

Tính toán xoắn kiềm chế thanh thành mỏng tiết diện hở

Calculating restrained torsion of thin-walled open-sections beams

> **VŨ LỆ QUYÊN**

Trường Đại học Kiến trúc Hà Nội; Email: lequyenvu.hau@gmail.com

TÓM TẮT

Khi mặt cắt ngang của thanh thành mỏng tiết diện hở bị xoay quanh trục thanh một góc kèm theo hiện tượng vênh, khi vênh bị ngăn cản thì trong thanh sẽ xuất hiện ứng suất pháp và ứng suất tiếp để chống lại mô men xoắn sinh ra thì đó gọi là xoắn kiềm chế. Ứng suất do xoắn kiềm chế sinh ra trong nhiều trường hợp gây ảnh hưởng đáng kể tới tổng ứng suất trong kết cấu. Hiện nay khi tính xoắn cho kết cấu thường bỏ qua và đơn giản hóa tính toán, do vậy không phản ánh đúng sự làm việc của kết cấu. Bài báo tóm tắt nguyên lý tính toán chịu xoắn kiềm chế của thanh thành mỏng tiết diện hở cùng tính toán cụ thể cho dầm chữ I theo tài liệu của Nga [1,2] nhằm làm rõ sự làm việc của kết cấu là cơ sở cho việc chọn tiết diện hợp lý.

Từ khóa: Kết cấu thép; thanh thành mỏng; thanh chịu xoắn; xoắn kiềm chế; bimomen.

ABSTRACT

When the cross-section of a open-section thin-walled bar is rotated around the bar axis by an angle accompanied by warping phenomenon, if the warping is prevented, there will be normal stress and shear stress in the bar to counteract the generated torque. It is called restrained torsion. The stress caused by restrained torsion generated in many cases significantly affects the total stress in the structure. Currently, the calculation of torsion in structures is often neglected and simplified leading to inaccurate reflection of the structure's behavior. This article summarizes the principle of calculating the restrained torsion of the open-section thin-walled beams along with specific examples for channel section beam according to Russian documents [1,2] to clarify the structural behavior and provide a basis for selecting appropriate cross-sections.

Keywords: Steel structure; thin-walled beams; warping torsion; restrained torsion; bimoment.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Kết cấu thanh thành mỏng được sử dụng rộng rãi và đa dạng trong thực tiễn xây dựng. Trong một số trạng thái làm việc kết cấu thanh thành mỏng tiết diện hở chịu tác dụng của xoắn kiềm chế dẫn đến sinh ra ứng suất đáng kể trong kết cấu. Khi tính toán kết cấu, để đơn giản hóa thường bỏ qua ảnh hưởng của xoắn kiềm chế, dẫn đến phản ánh không chính xác sự làm việc và có thể gây mất an toàn cho kết cấu. Cho tới hiện nay có một số tài liệu đề cập tới phương pháp tính xoắn kiềm chế theo quy phạm Mỹ hay châu Âu và chủ yếu cho dầm chữ I [3], tuy nhiên các nguyên lý, phương pháp tính toán kết cấu của Việt Nam hiện nay phần lớn dựa trên các tiêu chuẩn thiết kế kết cấu của Nga, do vậy việc giới thiệu quy trình tính toán dầm thép chịu xoắn theo các tài liệu của Nga rất thuận lợi và phù hợp với thực tiễn kết cấu xây dựng tại Việt Nam.

Ngoài dầm chữ I, thì dầm chữ [cũng có phạm vi ứng dụng rất rộng trong kết cấu xây dựng dùng làm dầm chịu uốn, xà gồ mái, dầm sườn tường... phần trình bày dưới đây nêu cơ sở, trình tự tính toán cấu kiện và ví dụ cụ thể của dầm chữ [chịu xoắn kiềm chế.

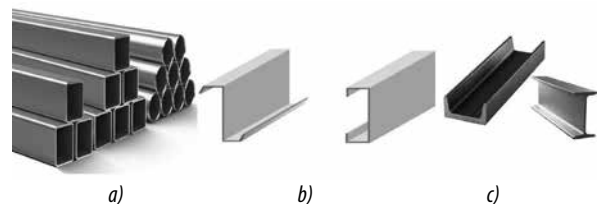
2. NGUYÊN LÝ TÍNH TOÁN XOẮN KIỀM CHẾ CHO THANH THÀNH MỎNG

Thanh có thành mỏng là thanh có độ dày thành của cấu kiện nhỏ hơn đáng kể so với đường chu tuyến và đường chu tuyến này nhỏ hơn đáng kể so với chiều dài thanh [1,4].

Thép góc và thép chữ T (cả thép cán nóng và dập nguội) không được coi là thành mỏng vì với thanh có loại tiết diện này khi xoắn không phát sinh ứng suất pháp và chúng được tính theo các công thức sức bền vật liệu thông thường [2].

Thanh có thành mỏng có thể được chia thành 2 loại (Hình 1):

- Thanh có tiết diện kín;
- Thanh có tiết diện hở.



Hình 1. a) thanh tiết diện kín; b), c) thanh tiết diện hở

Các nghiên cứu cho thấy các thanh có tiết diện kín có thể được tính toán bằng các công thức sức bền vật liệu dựa trên giả thiết về tiết diện phẳng. Sự làm việc của các thanh có tiết diện hở khác đáng kể so với thanh có tiết diện đặc và kín. Đối với các thanh có thành mỏng tiết diện hở khi chịu tải, nếu các chuyển vị dọc xảy ra mà không bị cản trở (cong vênh tự do), thì ứng suất pháp không phát sinh trong tiết diện, trường hợp này xoắn được gọi là tự do.

Ngược lại nếu cong vênh bị cản trở, thì trong các thanh thành mỏng tiết diện hở phát sinh đồng thời ứng suất pháp và các ứng suất tiếp được gọi là xoắn kiểm chế [2].

Để tính đến ảnh hưởng của xoắn kiểm chế đối với sự làm việc của thanh thành mỏng Vlasov [1] để xuất tọa độ quạt ω cũng như các đặc trưng khác: momen quán tính quạt I_ω , momen kháng uốn quạt W_ω ; momen tĩnh quạt S_ω . Các đại lượng này được xác định như sau:

$$\omega = \int_0^s r ds; S_\omega = \int_A \omega dA; I_\omega = \int_A \omega^2 dA.$$

Sự cong vênh do xoắn sinh ra nội lực là bimomen B_ω . Kết cấu chịu nén uốn hoặc kéo uốn khi không có tải trọng động được kiểm tra bền như sau [4]:

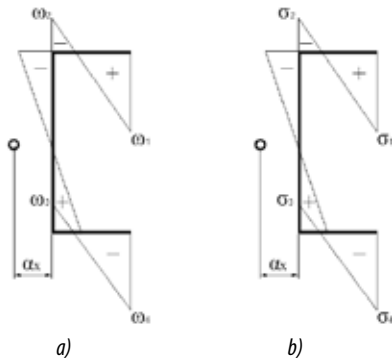
$$\left(\frac{N}{AR_y Y_c} \right)^n + \frac{M_x}{c_x W_x R_x Y_c} + \frac{M_y}{c_y W_y R_y Y_c} + \frac{B_\omega}{W_\omega R_y Y_c} \leq 1$$

Ứng suất pháp của thanh chịu xoắn kiểm chế ở giai đoạn đàn hồi được xác định bởi công thức:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{B_\omega}{W_\omega} \quad (1)$$

Trong đó ứng suất σ_ω (hình 2) được xác định bởi công thức:

$$\sigma_\omega = \frac{B_\omega}{W_\omega} = \frac{B_\omega}{I_\omega} \omega \quad (2)$$



Hình 2. a) Biểu đồ tọa độ quạt trong thanh chữ I; b) Biểu đồ ứng suất pháp sinh ra bởi bimomen trong thanh chữ I

Thanh thành mỏng tiết diện hở khi chịu xoắn kiểm chế sẽ phát sinh ứng suất tiếp τ trong tiết diện ngang, là tổng ứng suất của xoắn thuần túy τ_k và ứng suất tiếp τ_1 , trong đó τ_1 là tổng ứng suất tiếp uốn ngang của một trong hai phương $\tau_{u(x)}$ hoặc $\tau_{u(y)}$ và ứng suất tiếp sinh ra bởi xoắn kiểm chế τ_ω :

$$\tau = \frac{M_t \cdot t}{I_t} \quad (3)$$

$$\tau_1 = \tau_{u(x)} + \tau_\omega = \frac{Q_x \cdot S_y}{I_y \cdot t} + \frac{M_\omega \cdot S_\omega}{I_\omega \cdot t} \quad (4a)$$

$$\text{hoặc } \tau_1 = \tau_{u(y)} + \tau_\omega = \frac{Q_y \cdot S_x}{I_x \cdot t} + \frac{M_\omega \cdot S_\omega}{I_\omega \cdot t} \quad (4b)$$

Trong đó M_t là momen xoắn tự do; M_ω là momen xoắn kiểm chế, có tổng bằng momen xoắn tổng thể $M = M_t + M_\omega$.

Với thanh tiết diện chữ I, chỉ có ở cánh phát sinh ứng suất tiếp bởi tác dụng đồng thời của lực cắt dọc cánh và xoắn kiểm chế nên sẽ chỉ sử dụng một trong các biến thể của công thức (4) phụ thuộc vào hướng của trục của dầm. Với thanh chữ I, tác động đồng thời của uốn và xoắn kiểm chế diễn ra ở cả cánh và bụng nên sử dụng đồng thời 2 công thức (4a), (4b). Tuy nhiên tính toán ứng suất tiếp phát sinh bởi xoắn kiểm chế cho các thanh không được quy định rõ ràng ở các tài

liệu hiện hành do ảnh hưởng không lớn [2]. Vấn đề này được xem xét chi tiết hơn và với các ví dụ tính toán trong [6,7].

Khi tính đến các tải trọng tác dụng lên thanh theo cả bảy bậc tự do (biến dạng dọc trục, cắt trong hai mặt phẳng, uốn trong hai mặt phẳng, xoắn và cong vênh), hệ phương trình vi phân cân bằng chuyển vị có dạng sau:

$$\begin{cases} EA\xi'' = q_z \\ -EI_y\xi'' + q_x = 0 \\ -EI_x\eta'' + q_y = 0 \\ -EI_\omega\theta'' + G_t\theta'' + m_z - m'_B = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Trong đó EA , EI_x , EI_y , là độ cứng kéo-nén và uốn trong hai mặt phẳng; EI_ω là độ cứng cong vênh và G_t là độ cứng xoắn tự do.

Các ẩn số của hệ (5) là các hàm chuyển vị: $\zeta = \zeta_z$ dọc theo trục z; $\xi = \xi_x$, $\eta = \eta_y$ ngang theo trục x và y, θ là góc xoắn (có đạo hàm θ' tương ứng độ cong vênh)

Phương trình cân bằng xoắn kiểm chế được viết dưới dạng:

$$\theta'' - k^2\theta'' = \frac{m_z - m'_B}{EI_\omega} \quad (6)$$

Trong đó k là đặc trưng uốn-xoắn của thanh, được xác định bởi công thức

$$k = \sqrt{\frac{G_t}{EI_\omega}} \quad (7)$$

Nghiệm của phương trình (6) có dạng:

$$\theta = \theta_0(z) + \theta(z) \quad (8)$$

Trong đó: $\theta_0(z) = Ash(kz) + Bch(kz) + Cz + D$; các hằng số tích phân A, B, C, D phụ thuộc vào các điều kiện biên; $sh(kz)$ và $ch(kz)$ là các hàm sin hyperbolic và cosin hyperbolic, được tính theo công thức:

$$sh(kz) = \frac{e^{kz} - e^{-kz}}{2}; ch(kz) = \frac{e^{kz} + e^{-kz}}{2}.$$

Các nghiệm phương trình (6) áp dụng cho các sơ đồ tính kết cấu phổ biến thực tế được đưa ra trong Bảng 1.

Từ hệ phương trình (5) ta có:

$$\begin{cases} \sigma = E(\xi' - \zeta''y - \eta''x - \theta''\omega) \\ \tau = E(\zeta''' \frac{S_x(s)}{t} - \eta''' \frac{S_y(s)}{t} - \theta''' \frac{S_\omega(s)}{t}) \\ M_t = G_t\theta' \end{cases} \quad (9)$$

t - chiều dày thanh; S_x và S_y là các mômen tĩnh đối theo 2 phương x và y; S_ω là mômen tĩnh vênh.

Từ (5) và hệ phương trình (13) ta có mối liên hệ giữa bimomen và góc xoắn: $B_\omega = -EI_\omega\theta''$ (10)

Tồn tại khái niệm tâm uốn của tiết diện ngang là khi không có momen xoắn ở đó, thì momen của các lực ngang trong tiết diện ngang bằng không. Nếu momen của các lực ngang trong tiết diện khác 0, thì thanh không chỉ bị uốn mà còn xoắn. Do vậy, momen xoắn được hiểu là momen xoắn so với tâm uốn.

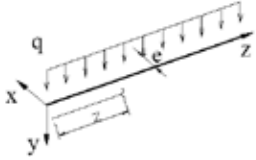
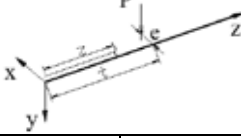
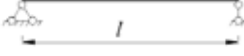
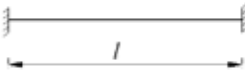
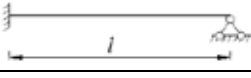
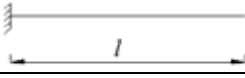
Tọa độ của tâm uốn được xác định theo công thức:

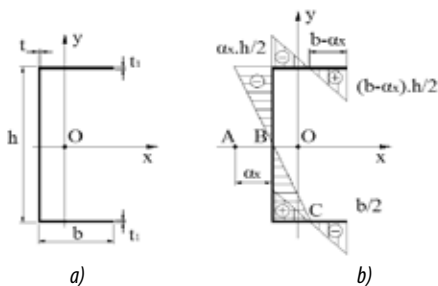
$$x = \frac{1}{I_x} \int_A \omega dA; y = \frac{1}{I_y} \int_A \omega dA.$$

Với thanh chữ I (khoảng cách từ tâm uốn đến tâm bản bụng thanh (hình 3c) được xác định theo công thức sau:

$$\alpha_x = -\frac{b^2 t_1}{2bt_1 + \frac{ht}{3}} \quad (11)$$

Bảng 1. Công thức bimomen theo sơ đồ tính và dạng tải trọng [1,2]

Dạng tải trọng		
Tải phân bố đều	Tải tập trung	
		
	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> Khi $0 \leq z \leq t$ Khi $t < z \leq l$ </div>	
		
$B_{\omega} = -\frac{m}{k^2} \left(1 - \frac{kl}{2} \frac{\text{ch}\left(k\left(z - \frac{l}{2}\right)\right)}{\text{sh}\frac{kl}{2}} \right)$	$B_{\omega} = -\frac{P \cdot e}{k} \frac{1}{\text{sh}(kl)} \cdot \text{sh}(kz)\text{sh}(k(l-t))$	$B_{\omega} = -\frac{P \cdot e}{k} \frac{1}{\text{sh}(kl)} \cdot \text{sh}(kt)\text{sh}(k(l-z))$
		
$B_{\omega} = -\frac{m}{k^2} \left(1 - \frac{\text{ch}\left(k\left(\frac{l}{2} - z\right)\right)}{\text{ch}\frac{kl}{2}} \right)$	$B_{\omega} = B_0 \text{ch}(kz) + \frac{1}{k} \cdot M_{z_0} \text{sh}(kz)$	$B_{\omega} = B_0 \text{ch}(kz) + \frac{1}{k} \cdot M_{z_0} \text{sh}(kz) + \frac{1}{k} \cdot L_t \text{sh}(k(z-t))$
	$B_{\omega} = \frac{t + (l-t)\text{ch}(kl) + \frac{1}{k} \text{sh}(kt) - \frac{1}{k} \text{sh}(kl) + \frac{1}{k} \text{sh}(k(l-t)) - l\text{ch}(k(l-t))}{2\text{ch}(kl) - kl \cdot \text{sh}(kl) - 2} L_t$	
	$M_{z_0} = \frac{1 + \text{sh}(kl) \cdot k(l-t) - \text{ch}(kl) + \text{ch}(kt) - \text{ch}(k(l-t))}{2\text{ch}(kl) - kl \cdot \text{sh}(kl) - 2} L_t$	
		
$B_{\omega} = \frac{m}{k^2} \left[1 - \text{ch}(k(l-z)) + \text{sh}(k(l-z)) \cdot \frac{1 + kl \cdot \text{sh}(kl) - \text{ch}(kl) - \frac{k^2 l^2}{2}}{kl \cdot \text{ch}(kl) - \text{sh}(kl)} \right]$	$B_{\omega} = B_0 \text{ch}(kz) + \frac{1}{k} \cdot M_{z_0} \text{sh}(kz)$	$B_{\omega} = B_0 \text{ch}(kz) + \frac{1}{k} \cdot M_{z_0} \text{sh}(kz) + \frac{1}{k} \cdot L_t \text{sh}(k(z-t))$
	$B_{\omega} = -\frac{\frac{1}{k}(l-t)\text{sh}(kl) - \frac{1}{k}\text{sh}(k(l-t))}{\frac{1}{k}\text{sh}(kl) - l \cdot \text{ch}(kl)} L_t$	$M_{z_0} = -\frac{(l-t)\text{ch}(kl) - \frac{1}{k}\text{sh}(k(l-t))}{\frac{1}{k}\text{sh}(kl) - l \cdot \text{ch}(kl)} L_t$
		
$B_{\omega} = -\frac{m}{k^2 \text{ch}(kl)} kl \cdot \text{sh}(k(l-z)) - c - \text{ch}(kl) + \text{ch}(kz)$	$B_{\omega} = B_0 \text{ch}(kz) + \frac{1}{k} \cdot M_{z_0} \text{sh}(kz)$	$B_{\omega} = B_0 \text{ch}(kz) + \frac{1}{k} \cdot M_{z_0} \text{sh}(kz) + \frac{1}{k} \cdot L_t \text{sh}(k(z-t))$
	$B_{\omega} = -\frac{1}{k} \frac{L_t}{\text{ch}(kl)} [\text{sh}(k(l-t)) - \text{sh}(kl)];$	$M_{z_0} = -L_t$



Hình 3. a) tiết diện thanh chữ U; b) Biểu đồ diện tích quạt

Trong đó b và t₁ lần lượt là chiều rộng và độ dày của bản cánh, còn h và t - chiều rộng và độ dày của bản bụng (Hình 3a).

Biểu đồ diện tích quạt ω được thể hiện trên hình 3b.

Momen quán tính quạt I_ω của thanh chữ U được xác định như sau:

$$I_{\omega} = \frac{1}{6} (b - 3\alpha_x) b^2 h^2 t_1 + \alpha_x^2 I_x \quad (12)$$

Trong đó: $I_x = -\frac{h^3 t}{12} + \frac{bh^2 t_1}{2}$

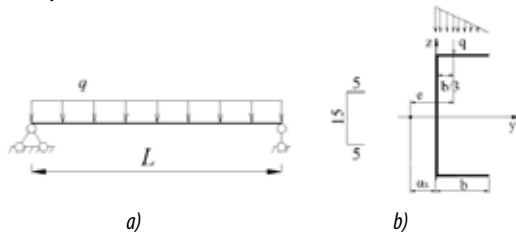
Để xác định các giá trị của bimomen và dựng biểu đồ tương ứng, cần giải phương trình vi phân (6) áp dụng các điều kiện biên. Đối với một số loại dầm đơn giản từ thanh thành mỏng, công thức xác định bimomen được lập và trình bày trong bảng 1 [1,2].

3. CÁC BƯỚC TÍNH TOÁN

Từ nguyên lý tính toán như trên ta có thể xây dựng được các bước tính toán cấu kiện như sau:

- Xác định các đặc trưng hình học uốn, xoắn;
- Xác định ứng suất do uốn;
- Xác định tâm uốn;
- Xác định độ lệch tâm của tải trọng so với tâm uốn;
- Xác định ứng suất do xoắn;
- Xác định ứng suất tổng;
- Kiểm tra bền.

4. VÍ DỤ TÍNH TOÁN



Hình 4. a). Sơ đồ tính dầm chữ [chịu tải trọng phân bố đều; b) Sơ đồ chất tải trên tiết diện
 Xét một dầm đơn giản tiết diện chữ [như hình 4, chiều dày tiết diện $t=1,5$ mm, được làm từ thép CCT34 có $R_y=23$ kN/cm²; $L=3$ m, $q=1$ kN/m, với các đặc trưng hình học như sau: diện tích tiết diện ngang $A=3,640$ cm²; momen quán tính xoắn thuần túy $I_t=0,0273$ cm⁴; momen quán tính quật $I_w=316,92$ cm⁶; momen kháng uốn theo trục y $W_y=15,83$ cm³; momen quán tính theo trục y $I_y=118,75$ cm⁴; tọa độ tâm uốn $\alpha_x=-1,682$ cm

Đặc trưng uốn-xoắn tính theo công thức (7):

$$k = \sqrt{\frac{GI_t}{EI_w}} = 0,005764(\text{cm}^{-1})$$

trong đó: $G=79000$ MPa - mô đun trượt của thép;

$E=206000$ MPa - mô đun đàn hồi của thép.

Trong nhiều trường hợp, khi tải trọng phân bố đều trên thanh đạt giá trị giới hạn có tác động đủ lớn lên cánh trên làm tiết diện không giữ được hình dạng ban đầu, để giản tiếp tính đến sự phi tuyến hình học này coi tải trọng phân bố đều trên bản cánh theo quy luật tam giác [8]. Khi đó, vectơ tải trọng sẽ đi qua trọng tâm của biểu đồ tải trọng ở khoảng cách $b/3$ tính từ mép bản bụng (hình 4b).

Độ lệch tâm của tải trọng so với tâm uốn được xác định như

$$\text{sau: } e = \alpha_x + \frac{b}{3} = 1,682 + \frac{5}{3} = 3,35(\text{cm})$$

Momen uốn lớn nhất ở giữa nhịp:

$$M_y = \frac{ql^2}{8} = \frac{1 \cdot 3^2}{8} = 1,125(\text{kN.m}) = 112,5(\text{kN.cm})$$

Bimomen được phân bố dọc theo chiều dài dầm xác định theo

$$\text{công thức bảng 1 (hình 5a): } B_w = \frac{q \cdot e}{k^2} \left(1 - \frac{\text{ch} \frac{k(1-2x)}{2}}{\text{ch} \frac{kl}{2}} \right)$$

Giá trị bimomen lớn nhất:

$$B_w = \frac{q \cdot e}{k^2} \left(1 - \frac{1}{\text{ch} \frac{kl}{2}} \right) = \frac{0,01 \cdot 3,35}{0,005764^2} \left(1 - \frac{1}{1,398} \right) = 287,06(\text{kN.cm}^2)$$
 Các

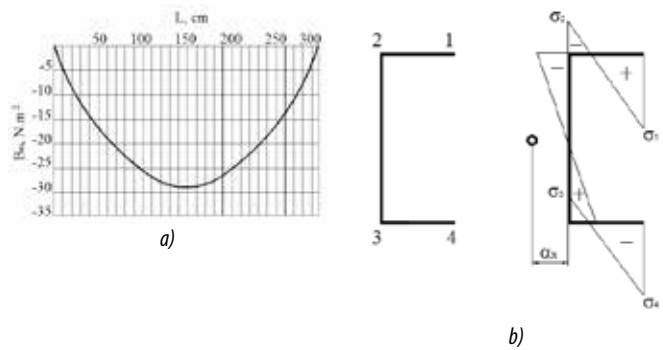
ứng suất pháp lớn nhất $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ phát sinh tại tiết diện ở giữa nhịp nằm tại 4 điểm tương ứng 1, 2, 3 và 4 của tiết diện (Hình 5b) có giá trị là:

$$\sigma_1 = \sigma_{x1} + \sigma_{\omega1} = -\frac{M_y}{W_y} + \frac{B_w}{I_w} \omega_1 = -7,12 + 22,61 = 15,49(\text{kN/cm}^2)$$

$$\sigma_2 = \sigma_{x2} + \sigma_{\omega2} = -\frac{M_y}{W_y} - \frac{B_w}{I_w} \omega_2 = -7,12 - 11,42 = -18,54(\text{kN/cm}^2)$$

$$\sigma_3 = \sigma_{x3} + \sigma_{\omega3} = +\frac{M_y}{W_y} + \frac{B_w}{I_w} \omega_2 = 7,12 + 11,42 = 18,54(\text{kN/cm}^2)$$

$$\sigma_4 = \sigma_{x4} + \sigma_{\omega4} = +\frac{M_y}{W_y} - \frac{B_w}{I_w} \omega_1 = 7,12 - 22,61 = -15,49(\text{kN/cm}^2)$$



Hình 5. a) Biểu đồ bimomen trong dầm đơn giản chịu tải trọng phân bố đều lệch tâm; b) Biểu đồ ứng suất pháp trong tiết diện ngang

Các giá trị ứng suất pháp lớn nhất $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ phát sinh tại tiết diện có nội lực lớn nhất nằm ở giữa nhịp được trình bày trong Bảng 2.

Kiểm tra bền do ứng suất pháp:

$$\sigma_{\max} = 18,54(\text{kN/cm}^2) \leq \gamma_c \cdot R_y = 1,23 = 23(\text{kN/cm}^2) \rightarrow \text{đảm bảo.}$$

Bảng 2. Ứng suất tại vị trí có nội lực lớn nhất trong thanh

Vị trí	σ_x, MPa		
	Ứng suất uốn	Ứng suất xoắn (do bimomen)	Tổng ứng suất
1	-71,2	+226,1	+154,9
2	-71,2	-114,2	-185,4
3	+71,2	114,2	+185,4
4	+71,2	-226,1	-154,9

5. KẾT LUẬN

Bài báo trình bày nguyên lý và phương pháp tính toán kiểm chế cho thanh thành mỏng chữ [xác định được trạng thái ứng suất của kết cấu từ đó có cơ sở để lựa chọn tiết diện hợp lý.

Qua kết quả ví dụ tính toán toán có thể thấy ảnh hưởng đáng kể của ứng suất do xoắn kiểm chế so với tổng ứng suất sinh ra.

Trên cơ sở nguyên lý tính toán, bài báo đã trình bày công thức tính bimomen cho một số sơ đồ tính kết cấu phổ biến, giúp đơn giản hóa và thuận tiện tính toán xoắn kiểm chế, nhằm phản ánh đúng sự làm việc của kết cấu.

Các tài liệu giáo trình tính toán hiện nay ít đề cập tới việc tính toán thanh thành mỏng chịu xoắn kiểm chế, do vậy việc đưa vào áp dụng nguyên lý tính toán xoắn kiểm chế là cần thiết và có ý nghĩa thực tế trong công tác thiết kế công trình thép.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Власов В.З, "Тонкостенные упругие стержни", Физматгиз, 1959;
2. С. М. Тихонов, В. Н. Алехин, З. В. Беляева, "Проектирование металлических конструкций", Изд Перо, 2020;
3. Vũ Quốc Anh, Vũ Quang Duẩn, "Tính xoắn dầm thép chữ H bằng biểu đồ theo quy phạm Mỹ AISC", Tạp chí KHCN Xây dựng, số 1, 2015, p.67-73;
4. Бычков Д.В., "Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций", Госстройиздат, 1962.
5. СП 16.13330.2017, "Стальные конструкции, Актуализированная редакция", Москва, 2016;
6. Рыбаков В. А. "Основы строительной механики легких стальных тонкостенных конструкций", Изд Политехн, 2018;
7. Ватин Н. И., "Конструирование зданий и сооружений, Легкие стальные тонкостенные конструкции: учеб. руководство", Политехн. ун-та, 2012, p.266 с.
8. Лалин В.В., Рыбаков В.А., Морозов С.А., "Исследование конечных элементов для расчета тонкостенных стержневых систем", Magazine of Civil Engineering, №1, 2012, p.61