

Mô phỏng dầm bê tông cốt thép chịu uốn bằng tiếp cận bán giải tích

Modelling of a reinforced concrete beam using an semi-analytical approach

> TS CHU THANH BÌNH¹, NGÔ THÀNH LONG², TS ĐẶNG XUÂN HÙNG¹

¹Khoa XDDD và CN, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội; Email: binhct@huce.edu.vn

²Lớp 65XF, Khoa XDDD và CN, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội

TÓM TẮT

Bài báo xây dựng mô hình mô phỏng dầm bê tông cốt thép chịu uốn bằng tiếp cận bán giải tích trên cơ sở lý thuyết dầm Timoshenko và phương pháp Pb-Ritz. Chương trình tính toán số được lập trình trên nền Matlab cho phép xác định trường chuyển vị, biến dạng và ứng suất trong dầm. Kết quả mô phỏng được kiểm chứng so với kết quả thực nghiệm uốn bốn điểm dầm bê tông cốt thép để chứng minh độ tin cậy của mô hình và chương trình tính đã xây dựng. Các khảo sát và phân tích sau đó làm rõ đặc điểm phân bố ứng suất trên mặt cắt ngang và trên toàn bộ chiều dài dầm, cũng như đóng góp của bê tông và cốt thép đến sự làm việc của dầm.

Từ khóa: Dầm bê tông cốt thép; tiếp cận bán giải tích; lý thuyết dầm Timoshenko; phương pháp Pb-Ritz.

ABSTRACT

This paper presents a semi-analytical model of a reinforced concrete beam based on the Timoshenko beam theory and the Pb-Ritz method. The programming performed on the Matlab platform allows us to determine the displacement, strain, and stress fields in the beam. The result is then compared with the empirical tests to validate the modelling. Numerical studies are performed to clarify the stress distribution on a cross section and on all beam domains, as well as the contribution of concrete and steel to the stiffness of the beam.

Keywords: Reinforced concrete beam; semi-analytical approach; timoshenko beam theory; Pb-Ritz method.

1. GIỚI THIỆU

Nghiên cứu ứng xử của dầm bê tông cốt thép luôn là một vấn đề thu hút sự quan tâm của nhiều nhà khoa học. Do tính chất phức tạp trong ứng xử đồng thời của bê tông và cốt thép nên các nghiên cứu thực nghiệm đã được tiến hành trước, làm cơ sở kiểm chứng cho các nghiên cứu mô hình hóa về sau.

Các nghiên cứu mô phỏng ứng xử của dầm bê tông cốt thép thường sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn và kiểm chứng so với kết quả thực nghiệm. Năm 2001, Ferreira và cộng sự [6] nghiên cứu

mô hình hóa dầm bê tông gia cường cốt sợi FRP (fiber-reinforced polymers) thay cho cốt thép, sử dụng phần tử vỏ xây dựng trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất để có thể mô phỏng vật liệu composite lớp. Nghiên cứu về dầm bê tông cốt thép bị ăn mòn, Coronelli và cộng sự [3] sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn phi tuyến, trong đó bổ sung thêm phần tử mô phỏng lớp vỏ bị ăn mòn của cốt thép. Vecchio và cộng sự, năm 2004, kiểm chứng lại kết quả thực nghiệm của Bresler và Scordelis thực hiện trên một nhóm dầm bê tông cốt thép từ 40 năm về trước để hiệu chỉnh mô hình phần tử hữu hạn. Sử dụng mô hình phần tử hữu hạn hai chiều (2D finite element), Coronelli và cộng sự [2] mô phỏng ứng xử cắt của dầm bê tông cốt thép. Cùng cách tiếp cận đó, Júnior và cộng sự [10], Campione và cộng sự [1], Stramandinoli [12], Đặng [5] mô phỏng sự phá hủy và ứng xử uốn, cắt của dầm bê tông cốt thép và cốt sợi. Điểm chung của các nghiên cứu này là các mô hình phần tử hữu hạn được phát triển và lập trình bởi chính các tác giả. Một số nhóm tác giả cũng sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn để tiến hành các mô phỏng ứng xử của dầm bê tông cốt thép và kiểm chứng với thực nghiệm nhưng dùng các phần mềm thương mại như ANSYS [9], [4], ANTENA [13] hay ABAQUS [11].

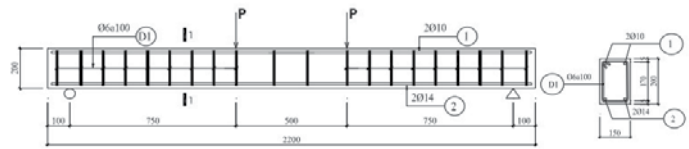
Một số mô hình giải tích mô phỏng ứng xử của dầm bê tông cốt thép dựa trên tiếp cận giải tích cũng được quan tâm nghiên cứu. Wang và cộng sự [16], năm 2003, xây dựng mô hình giải tích của dầm bê tông tiết diện chữ I, gia cường bằng cốt sợi carbon. Nghiên cứu này mặc dù đưa ra được các đường cong quan hệ tải - độ võng và một số chỉ số khác nhưng chưa thể hiện được hình ảnh của các trường chuyển vị, ứng suất trên toàn miền dầm. Một tiếp cận giải tích khác của nhóm tác giả Trần và cộng sự [14] nghiên cứu phương pháp tính toán dầm bê tông cốt thép chịu uốn xiên nhưng cũng chỉ dừng lại ở một số tiết diện mà chưa đưa ra được bức tranh tổng thể về sự làm việc của kết cấu.

Bài báo hướng đến xây dựng mô hình mô phỏng dầm bê tông cốt thép chịu uốn, sử dụng lý thuyết dầm Timoshenko và phương pháp Pb-Ritz. Trên cơ sở nguyên lý thế năng toàn phần cực tiểu và hàm xấp xỉ chuyển vị dạng đa thức, bài báo xây dựng biểu thức giải tích của các thành phần chuyển vị, biến dạng, ứng suất trong bê tông và thép. Chương trình tính toán được lập trình trên nền Matlab và được kiểm chứng với kết quả thực nghiệm uốn bốn điểm dầm bê tông cốt thép. Kết quả đạt được của bài báo tuy chỉ dừng lại ở giới hạn đàn hồi nhưng sẽ là nguồn tham khảo hữu ích để kiểm chứng các kết quả mô phỏng bằng các phương pháp số.

2. SƠ ĐỒ VÀ KẾT QUẢ THÍ NGHIỆM UỐN BỐN ĐIỂM DẦM BÊ TÔNG CỐT THÉP

Thí nghiệm uốn bốn điểm dầm bê tông cốt thép được thực hiện bởi phòng thí nghiệm LASXD 125 của Trường Đại học Xây dựng Hà

Nội. Thông số kích thước, vật liệu và kết quả đo độ võng lớn nhất tại vị trí giữa dầm trong nghiên cứu này được cung cấp bởi phòng thí nghiệm LASXD 125. Hình 1 thể hiện sơ đồ thí nghiệm uốn bốn điểm và cấu tạo của dầm bê tông cốt thép. Kết quả đo độ võng lớn nhất tại vị trí giữa dầm được giới thiệu trong Bảng 1. Trong đó, bê tông có cấp độ bền B25 ($E_b = 3000 \text{ kN/cm}^2, \nu_b = 0,2$) và thép CI, AI ($E_t = 21000 \text{ kN/cm}^2, \nu_t = 0,2$).



Hình 1. Sơ đồ thí nghiệm uốn bốn điểm và cấu tạo của dầm bê tông cốt thép [LASXD 125]

Bảng 1. Độ võng lớn nhất tại vị trí giữa dầm trong thí nghiệm uốn bốn điểm [LASXD 125]

Tải trọng P (kN)	0	0,2	0,55	0,9	0,95	1,3	2,35	2,55	2,6	2,6	2,65	2,7	3,3	3,3	3,35	3,55	3,65	3,7	3,75
Độ võng $\times 10^{-2}$ (mm)	0	2,5	5	7,5	7,5	11,5	19,5	23	24	24	25	26	31,5	31,5	32,5	34	37	37	38

3. MÔ HÌNH BÁN GIẢI TÍCH UỐN BỐN ĐIỂM DẦM BÊ TÔNG CỐT THÉP

Trong mục này, bài báo tiến hành xây dựng mô hình bán giải tích mô phỏng thí nghiệm uốn bốn điểm của dầm bê tông cốt thép trên cơ sở lý thuyết dầm Timoshenko [8] và phương pháp Pb-Ritz [7]. Lý thuyết dầm Timoshenko dựa trên giả thiết cơ bản là mặt cắt ngang của dầm trước và sau biến dạng luôn phẳng và không nhất thiết phải vuông góc với trục dầm. Phương pháp Pb-Ritz dựa trên nguyên lý thế năng toàn phần cực tiểu và hàm xấp xỉ trường chuyển vị dạng đa thức.

3.1. Trường chuyển vị

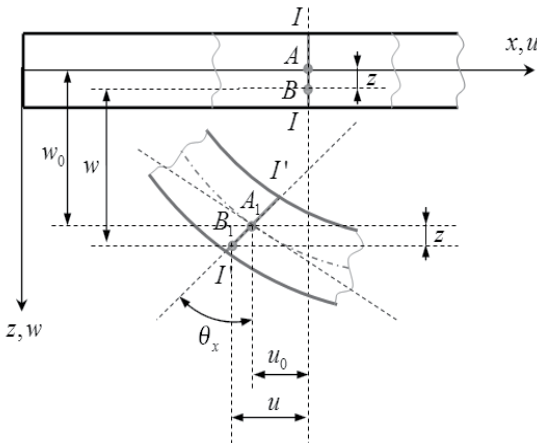
Trường chuyển vị của một điểm bất kỳ có tọa độ z theo lý thuyết dầm Timoshenko được định nghĩa bởi:

$$\begin{aligned} u(x, z, t) &= u_0(x, t) - z\theta_x \\ w(x, z, t) &= w_0(x, t) \end{aligned} \quad (1)$$

Trong đó: u_0, w_0 là các chuyển vị của điểm trên mặt trung bình theo các phương x, z ; θ_x là góc xoay của mặt cắt ngang của dầm tại điểm đang xét quanh trục y như thể hiện trên Hình 2.

3.2. Trường biến dạng

Trường biến dạng trong cả bê tông và cốt thép đều được xác định từ quan hệ giữa chuyển vị - biến dạng theo lý thuyết đàn hồi và được viết dưới dạng biểu thức (2).



Hình 2. Sơ đồ biến dạng và các thành phần chuyển vị của điểm bất kỳ theo lý thuyết dầm Timoshenko

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= u_{,x} = u_{0,x} - z.\theta_{x,x} \\ \gamma_{xz} &= 2\varepsilon_{xz} = u_{,z} + w_{,x} = w_{0,x} - \theta_x \end{aligned} \quad (2)$$

Phương trình (2) có thể viết dưới dạng ma trận như sau.

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{0,x} \\ \theta_{x,x} \\ w_{0,x} \\ \theta_x \end{bmatrix} \quad (3)$$

3.3. Trường ứng suất

Trường ứng suất trong bê tông và trong cốt thép được xác định từ trường biến dạng thông qua định luật Hooke. Trong đó $(E_b, \nu_b), (E_t, \nu_t)$ lần lượt là mô đun đàn hồi và hệ số Poisson của bê tông và cốt thép.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xb} \\ \sigma_{zxb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11b} & 0 \\ 0 & C_{66b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xt} \\ \sigma_{xzt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11t} & 0 \\ 0 & C_{66t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}$$

Trong đó:

$$\begin{aligned} C_{11b} &= E_b ; \quad C_{66b} = \frac{E_b}{2(1+\nu_b)} \\ C_{11t} &= E_t ; \quad C_{66t} = \frac{E_t}{2(1+\nu_t)} \end{aligned} \quad (5)$$

Trường ứng suất được xác định thông qua trường chuyển vị như sau:

$$[\sigma_b] = \begin{bmatrix} \sigma_{xb} \\ \sigma_{zxb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11b} & -zC_{11b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{66b} & -C_{66b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{0,x} \\ \theta_{x,x} \\ w_{0,x} \\ \theta_x \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$[\sigma_t] = \begin{bmatrix} \sigma_{xt} \\ \sigma_{xzt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11t} & -zC_{11t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{66t} & -C_{66t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{0,x} \\ \theta_{x,x} \\ w_{0,x} \\ \theta_x \end{bmatrix}$$

3.4. Thế năng biến dạng đàn hồi

Thế năng biến dạng đàn hồi trong dầm bê tông cốt thép được xác định bằng tổng thế năng biến dạng đàn hồi trong bê tông và thế năng đàn hồi trong cốt thép.

$$U = U_b - U_{lb} + U_t + U_{td} \quad (7)$$

Trong đó: U_b là thế năng biến dạng đàn hồi của bê tông trong toàn miền dầm (kể cả phần không gian cho cốt thép); U_{lb} là thế năng biến dạng đàn hồi của phần bê tông thay thế bởi cốt thép dọc (bỏ qua phần không gian cho cốt đai), U_t là phần thế năng

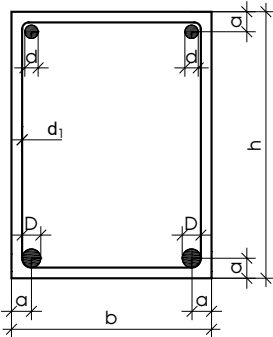
biến dạng đàn hồi trong cốt thép dọc và U_{td} là phần thế năng biến dạng đàn hồi trong thép đai.

Xét dầm có kích thước $L \times b \times h$ và ký hiệu các kích thước chi tiết trên mặt cắt ngang dầm như thể hiện trên Hình 3. Khoảng cách giữa các cốt đai ký hiệu là a . Khi đó các thành phần thế năng trong biểu thức (7) được xác định như sau:

- Thế năng biến dạng đàn hồi của bê tông trong toàn miền của dầm.

$$U_b = \frac{1}{2} b \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xxb} \varepsilon_{xx} + \sigma_{xzb} \varepsilon_{xz}) dx dz \quad (8)$$

- Thế năng biến dạng đàn hồi của phần bê tông thay thế bởi cốt thép dọc.



Hình 3. Ký hiệu các kích thước chi tiết trên mặt cắt ngang của dầm bê tông cốt thép

$$U_{tb} = n_t b \int_0^L \int_{h/2-a}^{h/2-a} \frac{1}{2} (\sigma_{xxb} \varepsilon_{xx} + \sigma_{xzb} \varepsilon_{xz}) 2 \sqrt{\frac{d^2}{4} - \left(z - \left(\frac{h}{2} - a - d \right) \right)^2} dx dz + n_d b \int_0^L \int_{-h/2+a}^{-h/2+a+D} \frac{1}{2} (\sigma_{xxb} \varepsilon_{xx} + \sigma_{xzb} \varepsilon_{xz}) 2 \sqrt{\frac{D^2}{4} - \left(z - \left(-\frac{h}{2} + a + \frac{D}{2} \right) \right)^2} dx dz \quad (9)$$

Trong đó n_t, n_d lần lượt là số lượng thanh thép dọc lớp trên và lớp dưới của dầm.

- Thế năng biến dạng đàn hồi trong cốt thép dọc.

$$U_{tb} = n_t b \int_0^L \int_{h/2-a}^{h/2-a} \frac{1}{2} (\sigma_{xxt} \varepsilon_{xx} + \sigma_{xzt} \varepsilon_{xz}) 2 \sqrt{\frac{d^2}{4} - \left(z - \left(\frac{h}{2} - a - d \right) \right)^2} dx dz + n_d b \int_0^L \int_{-h/2+a}^{-h/2+a+D} \frac{1}{2} (\sigma_{xxt} \varepsilon_{xx} + \sigma_{xzt} \varepsilon_{xz}) 2 \sqrt{\frac{D^2}{4} - \left(z - \left(-\frac{h}{2} + a + \frac{D}{2} \right) \right)^2} dx dz \quad (10)$$

- Thế năng biến dạng đàn hồi trong cốt đai.

Cốt đai khi dầm chưa biến dạng có chiều cao là $h_d = h - 2a$.

Sau khi dầm biến dạng, mặt cắt ngang của dầm vẫn phẳng và xoay một góc θ_x so với phương ban đầu (Hình 2) nên thép đai bị kéo dãn và có chiều cao mới được xác định bởi.

$$h_{1d} = \frac{h_d}{\cos \theta_x} = \frac{h_d}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_x}} \approx \frac{h_d}{\sqrt{1 - \theta_x^2}} \quad (11)$$

Khi đó độ dãn dài của thép đai được xác định bởi:

$$\Delta = h_d - h_{1d} = h_d \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \theta_x^2}} \right) \quad (12)$$

Giả thiết thép đai được kéo dãn đều theo chiều cao, khi đó biến dạng tỷ đối trong thép đai được tính bởi tỷ số giữa độ dãn dài tuyệt đối trên chiều cao ban đầu.

$$\varepsilon_d = \frac{\Delta}{h_d} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \theta_x^2}} \right) \quad (13)$$

Ứng suất kéo trong thép đai sẽ đồng nhất và được xác định thông qua định luật Hooke.

$$\sigma_{td} = E_t \varepsilon_d \quad (14)$$

Khi đó thế năng biến dạng đàn hồi trong thép đai được xác định bởi (bỏ qua thế năng trong cạnh chiều rộng thép đai).

$$U_{td} = 2 \sum_{i=1}^{m_d} \frac{1}{2} \left(\sigma_{td}^i \varepsilon_d^i h_d \frac{\pi d_1^2}{4} \right) \quad (15)$$

Trong đó m_d là số lượng thanh thép đai trong dầm.

3.5. Thế năng của ngoại lực

Thế năng của ngoại lực được xác định bởi.

$$V = -\frac{1}{2} P w(x_{01}) - \frac{1}{2} P w(x_{02}) \quad (16)$$

Trong đó x_{01}, x_{02} lần lượt là vị trí của các tải trọng tập trung trong thí nghiệm uốn bốn điểm. Trong nghiên cứu này

$$x_{01} = \frac{3L}{8}; x_{02} = \frac{5L}{8}.$$

3.6. Nguyên lý thế năng toàn phần cực tiểu

Thế năng toàn phần của dầm bê tông cốt thép được xác định bằng tổng thế năng biến dạng đàn hồi và thế năng của ngoại lực.

$$\Pi = U + V \quad (17)$$

Theo nguyên lý thế năng toàn phần cực tiểu thì hàm thế năng toàn phần của dầm phải đạt được điều kiện dừng.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_0} = 0; \frac{\partial \Pi}{\partial w_0} = 0; \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_x} = 0 \quad (18)$$

3.7. Phương pháp Pb-Ritz

Phương pháp Pb-Ritz dựa trên hàm xấp xỉ chuyển vị dạng chuỗi đa thức (polynomial) thỏa mãn các điều kiện biên về chuyển vị và được viết dưới dạng [7].

$$u_0(x) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x)$$

$$w_0(x) = \sum_{j=1}^n d_j \psi_j(x) \quad (19)$$

$$\theta_x(x) = \sum_{k=1}^n e_k \phi_k(x)$$

Trong đó c_i, d_j, e_k là các hệ số chưa biết và cần xác định; $\varphi_i(x), \psi_j(x), \phi_k(x)$ là các hàm đa thức có bậc tăng dần thỏa mãn các điều kiện biên về chuyển vị.

$$\varphi_i(x) = f_u x^{i-1}; \psi_j(x) = f_w x^{j-1}; \phi_k(x) = f_\theta x^{k-1} \quad (i, j, k = 1, 2, \dots, n) \quad (20)$$

Trong đó n là số số hạng trong chuỗi đa thức và $f_u = x^{p_u} (L - x)^{q_u}$ với p_u, q_u ($*$ = u, w, θ) là các hằng số đặc trưng cho các điều kiện biên khác nhau và được cho trong Bảng 2.

Bảng 2. Giá trị của các hằng số đặc trưng cho các điều kiện biên khác nhau (Ngàm – N, Khớp – K, Tự do – T)

Điều kiện biên	N-N	K-K	N-T	N-K
p_u	1	1	1	1
q_u	1	1	0	0
p_w	2	1	2	2
q_w	2	1	0	1
p_θ	1	0	1	1
q_θ	1	0	0	0

Các hàm xấp xỉ chuyển vị dạng chuỗi đa thức (19) được thay vào các biểu thức từ (1) đến (17) để xác định thế năng toàn phần của dầm theo các hệ số chưa biết c_i, d_j, e_k . Hệ phương trình cân bằng dùng để xác định các hệ số này được rút ra từ nguyên lý thế năng toàn phần cực tiểu (18).

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_i} = 0; \frac{\partial \Pi}{\partial d_j} = 0; \frac{\partial \Pi}{\partial e_k} = 0 \quad (i, j, k = 1, 2, \dots, n) \quad (21)$$

Hệ phương trình (21) là một hệ $3n$ phương trình phi tuyến $3n$ ẩn số do thành phần thế năng biến dạng đàn hồi trong thép đai có dạng phi tuyến. Để giải hệ phương trình này, bài báo sử dụng thuật toán giải lặp Newton-Raphson.

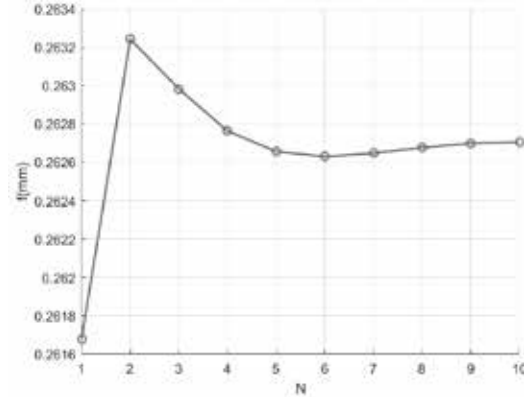
4. KẾT QUẢ MÔ PHỎNG SỐ

Chương trình tính toán mô phỏng số dầm bê tông cốt thép được nhóm tác giả lập trình trên nền Matlab, sử dụng thuật toán giải lặp Newton-Raphson. Trong mục này, trước hết bài báo tiến hành khảo sát sự hội tụ của kết quả khi số số hạng trong chuỗi đa thức (19) tăng dần. Kết quả mô phỏng được kiểm chứng thông qua so sánh với kết quả thực nghiệm (Bảng 1) để chứng minh độ tin cậy của chương trình đã xây dựng. Các khảo sát sau đó làm rõ đặc điểm phân bố ứng suất trên mặt cắt ngang, trên toàn miền dầm và đóng góp của bê tông, thép đến độ cứng của dầm.

4.1. Khảo sát sự hội tụ của kết quả mô phỏng

Chúng ta biết rằng hàm xấp xỉ chuyển vị (19) có dạng chuỗi của các hàm đa thức với bậc tăng dần. Khi số số hạng của chuỗi càng tăng thì kết quả thu được càng chính xác. Tuy nhiên việc tăng

số số hạng của chuỗi cũng làm tăng khối lượng và thời gian tính toán. Qua khảo sát này, bài báo sẽ chọn ra số số hạng phù hợp đảm bảo độ chính xác của kết quả và có khối lượng, thời gian tính toán bé nhất. Kết quả khảo sát độ võng tại vị trí giữa dầm khi số số hạng trong chuỗi hàm xấp xỉ chuyển vị tăng dần từ 1 đến 10 được giới thiệu trong Bảng 3 và được thể hiện dưới dạng đồ thị trên Hình 4. Chúng ta có thể nhận thấy giá trị của độ võng hội tụ khi $n = 5$. Sai số so của giá trị khảo sát sau so với giá trị liền trước chỉ ở mức 0% - 0,038%. Kết quả này cho phép nhóm tác giả chọn $n = 5$ trong các khảo sát tiếp theo.



Hình 4. Sự hội tụ của độ võng tại giữa dầm khi số số hạng trong chuỗi hàm xấp xỉ chuyển vị tăng dần

Bảng 3. Bảng giá trị độ võng tại giữa dầm khi số số hạng trong chuỗi hàm xấp xỉ chuyển vị tăng dần

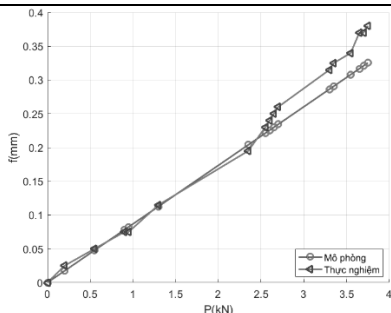
N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f (mm)	0,02617	0,02632	0,02630	0,02628	0,02627	0,02626	0,02626	0,02627	0,02627	0,02627
Sai số (%)		0,573	0,076	0,076	0,038	0,038	0,000	0,038	0,000	0,000

4.2. Kiểm chứng độ tin cậy của chương trình tính

Để đánh giá độ tin cậy của mô hình và chương trình tính đã xây dựng, bài báo tiến hành so sánh kết quả mô phỏng với kết quả thí nghiệm uốn bốn điểm dầm bê tông cốt thép của phòng thí nghiệm LASXD 125 của Trường Đại học Xây dựng Hà Nội (Bảng 1).

Bảng 4. Bảng giá trị độ võng mô phỏng và thí nghiệm uốn bốn điểm dầm bê tông cốt thép

Tải trọng P (kN)	0	0,2	0,55	0,9	0,95	1,3	2,35	2,55	2,6	2,6	2,65	2,7	3,3	3,3	3,35	3,55	3,65	3,7	3,75
Thực nghiệm $f \times 10^{-2}$ (mm)	0	2,5	5	7,5	7,5	11,5	19,5	23	24	24	25	26	31,5	31,5	32,5	34	37	37	38
Mô phỏng $f \times 10^{-2}$ (mm)	0	1,74	4,8	7,8	8,2	11,3	20,4	22,1	22,6	22,6	23,0	23,4	28,6	28,6	29,1	30,8	31,7	32,1	32,5



Hình 5. So sánh kết quả mô phỏng và kết quả thí nghiệm uốn bốn điểm dầm bê tông cốt thép

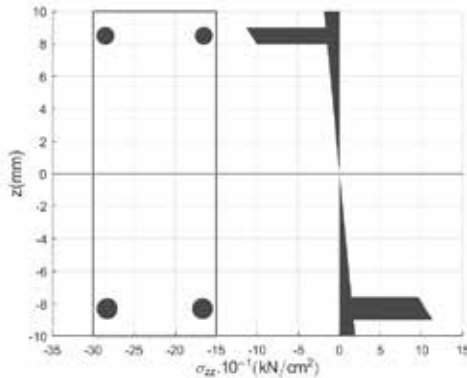
Hình 5 và Bảng 4 thể hiện so sánh kết quả độ võng mô phỏng và thực nghiệm tại giữa dầm khi tải trọng tăng dần. Chúng ta có thể quan sát thấy sự phù hợp giữa kết quả mô phỏng và kết quả thực nghiệm. Kết quả này chứng minh độ tin cậy của mô hình và chương trình tính toán mà bài báo đã xây dựng.

4.3. Phân bố ứng suất theo chiều cao tiết diện và trên toàn miền của dầm

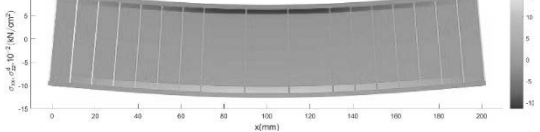
Hình 6 thể hiện phân bố ứng suất trong bê tông và trong cốt thép theo chiều cao tiết diện dầm với $P = 3$ kN. Do giả thiết mặt cắt ngang phẳng và mô hình mô phỏng chỉ giới hạn trong miền đàn hồi của dầm nên phân bố ứng suất theo chiều cao dầm có dạng hàm bậc nhất. Trong đó do thép và bê tông có mô đun đàn hồi khác nhau nên giá trị ứng suất trong bê tông và cốt thép khác nhau.

Hình 7 thể hiện dạng biến dạng và phân bố ứng suất trong bê tông và trong cốt thép của dầm. Trong mô phỏng này, chỉ xét đến phần dầm nằm giữa hai gối. Cường độ màu sắc cho phép phân biệt vùng bê tông và cốt thép dọc lớp trên chịu nén, vùng bê tông

và cốt thép dọc lớp dưới chịu kéo. Có thể nhận thấy ứng suất ở vùng giữa dầm là lớn nhất và giảm dần về hai phía. Ngược lại các cốt đai chịu kéo với ứng suất lớn nhất ở hai vùng gần gối và giảm dần ở khu vực giữa dầm. Một điểm đặc biệt là lực cắt giữa hai điểm đặt lực trong thí nghiệm uốn bốn điểm bằng 0, nhưng trên thực tế, các mặt cắt ngang trong vùng này vẫn có góc xoay nên cốt đai trong vùng này vẫn bị kéo dãn và vẫn có ứng suất kéo. Tuy nhiên càng tiến vào khu vực giữa dầm thì góc xoay của các mặt cắt ngang càng giảm nên ứng suất kéo trong cốt đai giảm dần từ hai gối vào giữa dầm như quan sát trên Hình 7.



Hình 6. Phân bố ứng suất trong bê tông và cốt thép theo chiều cao tiết diện dầm



Hình 7. Dạng biến dạng và phân bố ứng suất trong bê tông và cốt thép trên toàn miến của dầm

4.4. Ảnh hưởng của mật độ cốt đai

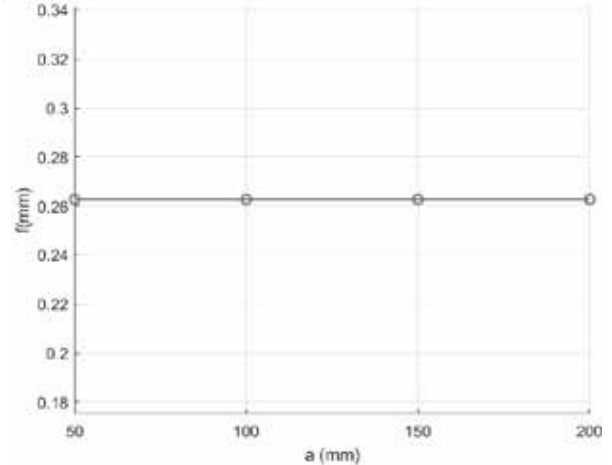
Để đánh giá ảnh hưởng của cốt đai đến độ võng của dầm, bài báo tiến hành khảo sát với bốn khoảng cách cốt đai a 50,100,150,200. Tải trọng $P = 3\text{kN}$ và các thông số còn lại được lấy như trong thí nghiệm uốn bốn điểm. Kết quả khảo sát được thể hiện trong Bảng 5 và được thể hiện dưới dạng đồ thị trên Hình 8. Chúng ta có thể nhận thấy ảnh hưởng rất nhỏ của mật độ cốt đai đến độ võng lớn nhất của dầm. Giá trị độ võng gần như không thay đổi. Điều này cho thấy sự phù hợp với các phân tích định tính và cho phép nhóm tác giả quyết định có thể bỏ qua thể năng biến dạng đàn hồi của cốt đai $U_{đ}$ trong chương trình tính đã xây dựng. Khi đó hệ phương trình (21) không còn là hệ phương trình phi tuyến mà trở thành hệ phương trình tuyến tính. Thời gian tính toán vì vậy cũng được giảm đi đáng kể từ 5 giây xuống còn 2,1 giây.

Bảng 5. Bảng giá trị độ võng tại giữa dầm khi khoảng cách cốt đai thay đổi

Khoảng cách cốt đai a (mm)	50	100	150	200
Độ võng tại giữa dầm f (mm)	0,26265600	0,26265598	0,26265596	0,26265594

Thời gian tính toán như vậy thực sự không có ý nghĩa khi chúng ta chỉ tính toán mô phỏng một lần duy nhất. Hơn nữa, các phần mềm thương mại hiện nay, bằng phương pháp phần tử hữu hạn, còn có thể mô phỏng cả miền ngoài giới hạn đàn hồi với thời gian tính toán cũng chỉ ở mức một vài phút. Tuy nhiên, một trong những lý do khiến nhóm tác giả thực hiện nghiên cứu này là xây

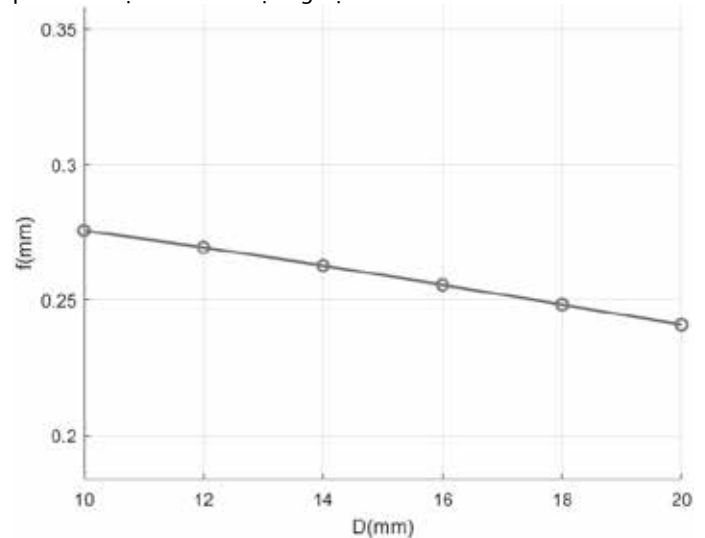
dựng được một chương trình tính toán mô phỏng dầm bê tông cốt thép mà không phải sử dụng các phần mềm thương mại có sẵn. Từ đó, nhóm tác giả có thể xây dựng các mô hình phân tích độ nhạy, độ tin cậy của kết cấu mà nếu sử dụng các phần mềm thương mại thì khó có thể can thiệp được. Mặt khác, khi thực hiện các phân tích về độ nhạy và độ tin cậy thì việc thực hiện tính toán không chỉ một lần mà phải thực hiện lặp đi lặp lại hàng nghìn, hàng vạn lần. Do đó, việc giảm được thời gian tính toán từ 5 giây xuống còn 2,1 giây là rất quan trọng.



Hình 8. Sự thay đổi của độ võng tại giữa dầm khi khoảng cách cốt đai thay đổi

4.5. Ảnh hưởng của đường kính cốt thép dọc

Để đánh giá sự ảnh hưởng của đường kính cốt thép dọc đến độ võng tại giữa dầm, bài báo tiến hành khảo sát với các đường kính cốt dọc lớp dưới khác nhau $\phi 10,12,14,16,18,20$ và giữ nguyên đường kính cốt thép lớp trên là $\phi 10$. Tải trọng $P = 3\text{kN}$ và các thông số còn lại được lấy như trong thí nghiệm uốn bốn điểm. Kết quả khảo sát được giới thiệu trong Bảng 6 và được thể hiện dưới dạng đồ thị trên Hình 9. Có thể quan sát thấy ảnh hưởng rất rõ ràng của đường kính cốt thép dọc đến độ võng tại giữa dầm. Đường kính cốt thép càng tăng thì độ võng càng giảm, tốc độ giảm tương đối đồng đều (ở mức khoảng từ 2% đến 3%) khi đường kính cốt thép tăng đều. Điều này cho thấy vai trò chủ đạo của cốt thép dọc đóng góp vào độ cứng của dầm, phù hợp với các phân tích định tính và thực nghiệm.



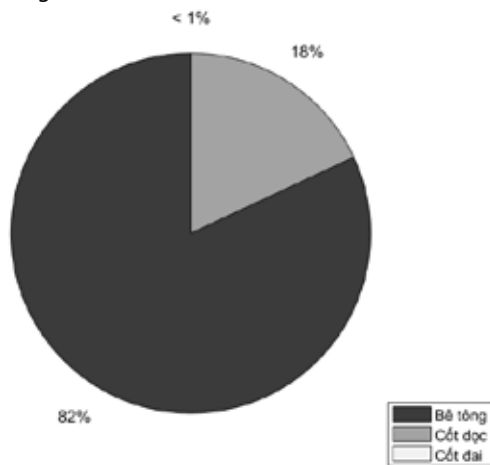
Hình 9. Sự thay đổi của độ võng tại giữa dầm khi đường kính cốt dọc lớp dưới thay đổi

Bảng 6. Bảng giá trị độ võng tại giữa dầm khi đường kính cốt dọc lớp dưới thay đổi

Đường kính cốt dọc D (mm)	10	12	14	16	18	20
Độ võng tại giữa dầm f (mm)	0,27557	0,26938	0,26266	0,25556	0,24824	0,24082
Mức độ giảm độ võng (%)	2,25	2,49	2,70	2,86	2,99	-

4.6. Phân bố năng lượng trong từng thành phần

Để đánh giá rõ hơn sự đóng góp của bê tông và từng thành phần cốt thép đến độ võng của dầm bê tông cốt thép, bài báo tiến hành tính toán từng thành phần thể năng biến dạng đàn hồi trong biểu thức (7): thể năng biến dạng đàn hồi trong bê tông $U_b - U_{lb}$, trong cốt thép dọc U_l và trong cốt thép đai U_{td} . Nói cách khác, từng thành phần thể năng trong biểu thức này chính là phần năng lượng do công của ngoại lực sinh ra và được tích trữ dưới dạng thể năng biến dạng đàn hồi trong bê tông và cốt thép. Hình 10 thể hiện tỷ lệ phần trăm của từng thành phần thể năng. Có thể nhận thấy, phần năng lượng hấp thụ bởi bê tông chiếm đa số, ở mức khoảng 82%. Phần năng lượng hấp thụ bởi cốt thép dọc chiếm khoảng 18%. Trong khi đó phần năng lượng hấp thụ bởi cốt đai chỉ chiếm khoảng <1%. Điều này một lần nữa làm sáng tỏ đóng góp của cốt dọc và cốt đai đến độ cứng của dầm và cho phép nhóm tác giả khẳng định việc bỏ qua thành phần thể năng này trong khi xây dựng chương trình tính.



Hình 10. Thể năng biến dạng đàn hồi trong bê tông và từng thành phần cốt thép

6. KẾT LUẬN

Bài báo đã xây dựng mô hình mô phỏng sự làm việc của dầm bê tông cốt thép trên cơ sở lý thuyết dầm Timoshenko và phương pháp bán giải tích Pb-Ritz. Nhóm tác giả đã viết chương trình tính toán trên nền Matlab và tiến hành kiểm chứng độ tin cậy của kết quả mô phỏng thông qua việc so sánh với kết quả thực nghiệm cung cấp bởi phòng thí nghiệm và kiểm định công trình LASXD 125, Trường Đại học Xây dựng Hà Nội. Chương trình tính toán cũng thể hiện được hình ảnh và giá trị chi tiết của trường ứng suất, chuyển vị và biến dạng trong từng thành phần thép và bê tông. Các khảo sát sau đó cũng chỉ ra đóng góp của từng loại cốt thép đến độ cứng của dầm và việc rút ngắn thời gian tính toán khoảng 2,5 lần nếu bỏ qua thể năng biến dạng đàn hồi trong cốt thép đai.

Hiện nay có nhiều phần mềm thương mại có thể mô phỏng sự làm việc của dầm bê tông cốt thép, thậm chí có thể mô phỏng được cả miền ngoài giới hạn đàn hồi, sử dụng phương pháp phần

tử hữu hạn. Tuy nhiên, phương pháp phần tử hữu hạn là một phương pháp số và cũng cần được kiểm chứng mức độ sai số. Kết quả nghiên cứu của bài báo sử dụng tiếp cận bán giải tích với các triển khai toán học chặt chẽ, có kiểm chứng với kết quả thực nghiệm, tuy chỉ dừng lại ở giới hạn miền đàn hồi nhưng cũng là một kết quả đáng tin cậy để kiểm chứng các chương trình mô phỏng khác. Hơn nữa, bằng cách sử dụng phương pháp Pb-Ritz, chương trình mô phỏng mà bài báo đã xây dựng có thể mở rộng cho các đối tượng dầm có các điều kiện biên khác nhau như thể hiện trong Bảng 2. Cuối cùng, một trong những kết quả quan trọng của nghiên cứu này là nhóm tác giả có thể tiếp tục phát triển mô hình này để mô phỏng dầm bê tông cốt thép bị ăn mòn, dầm bê tông cốt thép gia cường bằng vật liệu FRP hay phát triển mô hình bài toán đánh giá độ nhạy, độ tin cậy của dầm bê tông cốt thép, việc mà nếu sử dụng phần mềm thương mại chúng ta khó có thể can thiệp vào code chương trình của phần mềm.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Campione, G. and M.L., Mangiavillano (2008). Fibrous reinforced concrete beams in flexure: Experimental investigation, analytical modelling and design considerations. *Engineering Structures*, 30(2008), 2970-2980.
- [2] Coronelli, D. and M.G., Mulas (2006). Modelling of Shear Behavior in Reinforced Concrete Beams. *ACI Structural Journal*, 103(3), 372-382.
- [3] Coronelli, D. and P., Gambarova (2004). Structural Assessment of Corroded Reinforced Concrete Beams: Modelling Guidelines. *Journal of Structural Engineering*, 130(8), 1214-1224.
- [4] Dawari, V.B. and G.R., Vesmawala (2014). Application of Nonlinear Concrete Model for Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams. *International Journal of Scientific & Engineering Research*, 5(9), 776-782.
- [5] Đặng Vũ Hiệp (2019). Mô hình phân tích ứng xử dầm bê tông cốt thép chịu tải trọng sử dụng. *Tạp chí KHCN Xây dựng*, số 2/2019, 13-22.
- [6] Feirreira, A.J.M., P.P., Camanho, A.T., Marques, A.A., Fernandes (2001). Modelling of concrete beams reinforced with FRP re-bars. *Composite Structures*, 53(2001), 107-116.
- [7] Hung, D.X., Truong, H.Q., Tu, T.M. (2022). Nonlinear Bending Analysis of FG Porous Beams Reinforced with Graphene Platelets Under Various Boundary Conditions by Ritz Method. In: *Tien Khiem, N., Van Lien, T., Xuan Hung, N. (eds) Modern Mechanics and Applications. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Singapore*. https://doi.org/10.1007/978-981-16-3239-6_6.
- [8] Hung, D., & Truong, H. (2018). Free vibration analysis of sandwich beams with FG porous core and FGM faces resting on Winkler elastic foundation by various shear deformation theories. *Journal of Science and Technology in Civil Engineering (ISTCE) - HUCE*, 12(3), 23-33. [https://doi.org/10.31814/stce.nuce.2018-12\(3\)-03](https://doi.org/10.31814/stce.nuce.2018-12(3)-03).
- [9] Ibrahim, A.M. and M.S., Madmood (2009). Finite Element Modelling of Reinforced Concrete Beams Strengthened with FRP Laminates. *European Journal of Scientific Research*, 30(4), 526-541.
- [10] Júnior, F.S. and W.S., Venturini (2007). Damage modelling of reinforced concrete beams. *Advances in Engineering Software*, 38(2007), 538-546.
- [11] Pazdan, M. (2021). FEM modelling of the static behavior of reinforced concrete beams considering the nonlinear behavior of the concrete. *Studia Geotechnica et Mechanica*, 43(3), 206-223.
- [12] Stramandinoli, R.S.B. and H.L.L., Rovere (2012). FE model for nonlinear analysis of reinforced concrete beams considering shear deformation. *Engineering Structures*, 35(2012), 244-253.
- [13] Sucharda, O., J., Brozovsky and D., Mikolasek (2014). Numerical Modelling and Bearing Capacity of Reinforced Concrete Beams. *Key Engineering Materials*, 577-578(2014), 281-284.
- [14] Trần Ngọc Long, Phan Văn Phúc, Nguyễn Trọng Hà (2020). Tính toán dầm bê tông cốt thép chịu uốn xoắn sử dụng mô hình phi tuyến. *Tạp chí KHCN Xây dựng*, số 2/2020, 23-35.
- [15] Vecchio, F.J. and W., Shim (2004). Experimental and Analytical Reexamination of Classic Concrete Beam Tests. *Journal of Structural Engineering*, 130(3), 460-469.
- [16] Wang, Y.C. and C.H., Chen (2003). Analytical study on reinforced concrete beams strengthened for flexure and shear with composite plates. *Composite Structures*, 59(2003), 137-148.