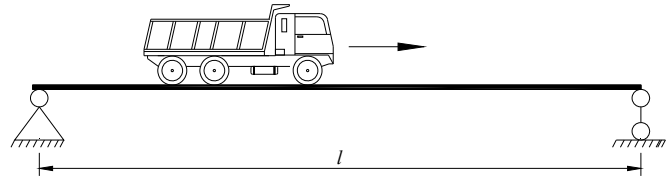


Hình 1. Biểu đồ tần suất xuất hiện

Kernel density estimation (KDE) là một phương pháp để ước tính mật độ xác suất của một biến ngẫu nhiên không được biết trước, dựa trên một tập hợp các quan sát. Phương pháp ước tính hạt nhân là một kỹ thuật ước tính mật độ phi tham số, không yêu cầu giả định về phân phối của dữ liệu. Kỹ thuật này cho phép tạo ra một đường cong mượt mà từ các điểm dữ liệu. Để ước tính mật độ hạt nhân, vẽ dữ liệu và tạo một đường cong phân phối bằng cách tính toán khoảng cách của các điểm dọc theo phân phối. Hàm hạt nhân được sử dụng để cân nhắc các điểm trên tập dữ liệu.

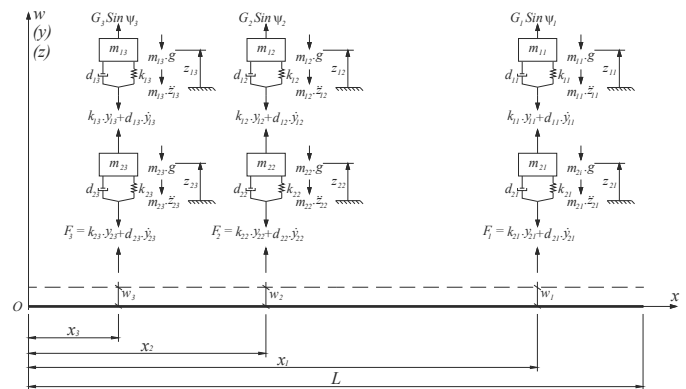
2.2. Mô hình tính toán

Tải trọng xe ba trục di chuyển trên kết cấu cầu dầm bê tông cốt thép gồm 1 nhịp chiều dài 18.6m được mô tả như hình 2.



Hình 2. Sơ đồ tải trọng xe di chuyển trên cầu

Sử dụng mô hình phần tử thanh để mô hình hóa tương tác giữa hoạt tải xe ba trục di động và phần tử dầm trên cầu. Mô hình hóa hoạt tải xe gồm ba trục xe, với trục xe thứ n có lực kích thích điều hòa từ động cơ truyền lên được mô tả bằng $G_n \sin \psi_n$. Khối lượng của thân xe và hàng hóa trên xe được phân bố lên trục xe thứ n và mô hình hóa thông qua khối lượng m_{1n} và khối lượng của trục xe thứ n được mô hình hóa thông qua khối lượng m_{2n} . Mô hình cũng mô tả độ cứng và độ giảm chấn của nhíp xe và lốp xe, với k_{1n} và d_{1n} là độ cứng và độ giảm chấn của nhíp xe; k_{2n} và d_{2n} lần lượt là độ cứng và độ giảm chấn của lốp xe. Chiều dài của phần tử dầm được định nghĩa bằng L. Mỗi tải trọng thứ n trên xe tạo ra một chuyển vị $w_n(x_n, t)$ của phần tử dầm tại vị trí của tải trọng đó vào thời điểm đang xét. Chuyển vị thẳng đứng của khung xe tại vị trí trục n được định nghĩa bằng z_{1n} , chuyển vị thẳng đứng của trục xe thứ n được định nghĩa bằng z_{2n} , chuyển vị tương đối giữa khung và trục xe thứ n được định nghĩa bằng y_{1n} , chuyển vị tương đối giữa trục xe thứ n và phần tử dầm được định nghĩa bằng y_{2n} , và tọa độ của trục xe thứ n tại thời điểm t được định nghĩa bằng x_n ($n = 1, 2, 3$).



Hình 3. Mô hình phân tích phần tử dầm và 3 trục

Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn xây dựng phương trình vi phân của phần tử dầm và xe ba trục dưới dạng ma trận như sau:

$$M_e \ddot{q} + C_e \dot{q} + K_e q = f_e \quad (1)$$

Trong đó M_e là ma trận khối lượng, C_e là ma trận cản, K_e là ma trận độ cứng hỗn hợp của toàn hệ (xe và phần tử dầm):

$$M_e = \begin{bmatrix} M_{ww} & M_{wz1} & M_{wz2} \\ 0 & M_{z1z1} & 0 \\ 0 & 0 & M_{z2z2} \end{bmatrix}; \quad C_e = \begin{bmatrix} C_{ww} & 0 & 0 \\ 0 & C_{z1z1} & C_{z1z2} \\ 0 & C_{z2z1} & C_{z2z2} \end{bmatrix}; \quad K_e = \begin{bmatrix} K_{ww} & 0 & 0 \\ 0 & K_{z1z1} & K_{z1z2} \\ K_{z2z1} & K_{z2z2} & K_{z2z2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$\ddot{q}, \dot{q}, q, f_e$ lần lượt là vectơ gia tốc, vận tốc, chuyển vị, lực hỗn hợp được xác định như sau:

$$\{\ddot{q}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{w} \\ \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{Bmatrix}; \quad \{\dot{q}\} = \begin{Bmatrix} \dot{w} \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{Bmatrix}; \quad \{q\} = \begin{Bmatrix} w \\ z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix}; \quad \{f_e\} = \begin{Bmatrix} F_w \\ F_{z1} \\ F_{z2} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$W = [u_1 \quad \varphi_1 \quad u_2 \quad \varphi_2]^T$ là vectơ độ dời nút của phần tử dầm

trong hệ tọa độ địa phương. $u_1, \varphi_1, u_2, \varphi_2$ lần lượt là chuyển vị thẳng đứng, chuyển vị xoay trên nút trái và nút phải của phần tử dầm.

$$F_w = [F_1 \quad \dots \quad F_i \quad \dots \quad F_N]^T; \quad F_n = \sum_{i=1}^N [G_n \sin \psi_i - (m_{1n} + m_{2n}) \cdot g] \cdot P_n; \quad (4)$$

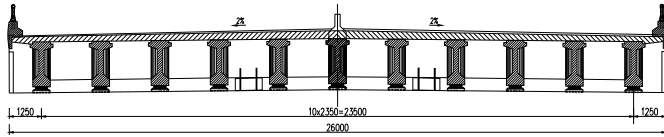
$$F_{z1} = \begin{bmatrix} G_1 \sin \Psi_1 - m_{11} \cdot g \\ \vdots \\ G_i \sin \Psi_i - m_{1i} \cdot g \\ \vdots \\ G_N \sin \Psi_N - m_{1N} \cdot g \end{bmatrix}; \quad F_{z2} = \begin{bmatrix} -m_{21} \cdot g \\ \vdots \\ -m_{2n} \cdot g \\ \vdots \\ -m_{2N} \cdot g \end{bmatrix}; \quad (5)$$

M_{ww} là ma trận khối lượng, C_{ww} là ma trận cản, K_{ww} là ma trận độ cứng của phần tử dầm chịu uốn. Các ma trận và véc tơ còn lại có thể tìm thấy trong tài liệu [14,15].

Nghiên cứu này tập trung vào trường hợp tải trọng tác dụng là đại lượng lấy ngẫu nhiên từ các trạm cân xe. Vì vậy, giá trị $m_{1n} = m_{trực\ n} - m_{2n}$ trong các phương trình (4) và (5) là ngẫu nhiên, các nhân tố khác xem như là xác định.

2.3. Các tham số cơ bản của kết cấu và xe

Cầu Suối Khoét là một trong các cầu trên đoạn đường bộ cao tốc Phan Thiết - Dầu Giây. Đây là cầu một nhịp, với chiều dài nhịp là $L=18,6m$. Mặt cắt ngang của cầu được thiết kế với 11 dầm I bê tông cốt thép như được mô tả trong hình 4.



Hình 4. Mặt cắt ngang cầu Suối Khoét

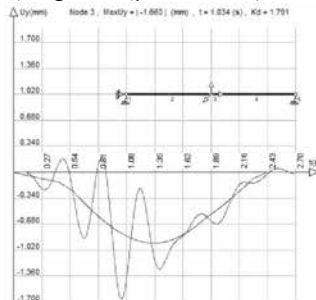
Tham số cầu như sau: $E=3230769,23 \text{ T/m}^2$; $J_d=0,30921 \text{ m}^4$; $F_d=0,9522 \text{ m}^2$; $\rho F_d=2,8 \text{ T/m}$, hệ số ma sát trong và ngoài lần lượt là $\theta=0,027$ và $\beta=0,01$.

Tải trọng di chuyển với các giá trị m_{11} , m_{12} và m_{13} là các đại lượng ngẫu nhiên được lấy từ bộ dữ liệu dựa trên dữ liệu cân xe tại trạm cân Dầu Giây. Các dữ liệu còn lại được lấy từ loại phương tiện phổ biến trong khu vực. Xe ba trục được sử dụng trong mô phỏng số là xe Foton với các thông số sau: $m_{21}=0,26 \text{ T}$; $m_{22}=m_{23}=0,87 \text{ T}$; $k_{11}=120 \text{ T/m}$; $k_{12}=k_{13}=260 \text{ T/m}$; $k_{21}=240 \text{ T/m}$, $k_{22}=k_{23}=380 \text{ T/m}$; $d_{11}=0,7344 \text{ Ts/m}$; $d_{12}=d_{13}=0,3672 \text{ Ts/m}$; $d_{21}=0,4 \text{ Ts/m}$; $d_{22}=d_{23}=0,8 \text{ Ts/m}$.

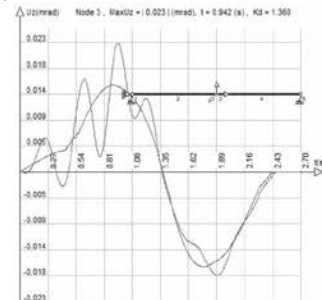
3. ỨNG DỤNG PHÂN TÍCH CẦU SUỐI KHOẾT

3.1. Phân tích dao động của cầu

Với mỗi giá trị của trọng lượng xe, áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn và phương pháp Runge-Kutta để thu được các phản ứng tĩnh và động của các phần tử dầm. Sau khi phân tích với bộ dữ liệu ngẫu nhiên đầu vào với $N=20000$, kết quả thu được biểu đồ dao động của chuyển vị thẳng đứng (U_y) và chuyển vị xoay (U_z) tại vị trí giữa nhịp (nút 3) được thể hiện trên hình 5 và hình 6.



Hình 5. Kết quả chuyển vị thẳng đứng động và tĩnh tại 1/2 nhịp



Hình 6. Kết quả chuyển vị xoay động và tĩnh tại 1/2 nhịp

Kết quả phân tích dao động của hệ thống cho thấy rằng chuyển vị động được phân bố đều hòa xung quanh kết quả phân

tích chuyển vị tĩnh. Khi xét đến tác động của lực cản, sau một thời gian nhất định, dao động của hệ thống sẽ dần dần giảm và các giá trị chuyển vị và nội lực động sẽ hội tụ về kết quả phân tích tĩnh. Điều này tương thích với lý thuyết tính toán dao động của kết cấu, đặc biệt là trong trường hợp tính toán dao động với sự xét đến tác động của lực cản.

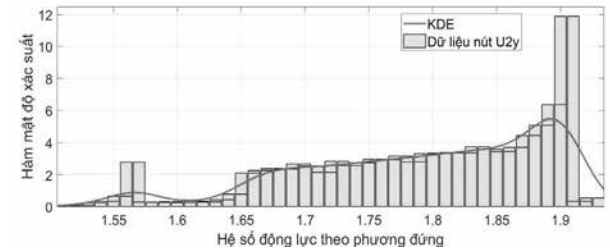
3.2. Phân tích hệ số động lực của cầu

Hệ số động lực là một thông số quan trọng trong thiết kế cầu giúp xác định ảnh hưởng của tải trọng động lên kết cấu cầu. HSĐL thể hiện tỷ lệ giữa chuyển vị động và chuyển vị tĩnh trong kết cấu cầu dưới các điều kiện tải trọng động. Theo AASHTO [16] và TCVN11823-13:2017 [17], hệ số này được xác định như sau:

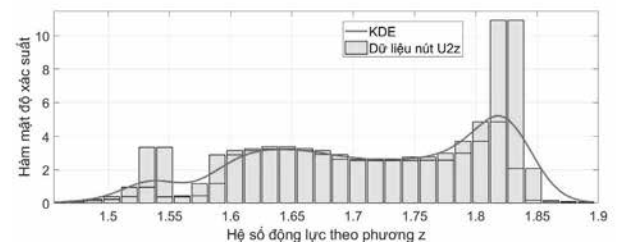
$$DIF = \frac{D_{dmax}}{D_{tmax}} \quad (6)$$

Trong đó D_{dmax} , D_{tmax} là giá trị chuyển vị động và chuyển vị tĩnh lớn nhất của dầm tại một vị trí do tải trọng xe di động gây ra.

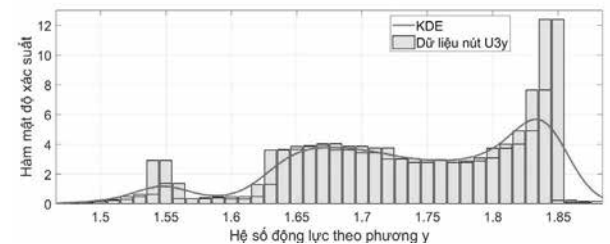
Kết quả thu được hệ số động lực chuyển vị thẳng đứng (U_y) và chuyển vị xoay (U_z) tại các vị trí 1/4, 1/2, 3/4 nhịp tương ứng với các nút 2, 3 và 4 được thể hiện trên hình 7 đến hình 13.



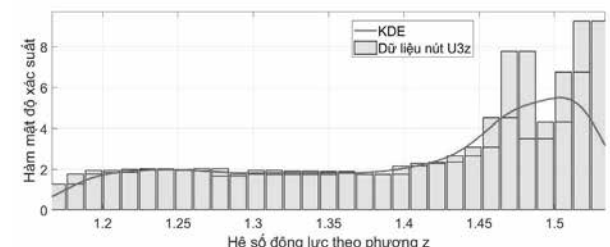
Hình 7. Kết quả HSĐL của U_y tại nút 2



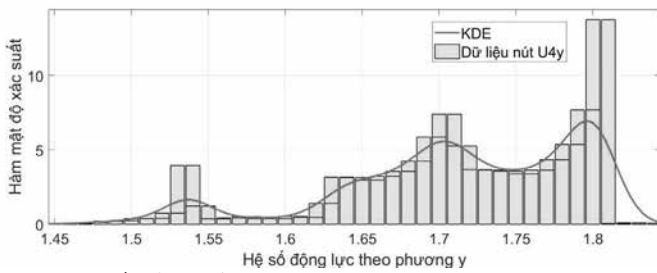
Hình 8. Kết quả HSĐL của U_z tại nút 2



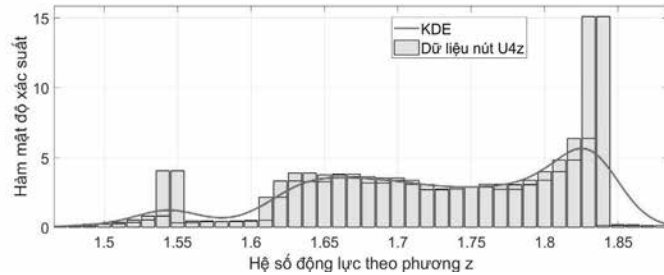
Hình 9. Kết quả HSĐL của U_y tại nút 3



Hình 10. Kết quả HSĐL của U_z tại nút 3



Hình 11. Kết quả HSĐL của Uy tại nút 4



Hình 12. Kết quả HSĐL của Uz tại nút 4

Kết quả nghiên cứu cho thấy phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên HSĐL là rất phức tạp, có hai đỉnh và không tuân theo bất kỳ quy tắc xác suất thông thường nào, chẳng hạn như phân phối chuẩn hoặc phân phối log-normal, chỉ có một đỉnh duy nhất. Hơn nữa, mối quan hệ giữa biến ngẫu nhiên đầu vào (tải trọng xe) và biến ngẫu nhiên đầu ra (HSĐL) không tuân theo cùng một luật xác suất. Điều này cho thấy mối quan hệ ảnh xạ giữa chúng không đơn điệu.

Giá trị trung bình, lớn nhất, nhỏ nhất và phương sai của hệ số động lực của chuyển vị tại các nút 2, 3 và 4 được thể hiện trên bảng 1.

Bảng 1. Các đặc trưng thống kê hệ số động lực của chuyển vị tại các nút

Đặc trưng thống kê	HSĐL của chuyển vị thẳng đứng			HSĐL của chuyển vị xoay		
	¼ nhịp	½ nhịp	¾ nhịp	¼ nhịp	½ nhịp	¾ nhịp
	nhịp	nhịp	nhịp	nhịp	nhịp	nhịp
Giá trị trung bình	1.720	1.675	1.645	1.675	1.350	1.675
Giá trị lớn nhất	1.930	1.880	1.840	1.890	1.530	1.880
Giá trị nhỏ nhất	1.510	1.470	1.450	1.460	1.170	1.470
Phương sai	0.122	0.119	0.113	0.125	0.105	0.119

Trong bảng 1, giá trị trung bình của HSĐL cho thấy sự gia tăng của nó trong kết cấu cầu chịu tải trọng xe ngẫu nhiên là lớn hơn so với các quy định thiết kế cầu theo AASHTO [16] và TCVN 11823-2017 [17], với giá trị là 1,33. Các tải trọng được sử dụng trong phân tích là tải trọng khai thác, với một số trường hợp quá tải. Kết quả cho thấy rằng phân bố tải trọng trên kết cấu là tương đối lớn hơn

so với các tiêu chuẩn thiết kế. Sự khác biệt giữa HSĐL lớn hơn tiêu chuẩn có thể cho thấy sự khác biệt trong phân bố tải trọng trên kết cấu cầu, và việc này cần được xem xét trong quá trình thiết kế và tính toán để đảm bảo tính an toàn và độ bền của kết cấu.

4. KẾT LUẬN

Bài báo này trình bày việc sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn để phân tích tương tác động lực học giữa cầu dầm bê tông cốt thép và tải trọng xe ngẫu nhiên. Biểu đồ dao động của chuyển vị tĩnh và chuyển vị động cùng hệ số chuyển vị động lực tại các nút được thể hiện dựa trên mô phỏng dữ liệu tải trọng ngẫu nhiên. Kết quả nghiên cứu cho thấy mối quan hệ giữa biến ngẫu nhiên đầu vào và biến ngẫu nhiên đầu ra không tuân theo cùng một quy luật xác suất. Phần lớn các hệ số động lực của chuyển vị đều cao hơn giá trị đang được áp dụng trong quá trình thiết kế cầu ở nước ta. Những kết quả nghiên cứu này có thể đóng vai trò là tài liệu tham khảo có giá trị cho các kỹ sư để phân tích và thiết kế các cây cầu an toàn và thiết thực phù hợp với các yêu cầu vận hành.

Lời cảm ơn

Bài báo được tài trợ bởi Trường Đại học Bách khoa - Đại học Đà Nẵng với đề tài có mã số: T2023-02-10.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]GangaRao HVS, "Impact factors for highway bridges", *ASTM STP*, 1164, 1992, (155–166).
- [2]XT Nguyen, VD Tran, "A finite element model of vehicle—cable stayed bridge interaction considering braking and acceleration", *World Congress on Advances in Civil, Environmental, and Materials Research*, 109, 2014.
- [3]Da Silva JGS, "Dynamic performance of highway bridge decks with irregular pavement surface", *Comput Struct* 82, 2004, (871–881)
- [4]Lin JH, "Response of a bridge to moving vehicle load", *Can J Civil Eng* 33(1), 2006, (49–57).
- [5]Schenk CA, Bergman LA, "Response of continuous system with stochastically varying surface roughness to moving load", *J Eng Mech*, 129(7), 2003, (759–768).
- [6]Seetapan P, Chucheeprakul S, "Dynamic response of a two-span beam subjected to high speed 2DOF spring vehicles", *Int J Struct Stab Dyn*, 6(3), 2006, (413–430).
- [7]Muscolino G, Benfratello S, Sidoti A, "Dynamics analysis of distributed parameter system subjected to a moving oscillator with random mass, velocity and acceleration", *Probab Eng Mech*, 17, 2002, (63–72).
- [8]Chang TP, Liu MF, O HW, "Vibration analysis of a uniform beam traversed by a moving vehicle with random mass and random velocity", *Struct Eng Mech*, 31(6), 2009, (737–749).
- [9]Lu, F., Lin, J. H., Kennedy, D. Williams, F. W., "An algorithm to study non-stationary random vibrations of vehicle-bridge systems", *Comput Struct*, 87(3-4), 2009, (177-185).
- [10]Gładysz M, Śniady P, "Spectral density of the bridge beam response with uncertain parameters under a random train of moving forces", *Arch Civ Mech Eng*, 9(3), 2009, (31-47).
- [11]T.Nguyen-Xuan, Y.Kuriyama TN-D, "Random Dynamic Response Analysis of Bridge Subjected to Moving Vehicles", *J. Constr. Eng*, 6(06), 2017, (1111-1118).
- [12]X.T. Nguyen, V.D. Tran, and N.D. Hoang, "A Study on the Dynamic Interaction between Three-Axle Vehicle and Continuous Girder Bridge with Consideration of Braking Effects", *J. Constr. Eng.*, 2017, (1–12).
- [13]Gentle, James E, *Random number generation and Monte Carlo methods*, New York: springer, Vol. 381., 2003.
- [14]Ray W. Clough and Joseph Penzien, *Dynamics of structures*, McGraw- Hill, Inc. Singapore, 1993.
- [15]Zienkiewicz O.C., Taylor R.L, *The Finite Element Method*. McGraw-Hill, Inc, Vol 1&2, New York, 1989.
- [16]AASHTO., *LRFD bridge design specifications*, Washington, DC, 2012.
- [17]Tiêu chuẩn quốc gia TCVN 11823-13:2017 về Thiết kế cầu đường bộ, 2017.