

Ảnh hưởng của ngẫu nhiên đặc tính vật liệu tới dao động tự do của dầm có cơ tính biến thiên

Effect of uncertain material property on free vibration of functionally graded material beams

> NGUYỄN VĂN THUẦN

Trường Đại học Nha Trang

TÓM TẮT

Sử dụng ngẫu nhiên để phân tích dao động tự do của dầm đàn hồi với biến ngẫu nhiên là mô đun đàn hồi dựa trên phương pháp phần tử hữu hạn. Giả thiết rằng đặc tính vật liệu thay đổi theo bề dày của dầm, phân bố hàm mũ. Ngẫu nhiên tần số dao động đã được giải quyết độc lập bởi phương pháp nhiễu loạn và mô phỏng Monte Carlo. Hệ số biến thiên được khảo sát sự ảnh hưởng của mô đun đàn hồi với quá trình ngẫu nhiên đồng nhất một chiều trên sự biến thiên của tần số dao động tự nhiên.

Từ khóa: Vật liệu cơ tính biến thiên; phương pháp nhiễu loạn; dầm; phương pháp mô phỏng Monte Carlo.

ABSTRACT

Using the stochastic finite element method (SFEM) to perform the free vibration analysis of functionally graded material (FGM) beam with random Young's modulus. It is assumed that material properties vary along the beam thickness according to exponential distributions. The stochastic natural frequency problem was solved independently by first-order perturbation method and Monte Carlo simulation. The coefficient of variation is investigated into the effect of random elastic modulus with one dimensional homogeneous stochastic process on the variability of natural frequency.

Keywords: Functionally graded materials; perturbation method; beam; Monte Carlo simulation.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Vật liệu có cơ tính biến thiên (FGM) được sử dụng trong nhiều lĩnh vực kỹ thuật như trong hàng không, ô tô, y tế.... Khái niệm vật liệu có cơ tính biến thiên lần đầu được giới thiệu vào năm 1984 trong một dự án nghiên cứu về không gian bởi các nhà khoa học Nhật Bản [1]. Thực tế, quy trình chế tạo vật liệu có cơ tính biến thiên rất phức tạp và không thể tránh khỏi những sai sót. Vì thế, phân tích ngẫu nhiên là một công cụ giúp dự đoán sự phản ứng

của kết cấu khi đặc tính vật liệu là không chắc chắn. Theo hướng này, tác giả Kitipornchai và các cộng sự thảo luận ngẫu nhiên dao động tự do của tấm có cơ tính biến thiên với biên đầu vào biến đổi độc lập [2]. Trong những phân tích về kết cấu bằng vật liệu có cơ tính biến thiên, phương pháp nhiễu loạn cũng đã được sử dụng để phân tích cho bài toán dao động tự do [3]. Nghiên cứu của Jagtap và các cộng sự tập trung phân tích ngẫu nhiên dao động không tuyến tính dựa trên bài toán phần tử hữu hạn cho tấm vật liệu có cơ tính biến thiên với nhiều tham số không chắc chắn [4]. Nhà nghiên cứu Lal và cộng sự đã nghiên cứu sự biến đổi của dầm và tấm đàn hồi khi các biên đầu vào là hàm ngẫu nhiên vật liệu [5,6]. Tác giả Thuan và các đồng nghiệp đã nghiên cứu ngẫu nhiên tần số dao động tự do của dầm có cơ tính biến thiên với các biên đầu vào là mô đun đàn hồi và khối lượng riêng là các tham số biến đổi ngẫu nhiên bằng hai phương pháp mô phỏng Monte Carlo và nhiễu loạn [7, 8]. Trong nghiên cứu này, tác giả phân tích sự biến đổi của tần số dao động tự nhiên của dầm có cơ tính biến thiên dựa trên bài toán phần tử hữu hạn bằng hai phương pháp nhiễu loạn (Perturbation method - PM) và mô phỏng Monte Carlo (Monte Carlo simulation - MCS). Dầm có cơ tính biến thiên với mô đun đàn hồi được giả thiết theo quy luật hàm số mũ và là biến ngẫu nhiên.

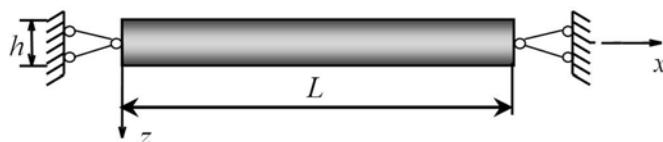
2. TÍNH TOÁN TẦN SỐ DAO ĐỘNG CỦA DẦM CÓ CƠ TÍNH BIẾN THIÊN

2.1. Mô hình dầm có cơ tính biến thiên

Trong nghiên cứu này, tác giả thiết lập mô hình dầm có cơ tính biến thiên với chiều dài của dầm là L , chiều cao H và bề rộng là b (hình 1). Mô đun đàn hồi (E) của dầm có cơ tính biến thiên được giả thiết tuân theo qui luật hàm số mũ như công thức 1.

$$E(z) = E_0 e^{|z|} \quad (1)$$

Trong đó, E_0 là mô đun đàn hồi tại trục giữa của dầm có cơ tính biến thiên.

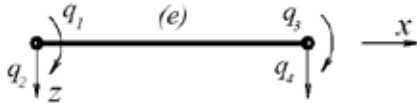


Hình 1. Mô hình dầm có cơ tính biến thiên

2.2. Phương pháp phần tử hữu hạn

Mô hình phần tử của dầm có cơ tính biến thiên được giả thiết với bốn bậc tự do như hình 2. Chuyển vị của dầm được giả thiết theo hàm bậc cao với bốn bậc tự do và được nội suy bằng hàm

Hermite. Trong đó, chuyển vị thẳng là q_2 và q_3 , chuyển vị xoay là q_1 và q_4 .



Hình 2. Phần tử dầm

Véc tơ chuyển vị phần tử của dầm

$$\{q\}_e = \{q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4\}^T \quad (2)$$

Trường chuyển vị được xác định bởi

$$w_e = \langle N \rangle \{q\}_e \quad (3)$$

trong đó hàm dạng $\langle N \rangle = \langle N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \rangle$.

Các công thức năng lượng lần lượt được thiết lập của dầm.

Năng lượng biến dạng uốn được thể hiện qua công thức:

$$U_e = \int_0^{L_e} \frac{EI}{2} \left(\frac{\partial^2 w_e}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (4)$$

Động năng của dầm chịu uốn được xác định theo công thức:

$$T_e = \int_0^{L_e} \frac{m}{2} b_e \dot{w}_e^2 dx \quad (5)$$

Thế công thức 3 vào các công thức 4 và 5 chúng ta thu được các công thức như sau:

$$U_e = \frac{1}{2} \{q\}_e^T \tilde{K}_e \{q\}_e \quad (6)$$

$$T_e = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}_e^T M_e \{\dot{q}\}_e \quad (7)$$

Sử dụng nguyên lý Hamilton và công thức biến phân chuyển động thu được công thức:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_1^N U_e - \sum_1^N T_e \right) dt = 0 \quad (8)$$

Thay các công thức 6, 7 vào công thức 8 thu được phương trình:

$$M\ddot{w} + Kw = 0 \quad (9)$$

Trường hợp này, w là chuyển vị của dầm theo phương z . N là số phần tử của dầm.

Theo nguyên lý dao động điều hòa thu được công thức tính toán dao động của dầm dưới dạng:

$$(K - \omega^2 M) \mathcal{W} = 0 \quad (10)$$

Tần số dao động của dầm được xác định bằng công thức:

$$\det(K - \omega^2 M) = 0 \quad (11)$$

Trong đó, K là ma trận độ cứng của dầm, M là ma trận khối lượng của dầm.

3. PHƯƠNG PHÁP PHI THỐNG KÊ

Phân tích ngẫu nhiên dao động tự do của dầm có cơ tính biến thiên dựa trên bài toán tiền định là phần tử hữu hạn. Trong bài báo này, tác giả chỉ thảo luận ngẫu nhiên cho mô đun đàn hồi của dầm có cơ tính biến thiên. Công thức dao động tự do khi có biến ngẫu nhiên được thể hiện như sau:

$$[K(r) - \omega^2 M] = 0 \quad (12)$$

Trong đó, K là ma trận độ cứng của dầm, M là ma trận khối lượng của dầm và r là biến ngẫu nhiên của mô đun đàn hồi.

$$E(z) = E_0 [1 + r(z)] \quad (13)$$

Từ công thức 12 áp dụng phương pháp phi thống kê, sau đó khai triển theo công thức Taylor. Các giá trị trung bình và độ lệch của tần số dao động tự do (λ) của dầm được thiết lập như công thức 14 và 15.

$$\mu_\lambda = \lambda_{ok}; \quad \lambda_{i,j} = X_i^T [K_{,j} - \lambda_i M_{,j}] X_i \quad (14)$$

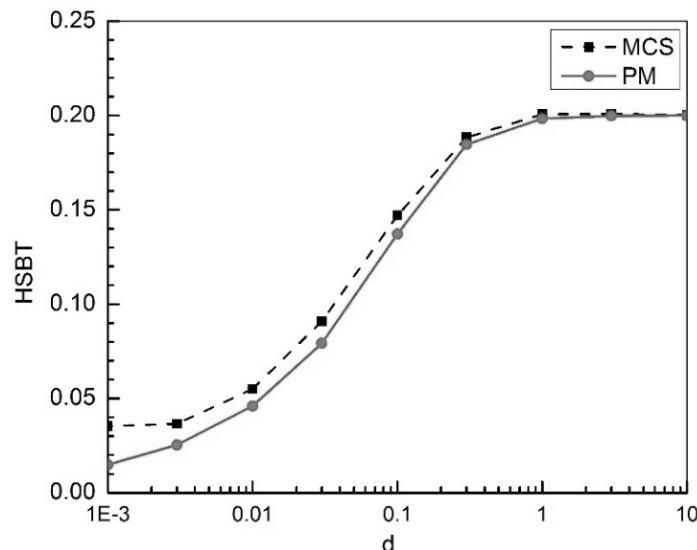
$$Var_\lambda = \sum_{i=1}^{NR} \sum_{j=1}^{NR} \lambda_{k,i} \lambda_{k,j} R_{ij} \quad (15)$$

Trong đó, R_{ij} là hàm tương quan giữa các biến, d là độ dài hệ số tương quan được giải thiết theo công thức và độ lệch chuẩn đầu vào là σ_E (15).

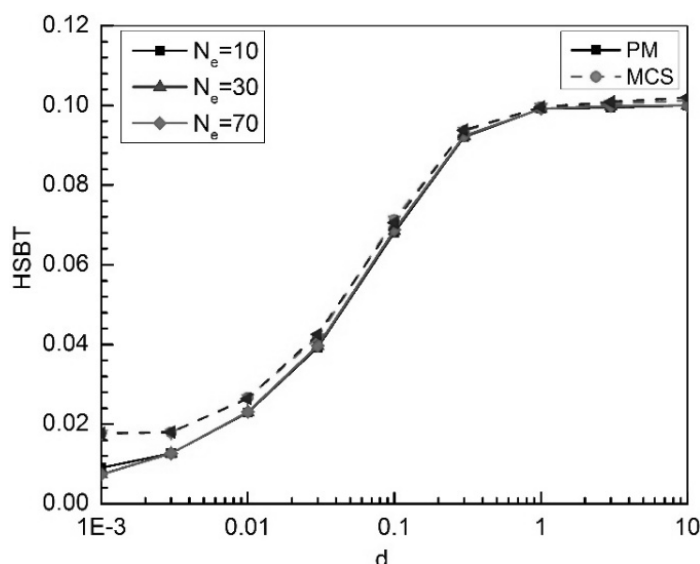
$$R_{ij}(\xi) = \sigma_E^2 \exp\left(-\frac{\xi^2}{4d^2}\right) \quad (16)$$

Tiếp theo, thiết lập công thức hệ số biến thiên (Coefficient of Variation - COV) là tỷ số giữa độ lệch chuẩn (DLC) và giá trị trung bình (TB) của tần số dao động tự do của dầm:

$$HSBT = \frac{\sqrt{DLC(Var)}}{|TB(\mu)|} \quad (17)$$



Hình 3. Hệ số biến thiên của tần số và tỷ số hệ số độ dài tương quan



Hình 4. Hệ số biến thiên của tần số dao động tự nhiên với sự khác biệt của số phần tử trong dầm

4. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

Dầm có cơ tính biến thiên phân tích trong nghiên cứu được giả thiết có chiều dài 10 m, chiều cao 1 m và chiều rộng 1 m. Mô đun đàn hồi cũng được giả thiết là $E_0 = 7.0$ GPa, mật độ khối lượng $\rho_0 = 2780.0 \text{ kg/m}^3$. Trong tất cả các trường hợp mô phỏng Monte Carlo số mẫu tính toán là 10,000.

Khảo sát dự biến đổi của hệ số biến thiên theo tỷ lệ độ dài tương quan và chiều dài dầm có cơ tính biến thiên được thể hiện trên hình 3 với độ lệch chuẩn đầu vào $\sigma_\varepsilon = 0.2$. Độ dài hệ số tương quan (d) được khảo sát có giá trị biến đổi từ 0.001 đến 10 cho cả hai phương pháp là phi thống kê và mô phỏng Monte Carlo. Với số mẫu mô phỏng Monte Carlo được chọn là 10,000. Kết quả cho thấy sự sai lệch rất nhỏ giữa mô phương pháp phi thống kê và mô phỏng Monte Carlo trong tất cả các trường hợp khảo sát. Với kết quả tin cậy này sẽ làm tiền đề cho những khảo sát tiếp theo.

Ảnh hưởng của hệ số biến thiên tần số dao động tự nhiên với sự thay đổi về số phần tử của dầm có cơ tính biến thiên được trình bày trên hình 4. Số phần tử của dầm (N_e) được chọn để khảo sát là 10, 30 và 70. Trong cả ba trường hợp khảo sát cho thấy, không có sự thay đổi đáng kể của hệ số biến thiên khi thay đổi số phần tử của dầm.

5. KẾT LUẬN

Nghiên cứu này đã trình bày sự biến thiên của tần số dao động tự nhiên của dầm có cơ tính biến thiên bằng hai phương pháp phi thống kê và mô phỏng Monte Carlo dựa trên bài toán phần tử hữu hạn. Trong tất cả các trường hợp hệ số biến thiên (COV) của tần số dao động tự nhiên là trùng lặp giữa phương pháp phi thống kê và mô phỏng Monte Carlo. Kết quả nghiên cứu cũng thể hiện hệ số biến thiên không ảnh hưởng bởi số phần tử của dầm có cơ tính biến thiên với mô đun đàn hồi tuân theo quy luật hàm số mũ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Koizumi M. (1997), FGM activities in Japan, Composite: Part B, 28, No.1-2, 1-4.
- [2]. Kitiponchai, S., Yang, J. and Liew, K., M. (2006), Random vibration of the

functionally graded laminates in thermal environments, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 195, 707–714.

[3]. Shaker, A., Abdelrahman, W., Tawfik, M. and Sadek, E. (2008), Stochastic finite element analysis of the free vibration of functionally graded material plates, Comput. Mech. 41:707–714.

[4]. Jagtap, K. R., Lal, A. and Singh, B., N. (2011), Stochastic nonlinear free vibration analysis of elastically supported functionally graded materials plate with system randomness in thermal environment, Composite structures, 93:3185–3199.

[5]. Shegokar, N. L and Lal, A. (2014), Stochastic finite element nonlinear free vibration analysis of piezoelectric functionally graded materials beam subjected to thermo-piezoelectric loadings with material uncertainties, Meccanica 49:1039–1068.

[6]. Lal, A., Singh, B., N. (2009), Stochastic nonlinear free vibration response of laminates composite plates resting on elastic foundation in thermal environments, Computational mechanics. Vol. 44, pp.15-29.

[7]. Thuan, N. V and Noh, H. C. (2016), Investigation into the effect of random material properties on the variability of natural frequency of functionally graded beam, KSCE Journal of Civil Engineering, Vol. 21, No. 4.

[8]. Thuan, N. V and Hien, T. D (2020), Stochastic perturbation-based finite element for free vibration of functionally graded beams with an uncertain elastic modulus, Mechanics of Composite Materials, Vol. 56, No.4.

[9]. Shinozuka, M., and Deidatis, G. (1991), Simulation of stochastic processes by spectral representation, Applied Mechanics Reviewers, Vol. 44, No 1.